МЕЖДУНАРОДНЫЙ СЕМИНАР
«СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ И ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ И ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ»

СЕМИНАР ПРИУРОЧЕН
К 70-ЛЕТИЮ ПРОФ. САМКО С.Г.

24 – 28 апреля 2011 г.

ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Ростов-на-Дону
2011

МЕЖДУНАРОДНЫЙ СЕМИНАР
«СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ И ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ И ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ»

СЕМИНАР ПРИУРОЧЕН
К 70-ЛЕТИЮ ПРОФ. САМКО С.Г.

Тезисы докладов

Ростов-на-Дону
2011

УДК 330.4+504+37
1Л4

Международный семинар «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения». Тезисы докладов. Ростов н/Д, Изд-во ЮФУ, 2010. – 71 с.
ISBN

Рассматриваются фундаментальные проблемы современной математики и их приложения к естественным наукам.

Сборник представляет интерес для научных работников, преподавателей, аспирантов, студентов вузов.

Редакционная коллегия:
проф. Б.И. Голубов, д.ф.-м.н. А.Н. Карапетянц, доц. Л.В. Новикова

Спонсор международного семинара «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения» -
Российский фонд фундаментальных исследований, проект 11-01-06023-г

Председатель:
Карапетянц Алексей Николаевич, д.ф.-м.н., проректор Южного федерального университета.

Члены оргкомитета:
Голубов Борис Иванович, д.ф.-м.н., профессор, МФТИ
Шкаликов Андрей Андреевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ
Солдатов Александр Павлович, д.ф.-м.н., профессор, Белгородский госуниверситет
Гольдман Михаил Львович, д.ф.-м.н., профессор, РУДН
Цалюк Зиновий Борисович, д.ф.-м.н., профессор, Кубанский госуниверситет
Пилиди Владимир Ставрович , д.ф.-м.н., профессор, ЮФУ
Штейнберг Борис Яковлевич, д.ф.-м.н., профессор, ЮФУ
Карякин Михаил Игоревич, к.ф.-м.н., декан, ЮФУ
Ерусалимский Яков Михайлович, к.ф.-м.н., профессор, ЮФУ
Сумбатян Межлум Альбертович, д.ф.-м.н., профессор, ЮФУ
Дыбин Владимир Борисович, к.ф.-м.н., доцент, ЮФУ
Вакулов Борис Григорьевич, к.ф.-м.н., доцент, ЮФУ
Авсянкин Олег Геннадиевич, д.ф.-м.н., доцент, ЮФУ

Секретарь оргкомитета:
Новикова Людмила Вадимовна, к.ф.-м.н., доцент, ЮФУ

Помощник председателя оргкомитета:
Жбанова Ольга Валерьевна, аспирант, ЮФУ

ISBN

Секция 1
Функциональный анализ и теория операторов

Авсянкин О.Г. (Ростов-на-Дону)
avsyanki@math.sfedu.ru

О многомерных интегральных операторах с однородными и однородно-разностными ядрами

В пространстве $L_p(\mathbf{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

где функция $k(x,y)$ удовлетворяет следующим условиям:

1^0 $k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n} k(x,y), \quad \forall \alpha > 0$;

2^0 $k(\omega(x), \omega(y)) = k(x,y), \quad \forall \omega \in SO(n)$;

3^0 $k(e_1, y)|y|^{-n/p} \in L_1(\mathbf{R}^n)$, где $e_1 = (1,0,\ldots,0)$.

Известно, что оператор K ограничен в $L_p(\mathbf{R}^n)$. Пусть P — оператор умножения на характеристическую функцию единичного шара, а $Q = I - P$. Рассмотрим оператор

$$B = \lambda I - K_1 P - K_2 Q, \tag{2}$$

где $\lambda \in \mathbf{C}$, а K_1, K_2 — операторы вида (1). Для оператора B устанавливаются необходимые и достаточные условия нетеровости, а также формула для вычисления индекса. Кроме того, исследуется банахова алгебра, порожденная всеми операторами вида (2) и всеми компактными операторами.

Далее, в пространстве $L_p(\mathbf{R}^{n+m})$, $1 \le p \le \infty$, зададим оператор

$$(Af)(x,t) = \int\limits_{\mathbf{R}^n}\int\limits_{\mathbf{R}^m} h(x,y,t-s) f(y,s)\,dy\,ds, \tag{3}$$

в предположении, что функция $h(x,y,t)$ удовлетворяет условиям типа 1^0 и 2^0 по переменным x и y, а также

$$h(e_1, y, t)|y|^{-n/p} \in L_1(\mathbf{R}^{n+m}).$$

Для оператора A вида (3) вводится понятие символа, в терминах которого формулируется критерий обратимости этого оператора.

Афанасьева Т.Н. (Краснодар**)**
laktanik@rambler.ru

О допустимости некоторых пар пространств для линейных разностных операторов и уравнений

Рассматривается линейное разностное уравнение

$$x_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_{nk} x_k + f_n, n \ge 0. \tag{1}$$

Обозначим через l_∞ пространство ограниченных последовательностей m - мерных векторов с нормой $\|x\| = \sup\limits_{n \ge 0} \|x_n\|_{R^m}$; α_0 (c_0)—подпространство l_∞ последовательностей, имеющих предел (нулевой предел) при $n \to \infty$.

Определение 1. Пара пространств (F, X) называется допустимой относительно оператора $\widetilde{A}$, если $\left\{ \sum_{k=0}^{n-1} A_{nk} f_k \right\}_{n=0}^{\infty} \in X$ при любом $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} \in F$.

Определение 2. Пара пространств (F, X) называется допустимой относительно уравнения (1), если при любом $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} \in F$ решение $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in X$.

Определение 3. Уравнение (1) устойчиво, если при любом $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ таком, что $\|f\| = \sup_{n\geq 0}\|f_n\|_{R^m} < \infty$, решение $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию $\|x\| = \sup_{n\geq 0}\|x_n\|_{R^m} < \infty$.

Определение 4. P-срезкой вектора $b = col(b_0, ..., b_{P-1}, b_P, ...)$ называется вектор $b^P = col(b_0, ..., b_{P-1}, 0, ...)$.

Определение 5. Будем говорить, что замкнутое линейное подпространство X обладает *свойством* (L), если существует такое число $r > 0$, что для каждого $N \geq 1$ единичный шар из $X^N = \{x^N = col(x_0, ..., x_{N-1}, 0, ...), x_n \in R^m\}$ содержит шар радиуса пространства N-срезок векторов из l_∞.

Теорема 1. Если X обладает свойством (L) в l_∞ и пара (X, l_∞) допустима относительно оператора $\widetilde{A}$, то

$$\sup_{n\geq 1}\sum_{k=0}^{n-1}\|A_{nk}\| < \infty. \tag{2}$$

Обратно, если для любого оператора $\widetilde{A}$, для которого пара (X, l_∞) допустима, выполняется условие (2), то X обладает свойством (L) в l_∞.

Теорема 2. Пусть уравнение (1) устойчиво и пара (c_0, c_0) ((α_0, α_0)) допустима для оператора $\widetilde{A}$, тогда пара (c_0, c_0) ((α_0, α_0)) допустима относительно уравнения (1).

Обратно, пусть оператор действует в l_∞, пара (c_0, c_0) ((α_0, α_0)) допустима относительно уравнения (1), тогда пара (c_0, c_0) ((α_0, α_0)) допустима для оператора $\widetilde{A}$ и уравнение (1) устойчиво.

Литература

1. Пуляев В.Ф., Цалюк З.Б. К вопросу о допустимости некоторых пар пространств для линейных операторов и уравнений Вольтерра. –Диф. уравнения, 1983, т. 19, № 4, с. 684-692.

Бережной Е.И. (Ярославль)
ber@uniyar.ac.ru

Теоремы экстраполяции в X(α)

Для симметричного пространства X равенством $\psi(X, t) = \|\chi(D)|\ X\ \|$, ($\chi(D)$ - характеристическая функция множества D, $t = \mu(D)$ – мера множества D), определена его фундаментальная функция.

Зафиксируем число $\alpha \in (0, 1)$. Новое идеальное пространство $X(\alpha)$ состоит из тех измеримых функций, для каждой из которых конечна норма $\|x|\ X(\alpha)\ \| = \||x|^{1/\alpha}\ |\ X(\alpha)\ \|^{\alpha}$.

Задача, о которой пойдет речь в настоящем докладе, имеет вид.

Пусть задан набор пространств $X(\alpha)$, ($\alpha \in (\alpha_0, 1)$), и задан некоторый линейный оператор T: $X(\alpha) \Rightarrow Y$, нормы которого допускают оценку $\|T|\ X(\alpha) \Rightarrow Y\ \| \leq c\varphi(\alpha)$, где $\alpha \in (\alpha_0, 1)$, ($0< \alpha_0 <1$), причем $\lim_{\alpha\to 1}\varphi(\alpha) = \infty$, и константа не зависит от $\alpha \in (\alpha_0, 1)$. Нужно описать "наибольшее" пространство функций, из которого оператор T будет действовать в Y.

<u>**Теорема.**</u> Пусть X симметричное пространство, $\psi(X, t)$ - его фундаментальная функция, T - линейный оператор такой, что при всех $\alpha \in (\alpha_0, 1)$ для любого множества D выполнено неравенство

$$\|T\ \chi(D)\ |\ Y\| \leq c\varphi(\alpha)\ \psi(X, |D|),$$

с константой c, не зависящей от D и $\alpha \in (\alpha_0, 1)$.

Для $t \in (0,\infty)$ определим функцию

$$\psi_\varphi(t) = \inf_{\alpha \in (\alpha_0, 1)} \varphi(\alpha)\, \psi^\alpha(t).$$

Тогда для любого x из области определения T верно неравенство

$$\|T x \mid Y\| \le \| x \mid \Lambda(\psi_\varphi)\||.$$

Здесь $\Lambda(\psi_\varphi)$ – пространство Лоренца, построенное по функции ψ_φ.

Выбирая в качестве исходного пространства X различные классические пространства, например, пространства Лебега, Орлича, Лоренца, Марцинкевича и т.п., получаются точные
теоремы экстраполяции для соответствующего набора пространств.

Доказательство основной теоремы использует соображения из работы [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, код проекта 11-01-00321

ЛИТЕРАТУРА

1. Бережной Е.И., Перфильев А.А. Точная теорема экстраполяции для операторов. // Функц. анализ и его приложения, 2000, т. 74, вып. 3, с. 329- 340.

Билалов Б.Т., Гасанова Т.Х. (Азербайджан)
b_bilalov@mail.ru

О базисности систем из экспонент с разрывными фазами в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости

В работе рассматривается система экспонент

$$\left\{e^{i\lambda_n(t)}\right\}_{n\in Z}, \tag{1}$$

где $\lambda_n(t)$ имеет представление

$$\lambda_n(t) = nt - \alpha(t)\, sign\, n + \beta_n(t), \text{ при } n \to \infty. \tag{2}$$

Предполагаем выполнения следующих условий.

a) $\alpha(t)$ *– кусочно-гельдерева на* $[-\pi,\pi]$*;*

b) функции β_n *удовлетворяют соотношению*

$$\beta_n(t) = O\left(\frac{1}{n^{\gamma_k}}\right),\ t \in (t_k, t_{k+1}),\ k = \overline{0,r};\ \{\gamma_k\}_1^r \subset (0,+\infty).$$

Рассматривается лебегово пространство функций $L_{p(\cdot)}(-\pi,\pi) \equiv L_{p(\cdot)}$ с переменным показателем суммируемости $p(\cdot)$.

Положим $WL_\pi = \left\{ \begin{array}{l} p:\ p(\pi) = p(-\pi), \exists C > 0\ \ \forall t_1, t_2 \in [-\pi,\pi]:\ |t_1 - t_2| < \dfrac{1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow\ |p(t_1) - p(t_2)| < \dfrac{C}{-\ln|t_1 - t_2|} \end{array} \right\}.$

Пусть $p \in WL_\pi$ и $p(t) > 1$, $\forall t \in [-\pi,\pi]$. При выполнении условий a),b) найдено достаточное условие базисности системы (1) в $L_{p(\cdot)}$.

Относительно пространства $L_{p(\cdot)}$ можно рассмотреть [1;2]

Литература

1. Шарапудинов И.И. О топологии пространства $L^{p(x)}([0,1])$, Матем.заметки, 26:4 (1979), 613 – 632.
2. Kovacik O., Rakosnik J. On spaces $L^{p(\cdot)}$ and $W^{k,p(\cdot)}$, Czechoclovak Math. I., 1991, 41(116), pp. 592-618.

УДК 517.518

Вакулов Б.Г., Кочуров Е.С. (Ростов-на-Дону)
ekochurov@yandex.ru

Оператор дробного дифференцирования переменного порядка в пространствах Гёльдера $H^{\lambda(x)}(\rho)$

В данной работе рассматриваются дробные производные переменного порядка $\alpha(x)$

$$\varphi(x) = \left[D_{a+}^{\alpha(x)} f\right](x) = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha(x))(x-a)^{\alpha(x)}} + \frac{\alpha(x)}{\Gamma(1-\alpha(x))} \int_a^x \frac{[f(x)-f(t)]dt}{(x-t)^{1+\alpha(x)}}$$

Целью данной работы является изучение действия оператора $D_{a+}^{\alpha(x)}$ в пространствах Гёльдера переменного порядка $H^{\lambda(x)}([a,b],\rho)$, $0 < \min\limits_{x\in[a,b]} \lambda(x) \le \lambda(x) \le 1$, а $\rho(x) = (x-a)^{\mu}$.

Определение. Говорят, что $f(x) \in H^{\lambda(x)}[a,b]$, где $\lambda(x)$ - положительная (не обязательно непрерывная) функция, $0 < \lambda(x) \le 1$, если

$$|f(x+h) - f(x)| \le ch^{\lambda(x)}$$

для всех $x, x+h \in [a,b]$.

Основным результатом исследования является

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

1) $0 < \alpha_- \le \alpha(x) \le \alpha_+ < \lambda_- \le \lambda(x) \le 1,\ \forall x \in [a,b]$
2) $|\lambda(x+h) - \lambda(x)| \le \frac{A}{1+\ln\frac{b-a}{|h|}},\ A = const > 0$
3) $\alpha(x) \in Lip([a,b])$
4) $\mu < \lambda_- + 1$
5) $\lambda(a) = \lambda_+$

Тогда оператор $D_{a+}^{\alpha(x)}$ ограниченно действует из пространства $H^{\lambda(x)}([a,b],\rho)$ в пространство $H^{\lambda(x)-\alpha(x)}([a,b],\rho)$.

Аналогичный результат имеет место и для веса, привязанного к правому концу с естественными условиями на показатель веса.

Goldman M.L., Guselnikova O. M. (Moscow)
seulydia@yandex.ru

Some general properties of operators in Morrey type spaces

Let $E = E(R^n)$ *be a* rearrangement invariant space *(RIS) and* $\widetilde{E} = \widetilde{E}(R_+)$ *be its presentation on* $R_+ = (0,\infty)$ *so that* $\|f\|_E = \|f_*\|_E = \|f^*\|_{\widetilde{E}}$ *. Here* f_* *and* f^* *are* symmetrical and decreasing rearrangements *of function* f*, i.e., decreasing functions of arguments respectively* $\rho = |x|$, $x \in R^n$ *or* $t \in R_+$ *equimeasurable with respect to* f*. Let* $F = F(R_+)$ *be a* Banach function space *(BFS). Introduce* local Morrey type space*:*

$$LM_{EF} = LM_{EF}(R^n) = \left\{ f \in E^{loc} :\ \|f\|_{LM_{EF}} = \left\| \|f\chi_{B_r}\|_E \right\|_F < \infty \right\}. \qquad (1)$$

Here $B_r = \{x \in R^n : |x| < r\}$, $|B_r|$ *is measure of the ball; norm in* F *is calculated for* $r \in R_+$*. For RIS* $E_i = E_i(R^n), i = 1, 2$ *consider operator* $A:\ E_1 \to LM_{E_2F}$ *with norms*

$$\| A \| = \sup \left\{ \| A f \|_{LM_{E_2 F}} : \| f \|_{E_1} \leq 1 \right\};$$

$$\| A \|_* = \sup \left\{ \left\| \left\| \left(A f \right)^* \chi_{(0, |B_r|)} \right\|_{\widetilde{E}_2} \right\|_F : \| f \|_{E_1} \leq 1 \right\}.$$

Proposition 1. For operator A we have estimates

$$\sup \left[\Psi_A(r) \| \chi_{[r, \infty)} \|_F : r \in R_+ \right] \leq \| A \| \leq \| \Psi_A \|_F ;$$

$$\sup \left[\Phi_A(r) \| \chi_{[r, \infty)} \|_F : r \in R_+ \right] \leq \| A \|_* \leq \| \Phi_A \|_F .$$

where

$$\Psi_A(r) = \sup \left\{ \left\| (A f) \chi_{B_r} \right\|_{E_2} : \| f \|_{E_1} \leq 1 \right\}, \ r \in R_+ ;$$

$$\Phi_A(r) = \sup \left\{ \left\| (A f)^* \chi_{(0, |B_r|)} \right\|_{\widetilde{E}_2} : \| f \|_{E_1} \leq 1 \right\}.$$

Corollary. Let $A: E_1 \to E_2$ be bounded. Then, $\| A \| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \| 1 \|_F < \infty$.

Example. *For* $F = L_\infty(w)$ *we have* $\| A \| = \| \Psi_A \|_F = \sup [w \Psi_A]$.

Now, $A \in \Im(c),\ c \in [1, \infty)$ *means that* $A f_* = (A f_*)_*$; $(A f)_* \leq c\, A f_*$ *. Note that embedding operator* $A = I \in \Im(1)$*; maximal operator* $A = M \in \Im(c)$ *for some* $c = c(n) \in [1, \infty)$.

Proposition 1. For operator $A \in \Im(c)$ we have estimates

$$\| A \|_* \leq \| A \| \leq c \| A \|_* ; \quad \Phi_A \leq \Psi_A \leq c\, \Phi_A ,$$

Дыбин В.Б., Бурцева Е.В. (Ростов-на-Дону)
vladimir-dybin@yandex.ru

Задача Римана на системе концентрических колец и дискретные уравнения типа свертки

Составной контур Γ является системой концентрических окружностей Γ_j радиуса $r_j, 0 < r_1 < ... < r_{2n} < \infty$, лежащих в комплексной плоскости с центром в начале координат. Окружности Γ_j с нечетными номерами ориентированы по часовой стрелке, а с четными номерами - против часовой стрелки. Указанная ориентация разбивает комплексную плоскость на две области D^+ и D^-, где D^+ лежит слева от Γ и является объединением колец $D^+ = \bigcup_{m=1}^{n} K_m, K_m = \{ z \in \mathbb{C} \mid r_{2m-1} < |z| < r_{2m} \}$, а $D^- = \mathbb{C} \setminus \overline{D^+}$.

На контуре Γ в пространстве $L_p(\Gamma), 1 < p < \infty$, изучается оператор краевой задачи Римана $R = P_\Gamma^+ + a P_\Gamma^-$ с символом

$$a(t) = (a_1(t_1), a_2(t_2), ..., a_{2n}(t_{2n})), \tag{1}$$

где $a_j(t_j) \in W(\Gamma_j)$ - алгебре Винера на окружности Γ_j. Множество векторов вида (1) образует банахову алгебру $W(\Gamma)$ с поэлементными операциями сложения и умножения.

Факторизация символа оператора R проводится на основе классической факторизации М.Г.Крейна на окружности. Индекс символа, являющийся индексом оператора R, определяется стандартным образом [2]. На основе матричного операторного исчисления порядка 2n построена теория односторонней обратимости оператора R, по форме аналогичная классической теории краевой задачи Римана на замкнутом контуре ([1],[2]), указаны конструкции обратных операторов и описаны подпространства $Ker\ R$ и $Im\ R$.

В качестве приложения рассмотрена система дискретных уравнений типа свертки следующего вида

$$\begin{cases}(P_- + C(a_1)P_+)f_1 + (P_+ - C(a_1)P_+)f_2 = g_1,\\ (P_- - C(a_2)P_-)f_1 + (P_+ + C(a_2)P_-)f_2 = g_2\end{cases} \tag{2}$$

в пространстве $\{\rho_2,\rho_1\}_p^2, \rho_j = r_j^{-1}, j = 1,2, 1 \le p < \infty.$ Здесь через $\{\rho_2,\rho_1\}_p$ обозначено пространство последовательностей

$$f = \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, f_n = \rho_2^n (P_+ f)_n + \rho_1^n (P_- f)_n,$$

где $f = \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l_p(\mathbb{Z}), P_\pm f = \left\{ \tfrac{1}{2}(1 \pm sign\, n) f_n \right\}_{n\in\mathbb{Z}}, C(a_j) -$ оператор дискретной свертки с символом $a_j \in W(\Gamma_j), j = 1,2.$ Для системы (2) построена теория односторонней обратимости, найдены обратные операторы, описаны дефектные подпространства [3].

Литература.

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.:Наука,1977. 640с.
2. Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я. Введение в теорию одномерных сингулярных операторов. Кишинев: Штиинца, 1973. 426 с.
3. Дыбин В.Б., Бурцева Е.В. Оператор краевой задачи Римана на кольце и его приложение к одному классу систем уравнений в дискретных свертках. Труды научной школы И.Б.Симоненко. Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2010. С.79-92.

Kostetskaya G. (Rostov-na-Donu), **Samko N.** (Portugal**)**

nsamko@ualg.pt

Solvability of a certain class of integral equations of the first kind in Morrey spaces

We study multidimensional integral equations of the first kind

$$\int_{R^n} \mathbf{c}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\ \varphi(\mathbf{y})\ |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{\alpha-\mathbf{n}}\,\mathbf{dy}\ = \mathbf{f(x)}$$

in the elliptic case (i.e. in the case where the Fourier transform of the kernel multiplied by $|\xi|^{\alpha}$ is non-degenerate including the infinite point). A constructive inversion of such a potential type operator in terms of hypersingular integrals has been known (see [1]) in the Lebesgue spaces $\mathbf{L^p\ (R^n)}$, via the effective construction of the characteristic of the hypersingular integral by the symbol of the potential operator. In order to measure the regularity properties of solutions in $\mathbf{L^p\ (R^n)}$, we extend the known results of invertibility to the case of Morrey spaces $\mathbf{L^{p,\lambda}\ (R^n)}$ on the base of the results in [2] (note that these spaces are non-separable).

The justification of such an approach heavily depends on the assumptions on the function **c(x)**. We admit the case where **c(x)** may have a discontinuity at the origin, of a type of homogeneous function.

We provide conditions on the regularity of **c(x)** separately in radial and angular variables under which the method of hypersingular integrals is applicable to the case of Morrey spaces.

[1] Костецкая Г. С. Обращение операторов типа потенциала с характеристикой, имеющей разрыв типа однородной функции. *Ростов-на-Дону, 1988. Деп. в ВИНИТИ 21.03.88, N° 2170-B88.*
[2] L-E.Persson and N.Samko. Weighted Hardy and potential operators in the generalized Morrey spaces. *J. Math. Anal. Appl. 377 (2011, 792-806.*

Liflyand E. (Ramat-Gan, Israel)
liflyand@gmail.com

Concerning one Paley-Wiener theorem

In a joint work with S. Tikhonov, we prove weighted analogues of the Paley-Wiener theorem on integrability of the Hilbert transform of an integrable odd function which is monotone on the right half-axis. The obtained results extend Hardy-Littlewood's and Flett's results to the case p=1 under the assumption of (general) monotonicity for an even/odd function. Among the other people in this topic we mention Helson, Szego, Hunt, Muckenhoupt, Wheeden, K. Andersen.

Separate consideration of odd and even functions allows one to deal with the weights from a wider class than the Muckenhoupt one. The case of odd functions includes the non-weighted integrability as well.

We also obtain similar results in the periodic case. In fact, the initial Paley-Wiener theorem concerns the Fourier series of integrable periodic functions and their conjugate.
We deal with the same weight for the function and its conjugate (or Hilbert transform). Generally, the same problem for different weights is still open.

Further, relations between the Fourier transform and Hilbert transform will be discussed.

Мирошникова Е.И. (Ростов-на-Дону)
elenmiroshnikova@gmail.com

Об условиях ограниченности и обратимости многомерных интегральных операторов с однородными ядрами компактного типа в некоторых весовых L_p-пространствах

Изучение многомерных интегральных операторов с однородными ядрами начато Л.Н.Михайловым и продолжилось в работах Н.К. Карапетянца, С.Г. Самко, О.Г. Авсянкина и других авторов (см. [1]-[3] и цитированные там источники). Однако, при исследовании таких операторов существенно использовалось условие инвариантности ядра относительно действия группы SO(n) вращений пространства $\mathbf{R}^n$, что значительно сужает класс рассматриваемых объектов (см. [4], с. 36). В работе [5] множество SO(n)-инвариантных ядер расширяется до класса ядер компактного типа. В этом контексте случай весовых пространств не рассматривался. В данной работе исследуются многомерные интегральные операторы с однородными ядрами компактного типа в L_p-пространствах с полумультипликативным весом.

Пусть $\rho \in C(\mathrm{R}_+)$ - неотрицательная весовая функция, такая что

$$\forall t_1, t_2 \in \mathrm{R}_+ : \quad \rho(t_1 t_2) \le \rho(t_1)\rho(t_2);$$

$L_{p,\rho}(\mathrm{R}^n)$, $1 < p < \infty$, - пространство функций, суммируемых со степенью р и весом ρ.
Предположим, что функция k определена на $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n$ и однородна степени $(-n)$:

$$\forall x, y \in \mathrm{R}^n, \quad \forall \beta \in \mathrm{R}_+ : \quad k(\beta x, \beta y) = \beta^{-n} k(x, y). \tag{1}$$

Пусть $k_{[1],\rho}(\sigma) = \int\limits_{\mathrm{R}^n} |k(x,\sigma)|\, |x|^{-n/p'} \rho(|x|)dx,$ $\mathrm{k}_{[2],\rho}(\sigma) = \int\limits_{\mathrm{R}^n} |k(\sigma, x)|\, |x|^{-n/p} \rho(|x|^{-1})dx,$ где $\sigma \in S_{n-1}$, S_{n-1} - единичная сфера с центром в начале координат в R^n.

Функцию k, удовлетворяющую условию однородности (1), отнесем к классу X_1 (к классу X_2), если $k_{[1],1}, k_{[2],\rho} \in L_\infty(S_{n-1})$ ($k_{[1],\rho}, k_{[2],1} \in L_\infty(S_{n-1})$).

Теорема 1. *Оператор*

$$(K_\kappa(\varphi))(x) = \int_{\mathrm{R}^n} k(x,y)\varphi(y)dy \tag{2}$$

с $k \in X_1 \cup X_2$ *ограничен в* $L_{p,\rho}(\mathrm{R}^n)$.

Полученная теорема распространяет результаты из [2], [3] об ограниченности операторов с однородными ядрами на более общую ситуацию.

Далее в настоящей работе введенный в [5] класс ядер компактного типа определяется в весовом случае. Для алгебры, порожденной операторами вида (2) с такими ядрами, строится символическое исчисление и доказывается критерий обратимости оператора в терминах его символа.

Литература.

[1] *Karapetiants N., Samko S.* Equations with Involutive Operators. Birkhauser, Boston-Basel-Berlin, 2001. 360 p. [2] *Карапетянц Н.К.* О необходимых условиях ограниченности оператора с неотрицательным квазиоднородным ядром // Мат. зам. 1981. Т.30, №5. С. 787-794. [3] *Авсянкин О.Г., Мирошникова Е.И.* Многомерные интегральные операторы с однородными ядрами в L_p-пространствах с полумультипликативным весом // Изв.ВУЗов, Сев.-Кав. рег. 2010. Т.159, №5. С. 5-8. [4] *Самко С.Г.* Гиперсингулярные интегралы и их приложения. Ростов-на-Дону: РГУ, 1984. 208 с. [5] *Деундяк В.М.* Многомерные интегральные операторы с однородными ядрами компактного типа и мультипликативно слабо осциллирующими коэффициентами // Мат. зам. 2010. Т.87, №5. С. 713-729.

Пасенчук А.Э. (Новочеркасск)
pasenchuk@mail.ru

О нетеровости дискретных операторов типа свертки в некоторых топологических пространствах последовательностей со степенным характером поведения на бесконечности

Пусть $l\{\infty, C^n\} = \left\{\varphi = \{\varphi_j\}_{j\in Z} : \varphi_j \in C^n; \sum\left(|j|+1\right)^m \|\varphi_j\| < \infty \forall m\right\}$. В линейном пространстве $l\{\infty, C^n\}$ введем топологию счетно-нормированного пространства с производящей системой норм $|\varphi|_m = \sum\left(|j|+1\right)^m \|\varphi_j\|$, $m = 0,1,2,\ldots$. В пространствах $l\{\infty, C^n\}$ введем операторы проектирования $P_\pm\{\varphi_j\} = \left\{\frac{1}{2}\left(1 \pm \operatorname{sign} j\right)\varphi_j\right\}$, при этом считаем, что $sign 0 = 1$. Пусть $\alpha = \{\alpha_k\}$ - последовательность матриц, удовлетворяющих условиям: 1) для $\forall j < 0 \exists s, c : \|\alpha_j\| \le c\left(-j+1\right)^s$, 2) для $\forall j \ge 0 \forall m, \exists k_m, c_m : \|\alpha_j\| \le c_m\left(j+1\right)^{-m}$. Тогда в пространстве $l\{\infty, C^n\}$ определен и ограничен оператор свертки $\left(C(\alpha)\varphi\right)_k = \sum_{j\in Z} \alpha_{k-j}\varphi_j$, $j \in Z$. Последовательности $\alpha = \{\alpha_k\}$ поставим в соответствие пару функций $A(\xi) = \left(A^-(\xi), A^+(\xi)\right)$, $A^-(\xi) = \sum_{j<0} \alpha_j \xi^j$, $|\xi| > 1$; $A^+(\xi) = \sum_{j\ge 0} \alpha_j \xi^j$, $|\xi| \le 1$, которую назовем символом оператора свертки $C(\alpha)$. Множество символов, порождаемых последовательностями с условиями 1), 2), будем обозначать $M_n(\Pi)$, $M_1(\Pi) = \Pi$. Во множестве Π может быть введена структура коммутативной топологической алгебры с единицей. Отметим, что в Π содержатся функции вида

$P(\xi)Q^{-1}(\xi)$, где $P(\xi),Q(\xi)$ гладкие на $\Gamma=\{\xi\in C:|\xi|=1\}$ функции, при условии, что $Q(\xi)$ имеет не более чем конечное число нулей конечных порядков. Обозначим множество таких функций через $R\Pi$.

Пусть гладкая на Γ функция $H(\xi)$ имеет не более чем конечное число нулей конечных порядков. Обозначим через $n(H)$ число нулей этой функции с учетом кратностей, а через $\kappa_c(H)$ ее сингулярный индекс: $\kappa_c(H)=v.p.\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{H'(\xi)}{H(\xi)}d\xi$.

Теорема 1. Для оператора Винера-Хопфа $W=P_+C(\alpha)P_+:l_+\{\infty,C^n\}\to l_+\{\infty,C^n\}$, $l_+\{\infty,C^n\}=P_+(l\{\infty,C^n\})$ с символом $A(\xi)\in M_n(\Pi)$ следующие условия равносильны:

1) оператор W нетеров,
2) матрица-функция $A(\xi)$ обратима в алгебре $M_n(\Pi)$,
3) определитель $\det A(\xi)$ матрицы-функции $A(\xi)$ обратим в алгебре Π.

Теорема 2. Пусть оператор Винера-Хопфа W с символом $A(\xi)\in M_n(\Pi)$ нетеров и $\det A(\xi)=P(\xi)Q^{-1}(\xi)\in R\Pi$, тогда каждая из функций $P(\xi),Q(\xi)$ имеет на Γ не более чем конечное число нулей конечных порядков, а индекс оператора W может быть найден по формуле $\mathrm{ind}W=\kappa_c(P)+n(P)-\kappa_c(Q)-n(Q)$.

Пилиди В.С. (Ростов-на-Дону)
pilidi@sfedu.ru

Критерии равномерной обратимости сильных аппроксимаций сингулярных интегральных операторов

В работе получены критерии применимости к полному сингулярному интегральному оператору с непрерывными коэффициентами, действующему в пространстве функций, суммируемых с переменной степенью, приближенного метода по семейству сильно аппроксимирующих его операторов, получаемых путем вырезания особенности ядра Коши. Подобные утверждения были получены ранее автором для случая пространств функций, суммируемых с постоянной степенью [1, 2]. Отметим, что методы, примененные в цитируемых работах, не могут быть использованы в данном случае, и исследование проводится по другой схеме.

Приведем один из полученных результатов [3, 4]. Пусть Γ — единичная окружность в комплексной плоскости, $L_{p(\cdot)}(\Gamma)$ — пространство всех определенных на Γ комплекснозначных функций, где переменный показатель p удовлетворяет стандартным условиям. Определим действующий в пространстве $L_{p(\cdot)}(\Gamma)$ оператор S_ε ($\varepsilon>0$) формулой:

$$(S_\varepsilon f)(t)=\int\limits_{|\tau-t|\geq\varepsilon}\frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau,\quad t\in\Gamma.$$

Рассмотрим действующий в пространстве $L_{p(\cdot)}(\Gamma)$ *обратимый* полный сингулярный интегральный оператор $A=aI+bS+T$, где a, $b\in C(\Gamma)$, S — оператор сингулярного интегрирования в пространстве $L_{p(\cdot)}(\Gamma)$, T — компактный оператор в пространстве $L_{p(\cdot)}(\Gamma)$. В этих предположениях справедливо такое утверждение.

ТЕОРЕМА. *Следующие условия равносильны:*

1) *существует такое* $\varepsilon_0>0$*, что все операторы* A_ε, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ *обратимы и*

$$\sup\{\|A_\varepsilon^{-1}\|_{p(\cdot)} < \infty \,;$$

2) *для всех* $t \in \Gamma$, $\lambda \in [-1,1]$ *выполняется условие* $a(t) + \lambda b(t) \neq 0$.

Аналогичные результаты получены для случая полных сингулярных операторов на вещественной оси.

Автор выражает глубокую признательность Стефану Григорьевичу Самко и Ларсу Динингу (Lars Diening) за полезные консультации.

Литература

1 О равномерной обратимости регулярных аппроксимаций одно мерных сингулярных интегральных операторов //Доклады АН СССР. 1988. **Т.299,** № 6. С. 1317 – 1320.

2. Критерии равномерной обратимости регулярных аппроксимаций одномерных сингулярных интегральных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами // Известия АН СССР. Серия математическая. 1990. **Т. 54,** № 6. С. 1270 – 1294.

3. Обоснование метода вырезания особенности для сингулярных интегральных операторов с непрерывными коэффициентами в пространствах функций, суммируемых с переменной степенью // Деп. в ВИНИТИ, № 228-В2010, 34 с.

4. О методе вырезания особенности для сингулярных интегральных операторов в пространствах функций, суммируемых с переменной степенью // Сб. «Труды научной школы И.Б. Симоненко». Изд. ЮФУ. 2010. С. 204–213.

Смолкин Г.Г. (Ростов-на-Дону)
smolkin4@rambler.ru

Исследование разрешимости операторов дискретной свертки с разрывным символом

Данная работа посвящена исследованию фредгольмовости и вычислению индекса операторов из банаховых алгебр дискретных сверток и бисверток в L_p-пространствах с несуммируемыми ядрами.

Пусть T – единичная окружность, Z – множество целых чисел, $1<p<+\infty$. Напомним, что алгебра мультипликаторов M^p состоит из таких функций $\varphi \in L_\infty(T)$, для которых определен и ограничен в пространстве $L_p(Z)$ оператор одномерной дискретной свертки $C_{\hat\phi}$ с символом φ, действующий по правилу:

$$C_{\hat\phi}(\psi)(m) = (\hat\phi * \psi)(m) = \sum_{k\in Z} \hat\phi(m-k)\psi(k)\,,\ m \in Z\,,\ \psi \in L_p(Z),$$

где $\hat\phi$ – это преобразование Фурье функции φ. Известно, что $M^1 = \{\varphi : \hat\phi \in L_1(Z)\}$, $M^2 = L_\infty(T)$, $M^1 \subset M^p \subset M^2$ (см. [1], гл. 2).

Пусть Ω – замкнутая подалгебра $L_\infty(T)$. Обозначим через $A(\Omega)$ банахову алгебру, порожденную действующими в $L_2(Z)$ операторами свертки $C_{\hat\phi}$ с символами из Ω и операторами умножения на функции, стабилизирующиеся на $\pm\infty$. Для операторов из $A(\Omega)$ в [2] на основе применения идеалов типа идеалов Н. К. Никольского получено каноническое представление в виде парного оператора свертки, построено предсимволическое исчисление, получены условия обобщенной фредгольмовости, то есть обратимости по модулю коммутаторского идеала алгебры $A(\Omega)$, а в частном случае, когда Ω является подалгеброй C^*-алгебры Д. Сарасона квазинепрерывных функций QC, получены условия классической фредгольмовости и вычислен индекс.

В случае произвольного p введен L_p-аналог алгебры QC и исследована разрешимость операторов из банаховой алгебры операторов свертки с p-квазинепрерывным символом. Получены условия фредгольмовости для парных операторов свертки с символами из более широкого класса функций (см. [3]) и найдены условия применимости проекционного метода для решения соответствующих операторных уравнений.

Пусть $\Omega_{1,2}$ – замкнутые подалгебры $L_\infty(T)$, $A(\Omega_1)\otimes A(\Omega_2)$ – топологическое тензорное произведение банаховых алгебр. Для операторов из $A(\Omega_1)\otimes A(\Omega_2)$ получены канонические представления, с помощью диаграммного метода Дугласа-Хоу построено предсимволическое исчисление [4] и получены условия обобщенной фредгольмовости. В случае квазинепрерывных символов получены условия классической фредгольмовости.

При p=2 получены результаты о разрешимости операторов из алгебры, порожденной операторами дискретной свертки с квазинепрерывным символом и операторами умножения на функции, слабо осциллирующими на $\pm\infty$.

Литература

Boettcher A., Silbermann B. Analisys of Toeplitz operators. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. – 2006. – 665p. 2. Деундяк В.М., Смолкин Г.Г. Операторы дискретной свертки с разрывными символами // Известия вузов. Математика. – 2007. – Т.8, N543. – С.74-76. 3. Смолкин Г.Г. Замечание о разрешимости некоторых парных операторов дискретной свертки с разрывными символами в L_p-пространстве // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2009. – N3. – С.27-29. 4. Деундяк В.М., Смолкин Г.Г. Предсимволы операторов обобщенной дискретной бисвертки // Журнал Ивановского математического общества. – 2008. – Т.6, N1(5). – С. 3-10.

Соловьева С.А. (Набережные Челны)
solovjeva_sa@mail.ru

Об одном операторе, основанном на полиномах Бернштейна

Рассматривается банахово пространство $Y\equiv C\{p_1,p_2;\overline{m},\overline{\tau}\}$ «точечно» гладких функций (см., напр., [1]), используемое при решении некоторого класса интегральных уравнений третьего рода. В нем изучается вопрос приближения на основе алгебраических полиномов. В качестве иллюстрации приведем лишь один из полученных результатов.

Пусть $B_n^T\equiv B_{n+m+1}^T : Y\to Y_n \equiv U(H_n)\oplus H_{m-1}$ – линейный оператор, заданный по закону

$$(B_n^T y)(t)\equiv (UB_nTy)(t)+\sum_{j=1}^{q+2}\sum_{i=0}^{m_j-1} y^{\{i\}}(t_j)R_{ji}(t),$$

где оператор $B_n:\ C\to H_n$ любой непрерывной функции $\varphi(t)$ сопоставляет полином Бернштейна (см., напр., [2])

$$(B_n\varphi)(t)\equiv\sum_{k=0}^{n}\varphi(k/n)t^k(1-t)^{n-k},$$

$T:Y\to C$ – «характеристический» оператор класса Y (см., напр., [1]), а U – оператор умножения на функцию $u(t)\equiv t^{p_1}(1-t)^{p_2}\prod_{j=1}^{q}(t-t_j)^{m_j}$

($t_j\in(0,1),\ p_1,p_2\in R^+,\ m_j\in N\ (j=\overline{1,q})$).

Теорема. *Для любой функции* $y\in Y$ *справедлива оценка*

$$\left\| y-B_n^T y\right\|_Y = O\left(\omega\left(Ty,n^{-1/2}\right)\right),$$

где $\omega(\varphi,\delta)$ *– модуль непрерывности функции* $\varphi\in C$ *с шагом* δ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (госконтракт № 02.740.11.0193).

Литература

1. Габбасов Н.С. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщенных функций / Н.С.Габбасов. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2006. – 176 с.
2. Натансон И.П. Конструктивная теория функций / И.П.Натансон. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.

Умархаджиев С.М. (Грозный)

Пространства Иванеца-Сбордоне

В 1992 году Тадеуш Иванец и Карло Сбордоне (T. Iwaniec, C. Sbordone) [1] ввели новый класс функциональных пространств на открытом ограниченном множестве Ω из R^n, которые они назвали *grand Lebesgue spaces*:

$$L^{p)}(\Omega):=\left\{ f:\ \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\varepsilon\int_\Omega |f(x)|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}<\infty \right\}.$$

Мы вводим весовые пространства Иванеца-Сбордоне на произвольном неограниченном множестве $\Omega\subseteq R^n$ посредством пространств Лебега с некоторым весовым сомножителем $\langle x\rangle^{-\alpha\varepsilon}:=\left(1+|x|^2\right)^{-\alpha\varepsilon/2}$, "привязанным" к бесконечности и зависящим от ε: Пусть $1<p<\infty$, $\theta\ge 0$, $\alpha\ge 0$ и $\rho(x)$ – весовая функция, заданная на Ω. Через $L_\alpha^{p),\theta}(\Omega,\rho)$ обозначим множество функций $f(x)$, для которых норма

$$\|f\|_{L_\alpha^{p),\theta}(\Omega,\rho)}=\sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\varepsilon^\theta\int_\Omega |f(x)|^{p-\varepsilon}\rho(x)\langle x\rangle^{-\alpha\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

конечна. Для корректности этого определения на параметр α накладывается условие $\int_\Omega \rho(x)\langle x\rangle^{-\alpha p}dx<\infty$.

Пространство $L_\alpha^{p),\theta}(\Omega,\rho)$, $1<p<\infty$, является банаховым пространством и в случае ограниченного множества Ω (и $\rho(x)\equiv 1$) совпадает с пространством $L^{p)}(\Omega)$.

Класс $W_p=W_p(\Omega)$, $1<p<\infty$, весовых функций назовём *допустимым,* если выполняются условия: 1) $\rho\in W_p \Rightarrow \rho\in W_{p-\varepsilon}$ для некоторого $\varepsilon>0$; 2) $\rho\in W_p\Rightarrow \rho^{1+\varepsilon}\in W_p$ для некоторого $\varepsilon>0$; 3) $\rho_1,\rho_2\in W_p\Rightarrow \rho_1^{1-t}\rho_2^t\in W_{p-\varepsilon}$ для любого $t\in[0,1]$. Отметим, что класс Макенхоупта A_p является допустимым.

Теорема ([2]). Пусть $\Omega\subseteq R^n$, $1<p<\infty$, $W_p(\Omega)$ – допустимый класс весов и $\rho\in W_p(\Omega)$. Если линейный оператор T ограничен в пространстве $L^p(\Omega,\rho)$ и в пространстве $L^{p-\varepsilon}(\Omega,\rho)$ для некоторого $\varepsilon>0$, то он также ограничен в пространстве Иванеца-Сбордоне $L_\alpha^{p),\theta}(\Omega,\rho)$, где α – произвольно в случае ограниченного множества Ω и произвольное положительное число в случае неограниченного Ω.

Следствие. Пусть $1<p<\infty$. Если весовая функция $\rho(x)$, $x\in R^n$, удовлетворяет условию Макенхоупта A_p, то оператор Кальдерона-Зигмунда ограничен в весовом пространстве Иванеца-Сбордоне $L_\alpha^{p),\theta}(R^n,\rho)$ с произвольным $\alpha>0$.

Приведённые результаты получены совместно с профессором С.Г. Самко.

1. T. Iwaniec and C. Sbordone. On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses. Arch. Rational Mech. Anal., 119: 1992. 129–143.
2. S.G. Samko, S.M. Umarkhadzhiev. On Iwaniec-Sbordone spaces on sets which may have infinite measure. Azerbaijan Journal of Mathematics. V. 1, No 1, 2011. 67–83.

Феоктистова А.А. (Липецк)
alek-feoktistova@yandex.ru

О слабой непрерывности преобразования Фурье-Бесселя в пространстве основных функций

Пусть $R_N^+ = R_k^+ \times R_{n-k} \times R_m^+ \times R_{N-n-m}$ и $1 \le k \le n \le m \le N$. Введем обозначения $u=(x,y) \in R_N^+$, $x \in R_k^+ \times R_{n-k}$, $y \in R_m^+ \times R_{N-n-m}$. Каждая из переменных x и y в свою очередь разбита на части $x=(x',x'')$, $y=(y',y'')$, $x'=(u_1,\ldots,u_k)$, $x''=(u_{k+1},\ldots,u_n)$, $y'=(u_{n+1},\ldots,u_{n+m})$, $y''=(u_{n+m+1},\ldots,u_N)$. Через $S_{ev}=S_{ev}(R_N^+)$ обозначим подпространство пространства Шварца основных функций $S(R_N)$, состоящее из функций, четных по каждой из весовых переменных $u_1,\ldots,u_k$ и $u_{n+1},\ldots,u_{n+m}$. Пространство весовых обобщенных функций $S'_{ev}=S'_{ev}(R_N^+)$ определяется на основе весовой линейной формы $(f,\varphi)_\gamma = \int_{R_N^+} f(u)\varphi(u)u^\gamma\,du$. Пусть $B_{u_i}=B_{\gamma_i}=\dfrac{\partial^2}{\partial u_i^2}+\dfrac{\gamma_i}{u_i}\dfrac{\partial}{\partial u_i}$ – оператор Бесселя и $l=(l_1;l_2)=(l'_1,l''_1;l'_2,l''_2)$, где l'_1,l''_1,l'_2,l''_2 – мультииндексы, состоящие из целых положительных чисел размерности соответственно k, $n-k$, m, $N-n-m$. И пусть $(BD)^l=(B_{x'}^{l'_1}D_{x''}^{l''_1}B_{y'}^{l'_2}D_{y''}^{l''_2})$, где $B_{x'}=(B_{u_1},\ldots,B_{u_k})$, $D_{x''}=(\dfrac{\partial}{\partial u_{k+1}},\ldots,\dfrac{\partial}{\partial u_n})$, $B_{y'}=(B_{u_{n+1}},\ldots,B_{u_{n+m}})$, $D_{y''}=(\dfrac{\partial}{\partial u_{n+m+1}},\ldots,\dfrac{\partial}{\partial u_N})$.

Смешанное преобразование Фурье-Бесселя по части переменных x определяется формулой

$$\varphi^x(\xi,y)=(F_B)_x[\varphi](\xi,y)=\int\limits_{R_n^+}\varphi(x,y)\prod_{i=1}^k j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(u_i,\xi_i)\;\; e^{-i\langle x'',\xi''\rangle}\prod_{i=1}^k u_i^{\gamma_i}\,dx.$$

Кроме того, преобразование обратимо в классе функций $S_{ev}(R_N^+)$ (см. [3]). Обратное преобразование определяется выражением

$$\varphi(u)=(F_B^{-1})_\xi[\varphi^x](u)=2^{k-|\gamma(k)|}(2\pi)^{k-N}\prod_{i=1}^k\Gamma^{-2}\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)(F_B)_x[\varphi^x](-x,y).$$

Лемма. *Пусть* q *целое положительное число и* l_1 *мультииндекс, тогда для любой функции* $\varphi\in S_{ev}$ *справедливо неравенство*

$$\left(1+|x|^q\right)\left|(BD)^{l_1}(F_B)_x[\varphi]\right| \le C_{q,l_1}\sum_{(\tilde q,\tilde l_1)\in\varepsilon}\kappa(\tilde q,\tilde l_1,\varphi),$$

где $\kappa(q,l,\varphi)=\sup\limits_u\left(1+|u|^q\right)\left|(BD)^l\varphi(u)\right|$, *а* C_{q,l_1} *– константа, зависящая от* (q,l_1), *и* ε *– конечное множество пар* $(\tilde q,\tilde l_1)$, *зависящее от* (q,l_1).

Теорема. *Операции* $(F_B)_x$ *и* $(F_B^{-1})_x$ *слабо непрерывны на* S_{ev}.

Список литературы

1. Ляхов Л. Н. В-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с В-потенциальными ядрами. Липецк: ЛГПУ, 2007.
2. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
3. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997.

Шубарин М.А. (Ростов-на-Дону)
mas102@mail.ru

Построение нетривиальных интерполяционных функторов в категории пар Фреше с базисом

1. Через $\overline{\mathsf{Ket}}$ обозначим категорию, объектами которой являются всевозможные пары вида $\widetilde{X} = \langle \overline{X}, f \rangle$ в которой $\overline{X} = [X_0, X_1]$ — пара пространств Фреше (такая, что $X_0 \supset X_1$), $f = (f_n)$ — общий абсолютный базис в паре $\overline{X}$. Если $\widetilde{X} = \langle \overline{X}, f \rangle$, $\widetilde{Y} = \langle \overline{Y}, g \rangle$ — объекты категории, то пространство морфизмов $\Delta_{f,g}(\overline{X}, \overline{Y}) := \overline{\mathsf{Ket}}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ состоит из линейных непрерывных, диагональных относительно базисов $f = (f_n)$ и $g = (g_n)$. Кроме того, пусть Ket — полная подкатегория в $\overline{\mathsf{Ket}}$, состоящая объектов вида $\langle [X, X], f \rangle$.

2. Через $\widehat{N}$ обозначим множество все бесконечных семейств $\overline{\upsilon} = (\upsilon_k)_{k=1}^{\infty}$, состоящих бесконечных семейств бесконечных попарно непересекающихся подмножеств в N (т.е. множестве натуральных чисел) такое, что $\bigcup_k \upsilon_k = N$. Предположим, что $\overline{\upsilon} = (\upsilon_k)_{k=1}^{\infty} \in \widehat{N}$ и $\widetilde{X} = \langle [X_0, X_1], f \rangle$ — объект категории $\overline{\mathsf{Ket}}$ и $(\|\cdot\|_{j,p})$ — набор норм, задающий топологию в X_j, $j = 0,1$. Положим

$$a_{p,n} = \begin{cases} \|f_n\|_{1,p}, & n \in \upsilon_k, k \le p \\ \|f_n\|_{0,p}, & n \in \upsilon_k, k > p \end{cases}.$$

Пространство $X = F(\widetilde{X}; \overline{\upsilon})$ определяется следующим образом:

1. X состоит из всех $x \in X$ для которых ряд $\|x\|_p = \sum_n |f_n'(x)| a_{p,n}$ сходится для всякого n;
2. топология пространства Фреше в X задаётся набором норм $(\|\cdot\|_p)$.

Теорема. При сделанных предположениях отображение $F(\cdot; \overline{\upsilon}) : \overline{\mathsf{Ket}} \to \mathsf{Ket}$ задаёт интерполяционный функтор в категории $\overline{\mathsf{Ket}}$. Другими словами, для произвольных объектов $\widetilde{X} = \langle \overline{X}, f \rangle$, $\widetilde{Y} = \langle \overline{Y}, g \rangle$ категории $\overline{\mathsf{Ket}}$ и любого морфизма $T \in \Delta_{f,g}(\overline{X}, \overline{Y})$ диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{j} & F(\overline{X}; \overline{\upsilon}) & \xrightarrow{j} & X_0 \\ \downarrow_T & & \downarrow_T & & \downarrow_T \\ Y_1 & \xrightarrow{j} & F(\overline{Y}; \overline{\upsilon}) & \xrightarrow{j} & Y_0 \end{array}$$

коммутативна для произвольного оператора $T \in \Delta_{f,g}(\overline{X}, \overline{Y})$ (предполагается, что j – оператор вложения).

3. Определим на множестве $\widehat{N}$ отношение эквивалентности $\approx$: если $\overline{\upsilon} = (\upsilon_k)_{k=1}^{\infty} \in \widehat{N}$ $\overline{\eta} = (\eta_k)_{k=1}^{\infty} \in \widehat{N}$, то будем писать $\overline{\upsilon} \approx \overline{\eta}$ тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: $\forall k \exists l = l(k) : \upsilon_k \subset \eta_1 \cup \cdots \cup \eta_l, \eta_k \subset \upsilon_1 \cup \cdots \cup \upsilon_l$.

Лемма. Если $\overline{\upsilon} \approx \overline{\eta}$, то $F(\widetilde{X};\overline{\upsilon}) = F(\widetilde{X};\overline{\eta})$.

При надлежащем выборе пары $\widetilde{X} = \langle \overline{X}, f \rangle$ и семейства $\overline{\upsilon} = (\upsilon_k)_{k=1}^{\infty} \in \widehat{N}$ пространство $F(\widetilde{X};\overline{\upsilon})$ будет совпадать (возможно – с точностью до изоморфизма) с важными для приложений пространствами — степенными пространствами первого и второго рода (эти пространства были введены в работах В. П. Захарюты) и некоторые их обобщения.

Якубов А.Я. (Грозный)

Проблема П.Л. Чебышева, связанная с интегральными неравенствами и их приложения

В 1882 г. П.Л. Чебышев [1] для интегральных средних значений функций *f, g* и *f* · *g* получал интегральное неравенство

$$\left(\int_a^b fgdt\right) / \int_a^b dt > \left(\int_a^b fdt \cdot \int_a^b pgdt\right) / \left(\int_a^b pdt\right)^2 \tag{1}$$

если обе функции *f* и *g* возрастают или обе убывают на $[a,\ b]$ и обратное неравенство, если одна функция возрастает, другая убывает на $[a,\ b]$. Неравенства (1) вызвали особый интерес многих математиков всего мира (Ш. Пикар, Ш.Эрмит и т.д.). В связи с широкими возможностями их приложения решались вопросы распространения их на более широкие классы функций, чем класс монотонных функций.

В работе дается описание всех измеримых функций, для которых имеют место неравенства Чебышева.

Пусть $\Omega_{a,b}$ – n - мерный брус в R^n.

Определение 1. Будем говорить, что измеримые на брусе $\Omega_{a,b}$ функции f и g интегрально синхронны на $\Omega_{a,b}$, если квадратичная форма

$$\psi(u,v) = \int_a^b \int_a^b p(t)p(y)[f(t)u - f(y)v][g(t)u - g(y)v]dtdy$$

является положительно определенной на $\Omega_{a,b}$ и интегрально антисинхронными на $\Omega_{a,b}$, если квадратичная форма

$$\overline{\psi}(u,v) = \int_a^b \int_a^b p(t)p(y)[f(t)u - f(y)v][g(t)u - g(y)v]dtdy$$

является положительно определенной на $\Omega_{a,b}$ для всех нетривиальных $h = h(u,v) \in R^2$

Теорема 1. *Для того, чтобы измеримые на $\Omega_{a,b}$ функции f и g удовлетворяли прямым (обратным) неравенствам Чебышева необходимо и достаточно, чтобы функции f и g были интегрально синхронны (соответсвенно антисинхронны) на $\Omega_{a,b}$.* [2]

1. *Чебышев П. Л.* О приближенных выражениях одних интегралов через другие, взятые в тех же пределах. // Сообщ. и проток. зас. Мат. общ. при Харьковском Имп. Унив., II, 1882, 93-98.
2. *Yakubov Ya. A* Convolutions of weakly sinchronous functions // Integral Transforms and Special Functions, 8(3-4): 287-298, 1999.

Секция 2
Теория функций

Бандалиев Р.А. (Баку, Азербайджан)
bandalievr@rambler.ru

Об ограниченности многомерного геометрического среднего оператора в пространстве Лебега переменного порядка

В представленном докладе исследуется задача о нахождении двухвесовой критерии для многомерного геометрического оператора в пространстве Лебега переменного порядка. Этот оператор имеет $Gf(x)=\exp\left(\frac{1}{|B(0,|x|)|}\int_{B(0,|x|)}\ln f(y)dy\right)$, где $f>0$, $B(0,|x|)=\{y: y\in R^n; |y|\le|x|\}$ и $|B(0,|x|)|=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}|x|^n$. Предположим, что $\omega: R^n\to(0,\infty)$ весовая функция, т.е. $0<\omega(x)<\infty$ почти для всех $x\in R^n$.

Определение. Пусть $p: R^n\to[1,\infty)$ измеримая функция. Через $L_{p(x),\omega}(R^n)$ обозначим весовое пространство измеримых по Лебегу функций таких, что $\int_{\mathbf{R}^n}\left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\lambda_0}\right)^{p(x)}dx<\infty$, где $\lambda_0>0$. Отметим, что весовое пространство $L_{p(x),\omega}(R^n)$ является банаховым функциональным пространством по норме ([1])

$$\|f\|_{L_{p(x),\omega}(R^n)}=\|f\|_{L_{p(\cdot),\omega}}=\inf\left\{\lambda>0:\int_{R^n}\left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\lambda}\right)^{p(x)}dx\le 1\right\}.$$

Теорема. Пусть $1<p\le q(x)\le q^+<\infty$. Предположим, что $u(x)$ и $v(x)$ весовые функции определенные на R^n и удовлетворяющие условию:

$$\sup_{t>0}|B(0,t)|^{s-1}\left\|\frac{v(\cdot)}{|\cdot|^{s/p}}\exp\left(\frac{1}{|B(0,|x|)|}\int_{B(0,|x|)}\ln\frac{1}{u(x)}dy\right)\right\|_{L_{q(\cdot)}(|\cdot|>t)}<\infty, \qquad (1)$$

где $s\in(1,p)$. Тогда для справедливости неравенства

$$\|Gf(x)\|_{Lq(\cdot),v}\le C\|f\|_{Lp,u}, \qquad (2)$$

необходимо и достаточно выполнение условия (1). Кроме того, если С наилучшая положительная константа в (2), то

$$\sup_{s>1}\frac{e^{s/p}D(s,p,q)}{\left[e^s+\frac{1}{s-1}\right]^{1/p}}\le C\le\left(\frac{p}{q_+}+\frac{q_+-p}{q\_}\right)\inf e^{\frac{s-1}{p}}D(s,p,q)$$

В связи с теоремой отметим работу [2].

Литература

[1] Шарапудинов И.И. О топологии пространства $L_{p(t)}([0,1])$. 1979. т.26, no 4. с. 613-637.

[2] Persson L.E., Stepanov V.D. Weighted integral inequalities with the geometric mean operator. J.Inequal.Appl. 2002. v.7, no 5. p.727-746.

Гиль А.В., Ногин В.А. (Ростов-на-Дону)
gil-alexey@yandex.ru, vnogin@ns.math.rsu.ru

Обращение и описание обобщенных потенциалов Стрихарца

Пусть $K_\theta^\beta \varphi = k_\theta^\beta * \varphi$, $\varphi \in H^1$, - обобщенный потенциал Стрихарца, H^1 - пространство Харди,

$$k_\theta^\beta(y) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \theta(|y|)\left(1-|y|^2\right)_+^{\beta-1}, \; 0<\beta<1$$

Здесь $\theta(r)$ - гладкая функция, называемая характеристикой потенциала $K_\theta^\beta \varphi$.

В рамках метода аппроксимативных обратных операторов строится обращение потенциалов $K_\theta^\beta \varphi$ с H^1-плотностями и дается описание образа $K_\theta^\beta\left(H^1\right)$ в неэллиптическом случае, когда символ оператора K_θ^β вырождается на множестве меры нуль в R^{n}.

Обращение потенциала $f = K_\theta^\beta \varphi$, $\varphi \in H^1$, в неэллиптическом случае дает следующая

Теорема 1. Пусть $0<\beta<1$ *и* $\varphi \in H^1$. *Тогда*

$$\left(T_\theta^\beta K_\theta^\beta \varphi\right)(x) = \varphi(x), \text{ где}$$

$$T_\theta^\beta f = \overset{(H^1)}{\lim_{\varepsilon\to 0}}\; \overset{(L^2)}{\lim_{\delta\to 0}}\; F^{-1}\left(\frac{\overline{\hat{k}_\theta^\beta(|\xi|)}\cdot e^{-\varepsilon|\xi|^2}}{\left|\overline{\hat{k}_\theta^\beta(|\xi|)}\right|^2 + i\delta}\right) * f. \qquad (1)$$

Образ $K_\theta^\beta\left(H^1\right)$ описывает следующая

Теорема 2. Пусть $0<\beta<1$. *Тогда*

$$K_\theta^\beta\left(H^1\right) = \left\{f \in H^1 : T_\theta^\beta f \in H^1\right\},$$

где T_θ^β - оператор (1).

Волосивец С.С. (Саратов), **Голубов Б.И.** (Долгопрудный) [1]
golubov@mail.mipt.ru , volosivetsss@mail.ru

Абсолютная сходимость двойных рядов по мультипликативным системам

Через $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ обозначим ортонормированную на [0,1) мультипликативную систему функций (см. [1] , с. 31). Каждая система $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ определяется последовательностью $P=\{p_n \geq 2\}_{n=1}^\infty$ натуральных чисел. Примером мультипликативной системы является система Уолша, которая получается при $P=\{p_n = 2\}_{n=1}^\infty$. Ниже мы считаем последовательность $P=\{p_n\}_{n=1}^\infty$ ограниченной и рассматриваем сходимость двойных рядов вида

$$\sum_{i=0}^\infty \sum_{j=0}^\infty \gamma_{i,j}\left|\hat{f}(i,j)\right|^r, r>0,$$

[1] Работа первого автора поддержана программой «Ведущие научные школы РФ» (проект НШ-4383.2010.1), работа второго автора поддержана РФФИ, проект 11-01-00321 и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проект 2.1.1/12136.

где $\hat{f}(i,j)$ – коэффициенты Фурье функций $f \in L^p[0,1)^2, 1 < p \le 2$, по двойной системе Виленкина $\{\chi_i(x)\chi_j(y)\}_{i,j=0}^{\infty}$, а на последовательность положительных чисел $\gamma = \{\gamma_{i,j}\}_{i,j=0}^{\infty}$ накладывается некоторое условие обобщенной монотонности. Чтобы сформулировать это условие, положим $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \cdots p_n, n \in \mathbb{N}$, и $E_n = \{(i,j) : 0 \le i,j < m_n, i,j \in \mathbb{Z}_+\}$, $R_n = E_n \setminus E_{n-1}, n \in \mathbb{N}$, причем $R_0 = \{(0,0)\}$. Будем писать $\gamma \in A(\alpha, P)$, где $\alpha \ge 1$, если при некоторой постоянной $C > 0$ выполняются неравенства

$$\left(\sum_{i,j \in R_n} \gamma_{i,j}^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \le C\, m_n^{2/\alpha - 2} \sum_{i,j \in R_{n-1}} \gamma_{i,j} \equiv C\, m_n^{2/\alpha-2}\Gamma_{n-1}, n \in \mathbb{N}.$$

Для $m_n = 2^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, в одномерном случае аналогичное определение введено Л. Гоголадзе и Р. Месхия [2], а в двумерном – Ф. Морицем и А. Верешем [3].

Для функции $f \in L^p[0,1)^2, 1 \le p < \infty$, через $\|f\|_p$ будем обозначать ее норму в пространстве $L^p[0,1)^2$. Через $P_{m,n}$ обозначим множество полиномов $P_{m,n}(x,y)$ порядка (m,n) по системе $\{\chi_i \chi_j\}_{i,j=0}^{\infty}$ и положим $E_{m,n}(f)_p = \inf\left\{\|f - F\|_p, F \in P_{m,n}\right\}$.

Теорема 1. *Пусть* $f \in L^p[0,1)^2, 1 < p \le 2$, $1/p + 1/q = 1, 0 < r < q, \gamma \in A(q/(q-r), P)$. *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} m_n^{-2r/q} E_{m_n,m_n}^r(f)_p \Gamma_n < \infty$, *то* $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{i,j} \left|\hat{f}(i,j)\right|^r < \infty$.

Утверждение теоремы 1 окончательно в следующем смысле.

Теорема 2. *Пусть числа* p, q, r *и последовательность* γ *удовлетворяют условиям теоремы 1, а убывающая к нулю последовательность* $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$ *такова, что* $\sum_{k=n+1}^{\infty} E_k = O(E_n)$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} m_n^{-2r/q} E_n^r \Gamma_n = \infty$. *Тогда существует такая функция* $f \in L^p[0,1)^2$, *что* $E_{m_n,m_n}(f)_p = O(E_n)$, *но* $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{i,j} \left|\hat{f}(i,j)\right|^r = \infty$.

Теоремы 1 и 2 являются аналогами одномерных результатов авторов [4].

Литература

1. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.
2. Gogoladze L., Meskhia R. On the absolute convergence of trigonometric Fourier series // Proc. Razmadze Math. Inst., **141** (2006), 29-40.
3. Moricz F., Veres A. Absolute convergence of multiple Fourier series revisited // Anal. Math. **34** (2008), 209-220.
4. Волосивец С.С., Голубов Б.И. Обобщенная абсолютная сходимость простых и двойных рядов Фурье по мультипликативным системам // Тезисы докл. Межд. конф. «Теория приближений», Москва, 2010, Мат. ин-т РАН, с. 20.

Гаджибеков М. (Азербайджан)
hajibayovm@yahoo.com

Ограниченность обобщенных потенциалов в гипергруппах

Пусть $(K,*)$ коммутативная гипергруппа и λ мера Хаара, e единица, T^x оператор обобщенного сдвига в ней. Свертка двух функций в K определяется

$$f*g(x)=\int_K T^x f(x) g(y^{\sim}) d\lambda(y),$$

где $y^{\sim}$ инволюция элемента y.

Пусть в коммутативной гипергруппе дана квазиметрика ρ и $B(x,r)=\{y\in K:\rho(x,y)<r\}$ есть шар по этой квазиметрике. Определим функцию $\Lambda_x(z)=T^x\chi_{B(e,r)}(z^{\sim})$.

Допустим, что существует постоянные c_1,c_2,c_3 и число N такое, что для всех $x,y\in K$ и $\quad>0$ выполняются условия

$$\operatorname{supp}\Lambda_x(\cdot)\subset B(x,c_1r) \qquad (1)$$

$$\lambda B(x,r)T^x\chi_{B(e,r)}(y^{\sim})\le c_2\lambda B(e,r)\le c_3r^N \qquad (2)$$

Для почти возрастающей функции $a:(0,\infty)\to(0,\infty)$ определим оператор

$$I_a f(x)=\int_K T^x\left(\frac{a(\rho(e,y))}{\rho(e,y)^N}\right) f(y^{\sim}) d\lambda(y)$$

Теорема *Пусть $(K,*)$ коммутативная гипергруппа с квазиметрикой ρ и мерой Хаара λ, которая удовлетворяет условия удвоения и выполняются условия (1) и (2).*

Допустим, что $1<p<\infty$ и функция $a:(0,\infty)\to(0,\infty)$ почти возрастает, функция $\frac{a(r)}{\lambda}$ почти убывает, для определенного $0<\lambda<\frac{N}{p}$ и

$$\int_0^1\frac{a(t)}{t}dt<\infty.$$

Тогда оператор I_a ограниченно действует из пространства Лебега $L^p(K,\lambda)$ в пространство Орлича $L^{\Phi}(K,\lambda)$, где N-функция определяется через обратной функции (для каждой фиксированной точки $x\in X$)

$$\Phi^{-1}(x,r)=\int_0^r A\left(t^{-\frac{1}{N}}\right)t^{\frac{1}{p}-1}dt,$$

$$A(r)=\int_0^r\frac{a(t)}{r}dt$$

Емгушева Г.П. (Элиста)
galina_emg@mail.ru

Применение вычетов к вычислению сумм некоторых числовых рядов.

Хорошо известна сумма ряда «обратных квадратов» $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$, которая используется в математическом анализе при изучении числовых рядов. С помощью теории вычетов нетрудно найти сумму ряда «обратных квадратов нечетных чисел»

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}. \qquad (1)$$

Сумма ряда (1) получена в результате применения теоремы о полной сумме вычетов к особым точкам функции комплексного переменного $f(z)=tg\frac{1}{z}$. Рассматривая более общую функцию комплексного переменного $f(z)=tg\frac{1}{z-a}, z\neq a$, где a комплексное число приходим также к формуле (1). Продолжая обобщение, а именно, рассматривая функцию комплексного переменного $f(z)=\frac{az}{bz+c}tg\frac{1}{z}$, где $a^2+b^2+c^2\neq 0$ при условии $\frac{c}{b}\neq\pm\frac{2}{\pi(2k+1)}, k\in Z$ получены следующие суммы числовых рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2(4k+1)(4k+3)}=\frac{\pi}{8}(4-\pi);$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2(3k+1)(3k+2)}=\frac{\pi}{2}(2\sqrt{3}-\pi);$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2(6k+1)(6k+5)}=\frac{\pi}{32}(3\sqrt{3}-\pi);$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2(2k-1)(2k+3)}=-\frac{\pi^2}{2^5};$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2(2k-3)(2k+5)}=-\frac{\pi^2}{2^7};$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2(4k-1)(4k+5)}=-\frac{\pi}{216}(3\pi+4);$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2(4k-3)(4k+7)}=-\frac{\pi}{1000}(5\pi-4).$$

Литература

1. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Начала теории. Т.1: учебник. - Санкт-Петербург: изд-во «Лань», 2009. – 486с.
2. Воробьев Н.Н. Теория рядов. - Санкт-Петербург: изд-во «Лань», 2002. – 408с.
3. Боярчук А.К. Справочное пособие по высшей математике. Т.4: Функции комплексного переменного: теория и практика. – Москва: Едиториал УРСС, 2001. - 352 с.

Смирнова И.Ю., Карапетянц А.Н. (Ростов-на-Дону)
ismirnova@rambler.ru

О некоторых весовых пространствах типа Бергмана со смешанной нормой

Начиная с работ С. Бергмана и М.М. Джрбашяна пространства аналитических р - суммируемых по отношению к сигма-конечной мере функций на открытом связном множестве в комплексной плоскости или многомерном комплексном пространстве интенсивно изучались в работах многих авторов. Нас будут интересовать весовые пространства Бергмана на единичном диске и верхней полуплоскости. Основной мотивацией данной работы является развитие методов исследования классов операторов Теплица и порождаемых этими операторами алгебр в весовых пространствах Бергмана со смешанной нормой и с, вообще говоря, неограниченными символами. Для этого, в частности, необходима характеризация самих весовых пространств Бергмана со смешанной нормой, исследование структуры этих пространств, позволяющее в дальнейшем получить необходимые представления для изучения соответствующих теплицевых операторов. Понятно, что при изучении аналитических р-суммируемых функций основное внимание должно быть уделено поведению функции при приближении к границе области. Введение смешанной нормы позволит особо выделить поведение функции при приближении к границе. В единичном диске имеется три типа гиперболической геометрии – эллиптический, параболический и гиперболический. Исследование поведения функции при приближении к границе по соответствующим геодезическим предполагает введение и изучение трех существенно различных типов весовых пространств со смешанной нормой, связанных с указанными выше типами гиперболической геометрии. Например, модельная ситуация для эллиптического типа – это различные нормы по радиальной и угловой переменной. Впоследствии, естественно, планируется исследование как отдельных операторов Теплица в весовых пространствах Бергмана со смешанной нормой, так и порождаемых этими операторами С*-алгебр. Ранее исследование операторов Теплица и алгебр теплицевых операторов в таких пространствах не осуществлялось (имеются только частные результаты об ограниченности проектора Бергмана).

Ляхов Л.Н. (Воронеж)
lyakhov@box.vsi.ru

Можно ли под преобразованием Абеля понимать преобразование Радона функций, сферически симметричных в евклидовом пространстве дробной размерности?

Известно, что преобразование Радона радиальной функции в R_2 с точностью до константы оказывается преобразованием Абеля порядка 1/2 (в R_3 это уже не так). Если предположить, что преобразование Радона действует на функцию, заданную в пространстве дробной размерности, равной $1+\gamma$, а $\gamma<2$ и являющуюся в этом пространстве сферически симметричной (радиальной), а также предположить, что законы преобразования интегральных выражений в этом пространстве совпадают с законами преобразования координат в обычном многомерном интеграле, то окажется, что преобразование Радона совпадает (опять же с точностью до константы) с преобразованием Абеля порядка $\gamma/2$.

Необходимо отметить, что в описанной выше ситуации роль преобразования Радона выполняет уже преобразование Радона-Киприянова индекса γ. Последнее принципиально новое в сравнении с классическим преобразованием Радона. Преобразование Радона-Киприянова, отвечающее индексу $\gamma=n-1$ и умноженное на площадь поверхности единичной сферы в R_n, совпадает с преобразованием Радона (классическим) сферически симметричной по части переменных (в том числе и радиальных) функции. Это обстоятельство и делает возможным фантастическое предположение о том, что преобразование Радона осесимметрических и радиальных функций в евклидовом пространстве дробной размерности (а это преобразование Радона-Киприянова функций из соответствующих весовых классов) ---преобразование Абеля.

В предполагаемой лекции будут приведены соответствующие формулы вместе с доказательствами наиболее принципиальных из них.

Ситник С.М. (Ростов-на-Дону)
mathsms@yandex.ru

Операторы преобразования Бушмана-Эрдейи и их приложения

Операторы Бушмана–Эрдейи являются интегральными операторами специального вида с функциями Лежандра в ядрах. При определённом выборе параметров они являются одновременным обобщением операторов преобразования Сонина–Пуассона-Дельсарта и их сопряжённых, операторов дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля и Эрдейи–Кобера, а также интегральных преобразований Мелера–Фока.

Интегральные операторы указанного вида с функциями Лежандра в ядрах впервые встретились в работах E.T. Copson по уравнению Эйлера-Пуассона-Дарбу в конце 1950-х годов. Впервые подробное изучение разрешимости и обратимости данных операторов было начато в 1960–х годах в работах Р. Бушмана и А. Эрдейи, и продолжено в работах Higgins, Ta Li, Love, Habibullah, K.N. Srivastava, Динь Хоанг Ань, Смирнова, Катрахова, Вирченко, Федотовой, Килбаса, Скоромник. Название для этого класса операторов предложено автором.

В докладе перечислены основные результаты для операторов Бушмана-Эрдейи, приведена их специальная классификация.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, Наука и техника, 1987.
2. Virchenko N., Fedotova I. Generalized Associated Legendre Functions and Their Applications. World Scientific, 2001.
3. Kilbas A.A., Skoromnik O.V. Integral transforms with the Legendre function of the first kind in the kernels on L- spaces // Integral Transforms and Special Functions. 2009. Vol. 20, issue 9. P. 653--672.
4. Катрахов В.В. Операторы преобразования и псевдодифференциальные операторы// СМЖ, 1980, т. 21, № 1.
5. Катрахов В.В. Общие краевые задачи для одного класса сингулярных и вырождающихся уравнений// ДАН СССР, 1980, т. 251, № 6.
6. Ситник С.М. Унитарность и ограниченность операторов Бушмана--Эрдейи нулевого порядка гладкости // Препринт ИАПУ ДВО РАН. Владивосток. 1990. 45 с.
7. Ситник С.М. Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана-Эрдейи //ДАН СССР. 1991. Т. 320, №6. С. 1326-1330.
8. Ситник С.М. Обзор: Операторы преобразования и их приложения //
В книге: "Исследования по современному анализу и математическому моделированию". (Под ред. В.Ф.Коробейника, А.Г.Кусраева). Владикавказ, ИМ РАН, 2008. С. 226-293.
9. Sitnik S.M. Transmutations and Applications: a survey// 141 pages/ http://arxiv.org/abs/1012.3741
10. Ситник С.М. Ограниченность операторов преобразования Бушмана-Эрдейи// Труды 5-ой международной конференции "Analytical Methods of Analysis and Differential

Equations (AMADE)" Том 1: Математический Анализ. Национальная Академия наук Белоруси,
институт математики. Минск, 2010. С. 120--12511.
11. Ситник С.М. Решение задачи об унитарном обобщении операторов преобразования Сонина—Пуассона// Научные Ведомости Белгородского государственного университета. № 5 (76), Выпуск 18, 2010, С. 135--153.
12. Ситник С.М. Метод факторизации операторов преобразования в теории дифференциальных уравнений// Вестник Самарского Государственного Университета (СамГУ) — Естественнонаучная серия. № 8/1 (67), 2008, С. 237--248.

Скориков А.В. (Москва)
skorikov@gubkin.ru

Пространство потенциалов Рисса на цилиндре

В работе С.Г.Самко [1] дано описание в терминах гиперсингулярных интегралов пространства риссовых потенциалов на R^n Рассмотрим задачу об описании пространства риссовых потенциалов функций, определенных на цилиндрическом множестве, которое является декартовым произведением m-мерного тора T^m и евклидова пространства R^n. Отождествим такие функции с функциями на R^{m+n} периодическими по первым m переменным. Функциональные пространства дифференцируемых функций на $T^1 \times R^n$ применяются в теории уравнений КЗК (Хохлова, Заболоцкой, Кузнецова) [2].

Используя на R^n ядро Гаусса-Вейерштрасса $\mathrm{W_t(x) = (4\pi t)^{-n/2} \exp(-|x|^2/4t), x \in R^n}$, а на T^m модифицированную периодизацию такого ядра

$$w_t(\theta) = \sum_{|k|>0} e^{-t|k|^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{k},\theta)}, \theta \in \mathrm{R}^m$$

определим на цилиндре ядро Гаусса-Вейерштрасса $w_t(\theta, x) = w_t(\theta)\mathrm{W_t(x)}$ и ядро потенциала Рисса

$$I_\alpha(\theta, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty t^{\alpha/2-1} w(\theta, x)\, dt.$$

Потенциал Рисса I_*^α на функциях с нулевым средним по тору T^m определяется как свертка с ядром $I_\alpha(\theta, x)$. В образах Фурье потенциал Рисса сводится к умножению на функцию $|\lambda|^{-\alpha}$ с целочисленными первыми m координатами.

Теорема 1. Если $0 < \alpha < m + n,\ 1 < p < \alpha/(m+n),$ то оператор Рисса I_*^α ограничен из L_p в L_q.

Теорема 2. Если $\int_{T^m} \varphi\, d\nu = 0$ и $0 < \alpha < n$, то справедливо представление потенциала Рисса $I_*^\alpha \varphi$ в виде особо сходящегося интеграла по всему пространству R^{m+n}.

С помощью теорем 1,2 можно дать описание пространства риссовых потенциалов на цилиндре в терминах гиперсингулярных интегралов.

1.Самко С.Г. О пространствах риссовых потенциалов. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1976, т.40, №5, с.1443-1472.

2. Bardos C., Rozanova A. KZK equation. International conference and work-shop "Function Spaces, Approximation Theory, Nonlinear Analysis"dedicated to the centennial of Sergei Michailovich Nikolskii. Russian Academy of Sciences. V.A. Steclov Mathematical Institute, Moscow, Russia, May, 23-29, 2005, p.258

Тригуб Р.М. (Донецк,Украина)

Сравнение линейных операторов

Приведены некоторые неравенства (иногда точные) для операторов типа свёртки.
1.Некоторые общие теоремы
2.Мультипликаторы Фурье и абсолютная сходимость интегралов Фурье
3.Методы суммирования рядов Фурье и К- функционалы пространств гладких функций
4.Положительно определённые функции и сплайны
5.Сравнение линейных дифференциальных операторов

Литература

[1] R.M.Trigub , E.S.Belinsky,Fourier Analysis and Approximation of Functions,Kluwer-Springer,2004
[2] R.M.Trigub, Fourier Multipliers and Comparison of Linear Operators, Operator Theory: Advances and Applications,Vol.191 (2009), 499-513

Филиппов В.И. (Саратов)
888vadim@mail.ru

Сходимость рядов Фурье в слабых метриках

Пусть Φ - совокупность четных, неотрицательных, конечных и неубывающих на полупрямой $(0,\infty]$ функций $\varphi(t)$ с $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t)=\varphi(\infty)=\infty$. Через $\varphi(L)$ будем обозначать множество всех тех измеримых на отрезке $[0,2\pi]$ функций $f(x)$, для которых

$$\int_0^{2\pi}\varphi(f(x))dx<\infty \quad [3].$$

Будем говорить, что функция $\varphi\in\Phi$ удовлетворяет Δ_2 - *условию*, если существуют константы $k>1$ и $u_0>0$ такие, что $\varphi(2u)\le k\varphi(u)$ для всех $|u|\ge u_0$.

Если φ удовлетворяет Δ_2 - *условию,* то класс $\varphi(L)$ линеен.

В работах [1], [2] было доказано, что если функция f суммируема, то для любого $0<p<1$ сопряженная функция ряда Фурье $\left|\bar{f}(x)\right|^p$ суммируема. В данной работе рассматриваются классы функций более "узкие", чем $L_p[0,2\pi]$, $0<p<1$, т.е. промежуточные между $L_p[0,2\pi]$, $0<p<1$, и $L[0,2\pi]$.

Теорема 1. Пусть функция $\varphi\in\Phi$, непрерывна на $[0,\infty)$, $\varphi(0)=0$, $\varphi(t)>0$, $t>0$, удовлетворяет Δ_2 –условию, $\int_0^{t_0}\varphi(\frac{1}{x})dx<\infty$, где t_0 зависит от функции φ. Тогда для всякой суммируемой функции $f(x)$, функция $\varphi(f(x))$ также суммируема.

Теорема 2. Пусть функция $\varphi\in\Phi$, непрерывна на $[0,\infty)$, $\varphi(0)=0$, $\varphi(t)>0$, $t>0$, удовлетворяет Δ_2 –условию, $\int_0^{t_0}\varphi(\frac{1}{x})dx<\infty$, где t_0 зависит от функции φ,

$\varphi(t) \le |t|,\ \ t \ge t_0$. Тогда для всякой суммируемой функции $f(x) \in L(-\pi,\pi)$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(f(x) - S_n(x))dx = 0,$$

где S_n (x) – частичная сумма ряда Фурье функции f(x).

Литература

1.Колмогоров А.Н., Sur les fonctions harmoniques conjuquées et les séries de Fourier//FM, 7(1925). С. 23-28.
2.Titchmarsh E.C., On conjugate functions//PLMS, 29(1929). C. 49-80.
3.Ульянов П.Л., Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$// Успехи математических наук. 1972г., март-апрель (т. XXVII, вып. 2 (164)). С. 3-52.

Hasanov J.J. (Baku, Azerbaijan)
hasanovjavanshir@yahoo.com.tr

Hardy-Littlewood-Stein-Weiss inequality in the variable exponent Morrey spaces

Let $p(\cdot)$ be a measurable function on Ω with values in $[1,\infty)$. An open set Ω is assumed to be bounded throughout the whole paper. We suppose that

$$1 < p^- \le p(x) \le p^+ < \infty, \tag{1}$$

where $p^- = \inf\limits_{x\in\Omega} p(x)$, $p^+ = \sup\limits_{x\in\Omega} p(x)$.

By $WL(\Omega)$ (weak Lipschitz) we denote the class of functions defined on Ω satisfying the log-condition

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{A}{-\ln|x-y|}, \quad |x-y| < \frac{1}{2}, \quad x, y \in \Omega$$

where $A = A(p) > 0$ does not depend on *x, y*.

Let $\lambda(\cdot)$ be a measurable function on Ω with values in $[0,n]$. The variable Morrey space $L_{p(\cdot)\lambda(\cdot)}(\Omega)$ and variable weighted Morrey space $L_{p(\cdot)\lambda(\cdot),|\cdot|^\gamma}(\Omega)$ is defined as the set of integrable functions *f* on Ω with the finite norms

$$\|f\|_{L_{p(\cdot)\lambda(\cdot)}} = \sup_{x\in\Omega, r>0} r^{-\frac{\lambda(x)}{p(x)}} \|f\chi_{\tilde{B}(x,r)}\|_{p(\cdot)},$$

$$\|f\|_{L_{p(\cdot)\lambda(\cdot),|\cdot|^\gamma}} = \sup_{x\in\Omega, r>0} r^{-\frac{\lambda(x)}{p(x)}} \| |\cdot|^\gamma f\chi_{\tilde{B}(x,r)}\|_{p(\cdot)}.$$

Within the frameworks of the spaces $L_{p(\cdot)\lambda(\cdot),|\cdot|^\gamma}(\Omega)$, over bounded sets $\Omega \subseteq R^n$ we consider the weighted Hardy-Littlewood maximal operator

$$M_\beta f(x) = |x - x_0|^\beta \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{\tilde{B}(x,r)} \frac{|f(y)|}{|y - x_0|^\beta} dy$$

potential type operators

$$I^{\alpha(\cdot)} f(x) = \int_\Omega |x-y|^{\alpha(y)-n} f(y)dy, \quad 0 < \alpha(x) < n.$$

Theorem 1. *Let* Ω *be bounded and* $p,\lambda\in WL(\Omega)$ *satisfy condition* (1), $0\le\lambda(x)<\lambda^{+}<n$, $\lambda^{+}=ess\sup\limits_{x\in\Omega}\lambda(x)$ *and* $-\frac{n}{p(x)}<\beta<\frac{n}{p'(x)}$. *Then the weighted maximal operator* M_{β} *is bounded in* $L_{p(\cdot)\lambda(\cdot)}(\Omega)$.

Theorem 2. *Let* Ω *be bounded,* $x_0\in\overline{\Omega}$, $p,\lambda,\alpha\in WL(\Omega)$ *and p satisfy condition* (1). *Let also* $0\le\lambda(x)<\lambda^{+}<n$, $\mu=\frac{q(x_0)\gamma}{p(x_0)}$, $0\le\gamma<n(p(x_0)-1)$ *and the conditions* $\inf\limits_{x\in\Omega}\alpha(x)>0$, $\sup\limits_{x\in\Omega}(\lambda(x)+\alpha(x)p(x))<n$, $\frac{1}{p(x)}-\frac{1}{q(x)}=\frac{\alpha(x)}{n-\lambda(x)}$ *hold. Then the operator* $I^{\alpha(\cdot)}$ *is bounded from* $L_{p(\cdot)\lambda(\cdot),|x-x_0|^{\gamma}}(\Omega)$ *to* $L_{q(\cdot)\lambda(\cdot),|x-x_0|^{\mu}}(\Omega)$.

Хасанов Ю.Х. (Таджикистан)
yukhas60@mail.ru

Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций

Через B_2 обозначим класс почти-периодических в смысле Безиковича функций с нормой

$$\|f(x)\|_{B_2}=\left\{\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

Будем рассматривать ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)|A_n|^{\beta}\quad(0<\beta<2),\tag{1}$$

где $\varphi(n)$ - четная, положительная функция, определенная на множестве целых чисел,

$A_n=\overline{\lim\limits_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}f(x)\exp(-i\lambda_n x)dx$ - коэффициент Фурье функции $f(x)\in B_2$.

В работе приводятся необходимые и достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье, почти-периодических в смысле Безиковича функций, показатели Фурье $\Lambda\{\lambda_n\}$, которой имеют единственную предельную точку на нуле, т.е.

$$\lambda_0=0;\ \lambda_{-n}=-\lambda_n,\ |\lambda_n|>|\lambda_{n+1}|;\ \lim_{n\to\infty}|\lambda_n|=0.\tag{2}$$

При этом в качестве характеристики, определяющей свойств функции применяется модуль усреднения порядка k **функции** $f(x)\in B_p$ $(p\ge1)$

$$W_k(f;H)_{B_p}=\sup_{T\ge H}\|f_{T^k}(x)\|_{B_p}\ (H>0,\ k\in N),$$

где

$$f_{T^k}(x)=(2T)^{-k}\int_{x-T}^{x+T}dt_1\int_{t_1-T}^{t_1+T}dt_2\ldots\int_{t_{k-2}-T}^{t_{k-2}+T}dt_{k-1}\int_{t_{k-1}-T}^{t_{k-1}+T}f(t_k)dt_k\,.$$

В работе главным образом, устанавливается, что *если спектр* $\Lambda\{\lambda_n\}$ *функции* $f(x)\in B_2$ *удовлетворяет условиям (2) и при* $0<\beta<2$ *выполнено соотношение*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\psi_\beta(2^\nu)W_k^\beta(f;\lambda_{2^{\nu-1}}^{-1})_{B_2}<\infty,$$

где

$$\psi_\beta(2^\nu)=\left\{\sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^\nu+1}[\varphi(n)]^{\frac{2}{2-\beta}}\right\}^{1-\frac{\beta}{2}},$$

то ряд (1) сходится.

Цвиль М.М. (Ростов-на-Дону)
tsvilmm@mail.ru

Формула суммирования В.К. Дзядыка кратных рядов Фабера

Через C^n будем обозначать n-мерное комплексное пространство, его точки – через $z = (z_1,z_2,..z_n)$. Пусть D_k^+ – конечная односвязная область в плоскости C^1, ограниченная спрямляемой жордановой кривой L_k; D_k^- – ее дополнение до всей плоскости, $k = 1,2,\ldots, n$; функция $z_k = \psi_k(w_k)$ конформно и однолистно отображает внешность единичного круга $\{|w_k| > 1\}$ на область D_k^- при условиях $\psi_k(\infty) = \infty$, $\psi'_k(\infty) > 0$, функция $w_k = \varphi_k(z_k)$ – обратная к $\psi_k(z_k)$. $D^+=D_1^+\times D_2^+\times\ldots\times D_n^+$ – полицилиндрическая область в C^n с остовом $\sigma = L_1 \times L_2 \times\ldots\times L_n$; T^n – единичный тор. Множество всех векторов $l = (l_1, l_2, \ldots,l_n)$ с целочисленными координатами обозначим Z^n, а множество всех векторов $l\in Z^n$ с неотрицательными координатами – Z_+^n. Вектор $(1,1,\ldots,1)$ обозначим через I и будем писать z^{I} вместо $z_1z_2\ldots z_n$, dz вместо $dz_1dz_2\ldots dz_n$. Пусть функция n комплексных переменных $f(z)$ аналитическая в области D^+ и непрерывная в замыкании области. Рассмотрим зависящий от параметров $(\theta_1, \theta_2,\ldots,\theta_n) = \theta$ и z интеграл

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\sigma f\left[\Psi\left(\varphi(\varsigma)e^{-i\theta}\right)\right]\frac{d\varsigma}{(\varsigma-z)^I} \tag{1}$$

где $\varphi(\varsigma)e^{-i\theta}=\left(\varphi_1(\varsigma_1)e^{-i\theta_1},\ldots,\varphi_n(\varsigma_n)e^{-i\theta_n}\right); z\in D^+$

Предположим, что на единичном торе T^n имеет место разложение вида:

$$f\left[\Psi(w)\right]=\sum_{l\in Z^n}a_lw^l. \tag{2}$$

Подставляя разложение (2) в интеграл (1) и используя формулу производящей функции для полиномов Фабера $\Phi_{l_k}^{(k)}(z_k)$, находим равенство

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T^n} f\left[\Psi\left(we^{-i\theta}\right)\right]\frac{\Psi'(w)dw}{\left(\Psi(w)-z\right)^I}=\sum_{l\in Z_+^n}a_l\Phi_l(z)e^{-il\theta}$$

где $\Phi_l(z)=\prod_{k=1}^{n}\Phi_{l_k}^{(k)}(z_k),\quad e^{-il\theta}=\left(e^{-il_1\theta_1},\ldots,e^{-il_n\theta_n}\right).$

Далее возьмем произвольную тригонометрический полином $S_\Omega(\theta)=\sum_{l\in\Omega}\lambda_le^{il\theta}$, где Ω – некоторое конечное подмножество решетки Z^n и построим аналог формулы В.К. Дзядыка в случае n переменных:

$$P_{\Omega_+}(z)=\frac{1}{(2\pi)^n}\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Pi^n}S_\Omega(\theta)d\theta\int\limits_{T^n}f\left[\Psi\left(we^{-i\theta}\right)\right]\frac{\Psi'(w)dw}{\left(\Psi(w)-z\right)^l}=\sum_{l\in\Omega_+}\lambda_l a_l \Phi_l(z),$$

$$z\in D^+,\Omega_+=\Omega\bigcap Z_+^n.(3)$$

Эта формула преобразует тригонометрический полином в алгебраический многочлен, причем этот алгебраический многочлен получается из кратного ряда Фабера функции $f(z)$ с помощью коэффициентов суммирования λ_l. В зависимости от способа построения частичной суммы $S_\Omega(\theta)$ после применения формулы (3) возможно появление разнообразных алгебраических полиномов $P_{\Omega_+}(z)$. С помощью этой формулы получаются оценки скорости сходимости просуммированных кратных рядов Фабера внутри полицилиндрической области.

Шакиров И.А. (Набережные Челны)
iskander@tatngpi.ru

О поведении функций Лебега при интерполировании по произвольному числу узлов

Известно, что при исследовании сходимости интерполяционных процессов в пространстве $C[0,2\pi]$ важную роль играют функции и константы Лебега. В связи с имеющимися проблемами раскрытия суммы модулей от конечного числа ядер Дирихле, явные виды функций Лебега $\lambda_n(t)$, $\lambda_n^*(t)$ и поведение их графиков в математической литературе до сих пор оставались неизвестными. В работе эти проблемы решены как в случае нечетного (N=2n+1), так и четного числа (при N=2n функций Лебега $\lambda_n^c(t)$ ($c\ge 0$ *− для определенности*) существует бесконечное множество) равномерно распределенных на $[0,2\pi]$ N узлов интерполяции.

1. Из общего (модульного) вида функции Лебега

$$\Lambda_n(t)=\frac{1}{N}\sum\nolimits_{k=1}^{N}\left|D_n(t_k-t)\right| \qquad (t_k=2\pi k/N;\ \ N=2n+1\ \vee\ N=2n)$$

впервые получены явные (безмодульные) выражения функций $\lambda_n(t)$ и $\lambda_n^c(t)$:

$$\lambda_n(t)=\frac{\sin(n+0{,}5)t}{2n+1}\left[\cos ec\frac{t_n+t}{2}+\sum\nolimits_{k=1}^{n}(\cos ec\frac{t_{k-1}+t}{2}+\cos ec\frac{t_k-t}{2})\right] \qquad (t\in[0,\frac{2\pi}{2n+1}]),$$

$$\lambda_n^c(t)=\frac{\sin nt}{2n}\left[2c(n-n^*)+\sum\nolimits_{k=1}^{n^*}(ctg\frac{t_{k-1}+t}{2}+ctg\frac{t_k-t}{2})+\sum\nolimits_{k=n^*+1}^{n}(ctg\frac{t_{k-1}+t}{2}-ctg\frac{t_k-t}{2})\right]$$

$$\left(n^*=[\frac{2n}{\pi}arcctg\,c]\,;\ \ c=0\Rightarrow\lambda_n^0(t)=\lambda_n^*(t)=\frac{\sin nt}{2n}\sum\nolimits_{k=1}^{n}(ctg\frac{t_{k-1}+t}{2}+ctg\frac{t_k-t}{2})\,;\ \ t\in[0,\frac{\pi}{n}]\right),$$

соответствующие тригонометрическим интерполяционным полиномам Лагранжа

$$P_n(x,t)=\frac{2}{2n+1}\sum\nolimits_{k=1}^{2n+1}x(t_k)D_n(t_k-t) \qquad (D_n(u)=\frac{\sin(n+0{,}5)u}{2\sin 0{,}5u}\,;\ \ t_k=\frac{2\pi}{2n+1}k;\ \ N=2n+1\,),$$

$$P_n^c(x,t)=\frac{1}{n}\sum\nolimits_{k=1}^{2n}x(t_k)D_n^c(t_k-t) \qquad (D_n^c(u)=\frac{\sin nu}{2}(ctg\frac{u}{2}-c);\ \ t_k=\frac{\pi}{n}k;\ \ N=2n).$$

2. Затем, соответствующие функциям $\lambda_n(t)$ и $\lambda_n^*(t)$ константы Лебега

$$\lambda_n = \frac{1}{2n+1}(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos ec\frac{2k-1}{4n+2}\pi\ ), \qquad \lambda_n^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ctg\frac{2k-1}{4n}\pi$$

получены, строго исследуя функции $\lambda_n(t)$ и $\lambda_n^*(t)$ методами дифференциального исчисления, а соответствующие $\lambda_n^c(t)$ константы λ_n^c оценены снизу и сверху известными параметрами:

$$\lambda_n^* + \frac{1}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}(c-ctg\frac{2k-1}{4n}\pi\ ) \ \le\ \lambda_n^c\ \le \lambda_n^* + \frac{1}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}(c-ctg\frac{k}{2n}\pi) \quad (c \ge 0,\ n \in N).$$

3. ТЕОРЕМА 1. Функции Лебега $\lambda_n(t)$ и $\lambda_n^*(t)$ 1) являются четными, периодическими функциями, 2) строго возрастают и выпуклы соответственно на полупериодах $[0,\ \pi/(2n+1)]$ и $[0,\ \pi/2n]$, 3) имеют области значения, равные $[1,\ \lambda_n]$ и $[1,\ \lambda_n^*]$.

ТЕОРЕМА 2. Функции Лебега $\lambda_n^c(t)$ $(c > 0;\ t \in [0,\ \pi/n])$ 1) являются π/n-периодическими, строго возрастающими в $(0,\ t^0)$ и строго убывающими в $(t^0,\ \pi/n)$ функциями, 2) в точках $t^0 = t^0(n,c) \in (0,\ \pi/2n)$ они достигают своих максимальных значений $\lambda_n^c = \lambda_n^c(t^0) = \max\limits_{t\in[0,\ \pi/n]} \lambda_n^c(t)$, 3) имеют области значения, равные $[1,\ \lambda_n^c]$, 4) являются выпуклыми на периоде функциями.

Секция 3
Дифференциальные уравнения и математическая физика

Агаев Э.А. (Баку, Азербайджан)
elminagayev@yahoo.com

Базисные свойства одной задачи Штурма -Лиувилля четвертого порядка со спектральным параметром в граничном условии

Расматривается спектральная задача

$$y^{(4)}(x)-\left(q(x)y'(x)\right)' = \lambda y(x),\ x\in(0,1) \tag{1}$$

$$y''(0)-C_0Ty(0)-C_1y'(0)=0, \tag{2.a}$$

$$y(0)+C_2Ty(0)-C_0y(0)=0, \tag{2.b}$$

$$y''(1)+D_1y'(1)=0, \tag{2.c}$$

$$(a\lambda+b)y(1)-(c\lambda+d)Ty(1)=0, \tag{2.d}$$

где $\lambda\in C$-спектральный параметр, $q(x)$- неотрицательная и абсолютно непрерывная функция на промежутке $[0,1]$, $C_0,C_1,C_2,D_0,D_1,a,b,c,d$-действительные постоянные, причем $C_0,C_1,C_2,D_0,D_1\ge 0,\ bc-ad>0.$

Задача (1),(2) в случае $c=0$ детально исследована в работе [1].

При $c\neq 0$ определим число из неравенства $\mu_{N-1}<-d/c\le\mu_N$ где $\mu_N - N-$ое собственное значение вполне регулярной системы Штурма (1), (1.2a)-(1.2c), $y(1)=0.$

Теорема 1. Существует неограниченно возрастающая последовательность собственных значений $\lambda_1,\lambda_2,..,\lambda_n,....$ задачи (1),(2) причем $\lambda_n>0$ при $n\ge 3$. Соответствующие им собственные функции $y_1(x),y_2(x),...,y_n(x),...$ обладают следующими осцилляционными свойствами:

а) если $c=0,$ то $y_n(x)$ при $n\ge 2$ имеет ровно $n-1$ простых нулей в интервале $(0,1)$; $y_1(x)$не имеет нулей в интервале $(0,1)$ при $\lambda_1\ge 0,$ и может иметь произвольное число нулей, в интервале $(0,1)$,при $\lambda_1<0,$ которые также является простыми;

в) если $c\neq 0,$ то $y_n(x)$ при $n\le N$ имеет ровно $n-1$ простых нулей, а при $n>N-$ровно $n-2$ простых нулей в интервале $(0,1)$; функции $y_i(x), i=1,2,$ при $\lambda_i\ge 0$ не имеет нулей в интервале $(0,1)$,а при $\lambda_1<0$ могут иметь произвольное число нулей , в интервале $(0,1)$, которые также являются простыми.

Теорема 2. Пусть $-$произвольное натуральное число.Тогда система $\{y_n(x)\}_{n=1,n\neq r}^{\infty}$ образует базис в пространстве $L_p(0,l),\ p\in(1,\infty\ ),$ а при $p=2$ этом базис является базисом Рисса.

Литература

1. Н.Б.Керимов , З.С.Алиев О базисности системы собственных функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии. Дифф.уравнения, 2007, т.43, 7, с. 886-895.

Алиев З.С. (Баку, Азербайджан)
ziyatxanaliyev@yahoo.com

Осцилляционные свойства собственных функции одной вполне регулярной системы Штурма четвертого порядка

Рассмотрим следующая краевая задача

$$\left(p(x)y''(x)\right)'' - \left(q(x)y'(x)\right)' + r(x)y(x) = \lambda\tau(x)y(x), \quad 0 < x < l, \tag{1}$$

$$y'(0)\cos\alpha - (py'')(0)\sin\alpha = 0, \tag{2.a}$$

$$y(0)\cos\beta + Ty(0)\sin\beta = 0, \tag{2.b}$$

$$y'(l)\cos\gamma + (py'')(l)\sin\gamma = 0, \tag{2.c}$$

$$y(l)\cos\delta - Ty(l)\sin\delta = 0, \tag{2.d}$$

где λ -спектральный параметр, $Ty \equiv (py'')' - qy'$, $p(x), q(x), \tau(x)$ строго положительны и непрерывны на $[0,l]$, $p(x)$ имеет абсолютно непрерывную производную, $q(x)$ абсолютно непрерывна на $[0,l]$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ -действительные постоянные, причем $0 \le \alpha,\beta,\gamma,\delta \le \pi/2$.Задача (1),(2) при $q \equiv 0$ исследована в [1]. Из теорем 4[1] и 12.1[2] следует, что собственные значения задачи (1),(2) вещественны и образуют неограниченную последовательность $\lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_n \le ....$, причем существует число m_0 такое, что собственное значение λ_n при $n \ge m_0$ является положительным и простым; собственная функция $y_n(x)$, соответствующая собственному значению λ_n, при $n \ge m_0$ имеет $n-1$ простых нулей в $(0,l)$.

Пусть $\gamma_0 = \inf\{\gamma \in R : r(x) + \gamma\tau(x) > 0,\ x \in [0,l]\}, d_0 = \min\limits_{k\in N} \{\mu_{k+1} - \mu_k\},\ r_1 = \max\limits_{x\in[0,l]}|r(x)|$, $r_0 = \min\limits_{x\in[0,l]}|r(x)|$, где $\mu_k,\ k \in N, -k-oe$ собственное значение впольне регулярной системы Штурма (1),(2) при $r \equiv 0$, все собственные значения которой являются неотрицательными и простыми (см.[3]).

Основным результатом настоящей работы является

Теорема. Собственная функция $y_n(x),\ n = 1,2,...,m_0 - 1$, соответствующая собственному λ_n имеет в точности $n-1$ простых нулей в интервале $(0,l)$. Кроме того, если выполняется условие $(\ r_1 + \gamma_0\ )/\tau_0 < d_0$,то собственные значения $\lambda_1, \lambda_2,.., \lambda_{m_0-1}$ являются простыми.

Литература

1.S.Janczewsky.Oscillstion theorems for the differential boundary value problems of the fourth order. Annals of Mathematics, 1928, v.29, p.521-542.

2. W.Leighton, Z.Nehari. On the oscillation of solutions of self-adjoint linear differential equations of the fourth order. Trans. Amer.Math.Soc.,1958,v.89, p.325-377.

3. D.Banks, G.Kurowski. A Prufer transformation for the equation of a vibrating beam subject to axial forces . J.Diff.Equations, 1977, v.24, N1, p.57-74.

Архипов В.П., Чопчиян А.С., Чопчиян Е.А.(Старый Оскол)

varhipov@inbox.ru

Об одном интегро-дифференциальном уравнении для потенциала

Исследование процесса электродиффузионного переноса двухкомпонентной смеси во внешнем электрическом поле с потенциалом $\Phi(x)$ около ионоселективной мембраны приводит к необходимости рассмотрения двухточечной краевой задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения: с малым параметром μ^2 :

$$\mu^2 \frac{d^2\Phi}{dx^2} = A_1[\Phi] + A_2[\Phi], \qquad \Phi(0) = 0, \Phi(1) = -\Delta\Phi\,, \tag{1}$$

где $A_1[\Phi] = -\gamma_1[C_{11} - \beta_1 J\int\limits_0^x e^{\eta z_1\Phi(x_1)}dx_1]e^{-\eta z_1\Phi(x)}$, $A_2[\Phi] = \gamma_2[C_{22} + \beta_2 J\int\limits_0^x e^{\eta z_2\Phi(x_1)}dx_1]e^{-\eta z_2\Phi(x)}$,

$\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, C_{11}, C_{22}, z_1, z_2, \eta, J, \mu$ - постоянные параметры, определяющие внешние воздействия и внутренние свойства смеси, мембраны и электростатического поля, при этом μ^2 рассматривается в этой задаче как малый параметр([1]).

Для краевой задачи (1) получены определенные (естественные) соотношения, определяющие наличие пограничного слоя, доказана однозначная разрешимость, построено единственное решение $\Phi_0(\mathrm{x})$ вырожденной задачи

$$A_1[\Phi] + A_2[\Phi] = 0, \quad \Phi(0) = 0\,. \tag{2}$$

Ньютоновская линеаризация нелинейных операторов в (1) приводит к линейным интегро-дифференциальным уравнениям, определяющим достаточно быстро сходящийся итерационный процесс для $h_n(x) = \Phi_n(x) - \Phi_{n-1}(x)$:

$$\mu^2 \frac{d^2 h_n}{dx^2} + b_n(x)\cdot h_n(x) + \int\limits_0^x d_n(x,x_1)h_n(x_1)dx_1 = f^n(x), \quad h_n(0) = h_n(1) = 0, \tag{3}$$

где $f^n(x) = -\mu^2 \dfrac{d^2\Phi_{n-1}}{dx^2} + A_1[\Phi_{n-1}] + A_2[\Phi_{n-1}]$, $b_n(x) = \eta z_1 A_1[\Phi_{n-1}] + \eta z_1 A_2[\Phi_{n-1}]$,

$$d_n(x,x_1) = \eta J(\gamma_2 z_2 \beta_2 e^{\eta z_2(\Phi_{n-1}(x_1) - \Phi_{n-1}(x))} - \gamma_1\beta_1 z_1 e^{\eta z_1(\Phi_{n-1}(x_1) - \Phi_{n-1}(x))}).$$

Начальным приближением в (3) является решение задачи (2).

Численная реализация стандартной разностной аппроксимации в (3) позволяет получить хорошие оценки размеров пограничного слоя и значений потенциала вблизи мембраны.

1. Чопчиян А.С., Коржов Е.Н. Математическая модель электродиффузионного переноса электролитов около селективно проницаемой мембраны // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2009 – Т.16, в.1, с. 151-152.

Babayan A.O., (Yerevan, Armenia), **Ali Raeisian S.M.** (Islamic Republic of Iran)
bamenak@gmail.com; s_ma_raissian@yahoo.com

On a numerical solution of the boundary value problem for the complex elliptic equation

Let D be the simply connected domain in a complex plane with smooth boundary $\Gamma = \partial D$. We consider in D the elliptic equation

$$\sum_{k=0}^{N} A_k \frac{\partial^N u}{\partial x^k \partial y^{N-k}} = 0, \qquad (1)$$

where A_k are complex constants ($A_0 \neq 0$). The roots λ_k of the corresponding characteristic equation

$$\sum_{k=0}^{N} A_k \lambda^{N-k} = 0, \qquad (2)$$

satisfy the conditions

$$\lambda_k = \overline{\lambda}_{M+k},\ k = 1,\dots,M,\ \lambda_k \neq \overline{\lambda}_j,\ k,j = 2M+1,\dots,N;\ \Im\lambda_j \neq 0,\ j = 0,\dots,N. \qquad (3)$$

Without loss of generality we suppose, that $\Im\lambda_k > 0$ when $k = 1,\dots,M$. We seek the solution u of the equation (1), which belongs to the class $C^N(D)\bigcap C^{(N-M-1,\alpha)}(D\bigcup\Gamma)$ and on the boundary Γ satisfies the following boundary conditions

$$\frac{\partial^k u}{\partial r^k}\Big|_\Gamma = f_k(x,y), = 0,\dots,M-1,\ (x,y)\in\Gamma, \qquad (4)$$

$$\Re\frac{\partial^k u}{\partial r^k}\Big|_\Gamma = f_k(x,y), = M,\dots,N-M-1,\ (x,y)\in\Gamma. \qquad (5)$$

Here $f_k \in C^{(N-M-k-1,\alpha)}(\Gamma)$ $(k = 0,\dots,N-M-1)$ are prescribed functions on Γ, $0 \le 2M \le N$. If $M = 0$ or $N = 2M$ then the conditions (4) or (5) respectively are missing.

This problem was introduced in [1], where was shown that when D is a unit disc, then this problem is always solvable and the corresponding homogeneous problem has $\left(N-2M\right)^2$ linearly independent (over the field of real numbers) solutions. . The solutions of the homogeneous problem are the purely imaginary polynomials of order $2\left(N-M\right)-2$.

We suppose an effective method for the solution of this problem. This problem reduced to the boundary value problems for the elliptic equations with real coefficients, which may be solved using finite differences method. The realization of this method in the simple case of Bitzadze equation, was carried out in [2].

References

1. A.O.Babayan. On a Boundary Value Problem for an Elliptic Equation in the Unit Disk. Analysis 26, 2, R.Oldenbourg Verlag, München 2006, pp.273-286.
2. A.O. Babayan, S.M.Ali Raeisian. On an effective solution of the Riemann problem for Bitzadze equation. Материалы международного Российско-Болгарского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик-Хабез, 2010г., с. 46-48.

Ватульян А.О. (Ростов-на-Дону)
vatulyan@math.rsu.ru

Коэффициентные обратные задачи

Коэффициентные обратные задачи для линейных операторов – интенсивно развивающийся в последние годы раздел математической физики, посвященный изучению задач нахождения переменных коэффициентов дифференциальных операторов по некоторым следам от решений. Наиболее изучены постановки и методы решения для гиперболических и параболических операторов; что касается эллиптических операторов, то такие задачи изучены недостаточно. Обычно для них рассматриваются две постановки. В первой задаются функции внутри области в некотором наборе точек, во второй в качестве заданных фигурируют граничные значения полевых функций в зависимости от спектрального параметра.

Для первой постановки задача определения коэффициентов приводит к задаче Коши для дифференциального оператора в частных производных первого порядка или интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Главную трудность на этом пути в практическом плане представляет вычисление значений неограниченных операторов от функций, заданных в дискретном наборе точек, а простейшим способом осуществления регуляризации является использование сглаживающих операторов.

Другая постановка, в которой известны лишь граничные поля в некотором частотном диапазоне, гораздо более сложна, в ней требуется определять не только искомые функции-коэффициенты, но функции-компоненты физических полей внутри области. Представлен способ построения нелинейных операторных уравнений с компактными операторами и экономный способ формирования итерационных процессов, основные принципы построения которых опираются на метод линеаризации и слабую постановку исходной задачи. Достоинством предлагаемого подхода при реализации итерационного процесса является то обстоятельство, что он не требует вычисления производных по Фреше от исходных операторов, характерный для традиционной процедуры типа Ньютона. Предлагаемый подход на каждой итерации сочетает процедуру решения прямой задачи, нахождение обратного оператора при известных функциях-коэффициентах и определение функций-поправок при обращении линейных компактных операторов, причем ядра этих операторов определяются через полевые функции, найденные на предыдущей итерации. Регуляризованное обращение операторов первого рода осуществляется на основе метода А. Н. Тихонова, а регуляризованное вычисление градиентов полевых функций, через которые строятся соответствующие ядра, -на основе использования сглаживающих операторов.

При анализе исследуемых постановок выявлены типы граничных условий исходной задачи, для которых задача нахождения коэффициентов является сильно некорректной (искомые функции не могут быть восстановлены в окрестности некоторых точек границ). Представлены модельные примеры реконструкции одномерных функций для различных типов задач.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№10-01-00194-а)и ФЦП " Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 – 2013 годы .

Gadjiev T., Sadykhova N., Aliyev X.
tgadjiev@mail.az

Behaviour of solution degenerate elliptic equations

For linear elliptic and parabolic equations the questions on behavior of solutions near the boundary were studied on the papers of O.A.Oleinik and his followers [1]. For quasilinear equations, similar result were obtained in the T.S.Gadjiev [2]. S.Bonafade [3] and others studied quality properties of solutions for degenerate equations.

We obtained some estimations that are analogies of Saint-Venaut's principle known in theory of elasticity. By means of these estimations we obtained estimations on behavior of solutions and their derivative on bounded domains up to boundary.

In the bounded domain $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$ consider a generalized solution from the Sobolev space $\dot{W}^m_{p,\omega}(\Omega)$ of the Dirichlet problem for the equation

$$\sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}A_{\alpha}\left(x,u,\nabla u,...,\nabla^m u\right)=\sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}F_{\alpha}(x)\ , \qquad (1)$$

where $D^{\alpha}=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$, $m \geq 1$.

Our main goal is to obtain estimations of behavior of the integral of energy $I_\rho=\int\limits_{\Omega_\rho}\omega(x)\left|\nabla^m u\right|^p$, for small ρ, dependent on Ω_ρ geometry of Ω in the vicinity of the point 0.

References

[1] Oleinik O.A., Josifian G.A. Boundary value problems for second order elliptic equations in unbounded domains and Saint-Venant's principle. Ann. Scuola Norm. Super Pisa. Ser. IV, 1977, v.2, pp.269-290.
[2] Gadjiev T.S. On behaviour of solutions of mixed problems for quasilinear elliptic equations. Diff. Uravneniya, 1991, pp.1031-1036 (Russian).
[3] Bonafade S. Quazilinear degenerate elliptic variational inequalities with discontinuous coefficients. Comment. Math. Univ. Carolinae. 1993, 34, No 1. p.55-61.

Глушак А.В., **Примак И.М.** (Белгород)
aleglu@mail.ru

Об одной краевой задаче для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной Герасимова-Капуто

В банаховом пространстве E рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения дробного порядка, содержащего дробную производную Герасимова-Капуто,

$$\partial^{\alpha}u(t)=Au(t), \qquad 0<t<T, \qquad (1)$$

$$\mu\, u(0)-u(T)=u_0. \qquad (2)$$

Дробная производная Герасимова-Капуто $\partial^{\alpha}u(t)$ определяется следующим образом: $\partial^{\alpha}u(t)=D^{\alpha}(u(t)-u(0)),$ где $D^{\alpha}u(t)=\dfrac{d}{dt}I^{1-\alpha}u(t)$ – левосторонняя дробная производная Римана-Лиувилля [1, с. 44], $I^{1-\alpha}u(t)=\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int_0^t\frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau$ – левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

В дальнейшем будем считать допустимой область $G \subset C$, ограниченную кусочно-гладкими кривыми и такую, что для достаточно больших по модулю $\lambda \in G$

$$\arg\lambda \in [\varphi_1, \varphi_2] \cup [\varphi_3, \varphi_4], \qquad -\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2} < \varphi_3 < \varphi_4 < \frac{3\pi}{2}.$$

Оператор A и параметр μ удовлетворяют следующему условию.

Условие 1. Область определения $D(A)$ плотна в E. Существуют допустимая область G, постоянная $M > 0$ и целое число $k \geq -1$, такие, что $\forall \lambda \notin G$ $\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq M(1+|\lambda|)^k$ и, кроме того, $\mu \notin E_\alpha(T^\alpha \bar{G})$.

Определение. Функция $u(t) \in C([0,T],E)$ такая, что $I^{1-\alpha}u(t) \in C^1((0,T),E)$, называется решением задачи (1), (2), если она удовлетворяет уравнению (1) на интервале $(0;T)$ и краевому условию (2).

Теорема. Пусть выполнено условие 1 и $u_0 \in D(A^{k+3})$, тогда функция

$$U(t)u_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} (\lambda I - A)^{-1} u_0 d\lambda,$$

определена на $(0,T)$, имеет на $(0,T)$ непрерывную дробную производную порядка α и является решением краевой задачи (1), (2).

Полученные нами результаты при $\alpha = 1$ превращаются в соответствующие результаты работы [4, с. 62].

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск. Наука и техника. 1987.
2. Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. М.: Физматлит. 1995.

Исраилов С.В., Джабраилов А.Л., Акчаматова Л.Р. (Грозный)

Точки стационарности решений дифференциальных уравнений, связанные с сингулярностями

Система дифференциальных уравнений задается в виде

$$y_i' + \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(x) y_j = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad i = \overline{1,n} \tag{1}$$

где функции $P_{ij}(x)$ при $i \neq j$ непрерывны на $[a,b]$, а при $x = x_i$ имеют сингулярности в смысле работ $[1]$, связанные с неравенствами

$$-P_{ii}(x) \leq \begin{cases} -\overline{\Psi}_{ii}(x), & x \in [a, x_i), \\ \Psi_{ii}(x), & x \in (x_i, b] \end{cases} \tag{2}$$

или

$$-P_{ii}(x) \geq \begin{cases} -\Psi_{ii}(x), & x \in [a, x_i), \\ \overline{\Psi}_{ii}(x), & x \in (x_i, b] \end{cases} \tag{3}$$

где функции $\Psi_{ii}(x)$, $i = \overline{1,n}$, интегрируемы в смысле Римана на соответствующих интервалах, функции $\overline{\Psi}_{ii}(x)$, $i = \overline{1,n}$, для любых $\delta_i \succ 0$, $i = \overline{1,n}$, интегрируемы на $[a, x_i - \delta_i]$, $[x_i + \delta_i, b]$, но

$$\int_{x_i - \delta_i}^{x_i} \overline{\Psi}_{ii}(t) dt = \int_{x_i}^{x_i + \delta_i} \overline{\Psi}_{ii}(t) dt = +\infty, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Далее, функции $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $i = \overline{1,n}$ непрерывны по совокупности аргументов в области $D_i : \{|y_i| \le d_i, \ \ x \in [a, x_i) \cup (x_i, b], i = \overline{1,n}\}$, имеют частные производные $f'_{i,y_i}(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $i = \overline{1,n}$, с такими же свойствами и выполнены в условии

$$\left|f_i(x, y_1, y_2, ..., y_{i-1}, 0, y_{i+1}, ..., y_n)\right| \le \Psi_i(x), \ i = \overline{1,n} \tag{5}$$

$$f'_{i,y_i}(x, y_1, y_2, ..., y_n) \le \begin{cases} -\overline{\Psi}_i(x), & x \in [a, x_i) \\ \Psi_i^*(x), & x \in (x_i, b] \end{cases} \tag{6}$$

или

$$f'_{i,y_i}(x, y_1, y_2, ..., y_n) \ge \begin{cases} -\Psi_i^*(x), & x \in [a, x_i) \\ -\overline{\Psi}_i(x), & x \in (x_i, b] \end{cases} \tag{7}$$

где функции $\Psi_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, интегрируемы на $[a,b]$, $\Psi_i^*(x), i = \overline{1,n}$, такие же на $[a, x_i)$, $(x_i, b]$, а функции $\overline{\Psi}_i(x)$ обладают свойствами функций $\overline{\Psi}_{ii}(x)$ из (2),(3). Пусть $t_i, s_i, i = \overline{1,n}$, некоторые точки из $[a,b]$, причем $t_i \in [a, x_i)$, $s_i \in (x_i b], i = \overline{1,n}$, $\det\left(P_{ij}(t_i)\right)_{i,j=1}^n \ne 0$, $\det\left(P_{ij}(s_i)\right)_{i,j=1}^n \ne 0$. Тогда при определенных ограничениях на числа $d_i, i = \overline{1,n}$, доказываются теоремы существования решений $y_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, удовлетворяющих условиям

$$y_i(x_i) = 0, i = \overline{1,n}, \qquad y'_i(t_i) = 0, i = \overline{1,n} \tag{8}$$

$$y_i(x_i) = 0, i = \overline{1,n}, \qquad y'_i(s_i) = 0, i = \overline{1,n} \tag{9}$$

Литература

1. Исраилов С.В., Юшаев С.С. многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Нальчик, издательство «Эль-Фа», 2004, с.445.

Исраилов С.В., Сагитов А.А., Гагаева Х.Л. (Грозный)

Сингулярности в дифференциальных уравнениях, порождающие точки стационарности решений.

Считается, что в системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y'_i + \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(x) y_j = f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n), \quad i = \overline{1,n} \tag{1}$$

функции $P_{ij}(x)$ при $i \ne j$ непрерывны на сегменте $[a,b]$, а функции $P_{ii}(x), i = \overline{1,n}$ при $x = x_i$ имеют сингулярности в смысле работы $[1]$, связанные с выполнением неравенств

$$P_{ii}(x) sign(x - x_i) \le -\overline{\Psi}_{ii}(x), \ x \in [a, x_i) \cup (x_i, b], \ i = 1,2,..., \tag{2}$$

где для любого $\delta_i \succ 0$ функции $\overline{\Psi}_{ii}(x)$ интегрируемы на отрезках $[a, x_i - \delta_i]$, $[x_i + \delta_i, b]$ в смысле Римана, но

$$\int_{x_i - \delta_i}^{x_i} \overline{\Psi}_{ii}(t) dt = \int_{x_i}^{x_i + \delta_i} \overline{\Psi}_{ii}(t) dt = +\infty, \quad i = \overline{1,n} \tag{3}$$

Функции $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $i = \overline{1,n}$ непрерывны по совокупности аргументов в области $D_i : \{|y_i| \le d_i, \ \ x \in [a, x_i) \cup (x_i, b], i = \overline{1,n}\}$, и удовлетворяют условиям

$$\left|f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)\right| \le \Psi_i(x), \ i = \overline{1,n} \tag{4}$$

где функции $\Psi_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, интегрируемы на сегменте $[a,b]$ в смысле Римана. Пусть $t_i \in [a,x_i)$, $s_i \in (x_i b]$, $i=\overline{1,n}$ и функции $f_i(x,y_1,y_2,...,y_n)$ определены при $x=t_i$, $x=s_i$, $i=\overline{1,n}$, причем $\det\left(P_{ij}(t_i)\right)_{i,j=1}^n \neq 0$, $\det\left(P_{ij}(S_i)\right)_{i,j=1}^n \neq 0$. Тогда при определенных ограничениях на числа d_i, $i=\overline{1,n}$, из области D_i система (1) имеет по крайней мере одно непрерывное на $[a,b]$ решение $y_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ непрерывно дифференцируемые при $x \in [a,x_i) \cup (x_i,b]$, удовлетворяющее условиям

$$y_i(x_i)=0, \quad y_i'(t_i)=y_i'(s_i)=0, \ i=\overline{1,n} \tag{5}$$

Приводится еще теорема единственности переопределенной краевой задачи (1),(5), когда функции f_i в области D_i удовлетворяет условиям Липшица.

Литература

1. Исраилов С.В., Юшаев С.С. многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Нальчик, издательство «Эль-Фа», 2004, с.445.

Дубатовская М.В., Рогозин С.В. (Минск, Беларусь)
dubatovska@bsu.by

Эффективная проводимость двумерных композиционных материалов с эллиптическими включениями

Работа посвящена исследованию эффективной (макроскопической) проводимости двумерной многофазной гетерогенной среды (двумерного композиционного материала), разделенной конечным числом софокусных эллипсов

$$L_k=\left\{(x,y): x=\left(r_k\sqrt{\alpha}+\frac{\sqrt{\alpha}}{r_k}\right)\cos\theta,\ y=\left(r_k\sqrt{\alpha}-\frac{\sqrt{\alpha}}{r_k}\right)\sin\theta\right\},$$

$$0<\alpha<1, 1<r_1<\ldots<r_n=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \quad k=1,\ldots,n, \quad z=x+iy\in\mathbf{C}.$$

Рассматривается установившийся потенциальный тепловой поток, проходящий через указанную среду, в случае, когда источник постоянной интенсивности расположен в бесконечно удаленной точке. Компоненты среды содержат материалы различной проводимости. Предполагается, что переход потока из одной компоненты в другую удовлетворяет условию идеального контакта.

Применяемый метод обобщает подход, предложенный в недавней работе [1], а также аналитические методы исследования проводящих свойств композиционных материалов, описанные в [2-3]. Метод комплексных потенциалов позволяет получить представление модели в форме конечного числа краевых задач **R**-линейного сопряжения для аналитических функций на системе областей, ограниченных эллипсами. С помощью конформного отображения данные задачи сводятся к семейству краевых задач на системе круговых колец, решения которых необходимо допускают аналитическое продолжение вплоть до общего разреза, на котором выполняется специальное условие симметрии. Для таких решений получено интегральное представление, с помощью которого исследуемая задача сводится к системе функциональных уравнений. Решение последних построено (см. [4]) в форме рядов с суммированием по группе симметрий, порожденной системой окружностей. Предложена формула эффективной проводимости среды.

Работа выполнена при частичной поддержке Белорусского Республиканского Фонда Фундаментальных Исследований, грант Ф10МС-024.

Литература.

1. Mityushev V.V. Conductivity of a two-dimensional composite containing elliptical inclusions. – Proc. R. Soc. A. - 2009, 465. - P. 2991-3010.
2. Mityushev V.V., Pesetskaya E.V., Rogosin S.V. Analytical Methods for Heat Conduction in Composites and Porous Media / Ch. 5 in: “Thermal Properties of Cellular and Porous Materials” (A. .Ochsner, G. Murch, and M. de Lemos eds.). Amsterdam: WILEY-VCH. - 2008. - P. 124-167.
3. Обносов Ю.В. Краевые задачи теории гетерогенных сред: многофазные среды, разделенные кривыми второго порядка. – Казань: Казанский государственный университет, 2009.
4. Mityushev V.V., Rogosin S.V. Constructive Methods for Linear and Nonlinear Boundary Value Problems for Analytic Functions: Theory and Applications. Boca Raton - London: Chapman & Hall/CRC Press. - 1999.

Зеленков Г.А., Лопатин А.С. (Новороссийск)
mathshell@mail.ru

Исследование робастного поведения комплексных интервальных полиномов графическим методом.

Как известно, теорема Харитонова обобщена на семейство интервальных полиномов с комплексными коэффициентами. Ниже предлагается графический аналог этой теоремы для исследования как устойчивости, так и классов неустойчивости.

Определение 1. Полином степени n с вещественными или комплексными коэффициентами, не имеющий нулевых и чисто мнимых корней $f(s) = a_0 + a_1 s + ... + a_n s^n$, $a_0 \neq 0, a_n \neq 0$ принадлежит классу *(n,k)*-эквивалентности, если k его корней, с учетом их кратности, лежат в правой полуплоскости. Такие полиномы при k =0 называют устойчивыми.

Рассмотрим интервальное семейство полиномов с комплексными коэффициентами

$$\Phi(s) = \left\{ \begin{array}{c} f(s) = A + A_0 s + ... + A_n s^n,\, A_i = a_i + jb_i, \\ \left| a_i - a_i^0 \right| \le \gamma\alpha_i, \left| b_i - b_i^0 \right| \le \gamma\beta_i,\, \alpha_i \ge 0,\, \beta_i \ge 0,\, i = \overline{0,n},\, \sum_{i=0}^{n} (\alpha_i + \beta_i) > 0. \end{array} \right\}$$

(1)

Рассмотрим номинальный годограф при $-\infty < \omega < +\infty$:

$$f_0(j\omega) = g_0(\omega) + jh_0(\omega)$$

(2)

$$g_0(\omega) = a_0^0 - b_1^0\omega - a_2^0\omega^2 + b_3^0\omega^3 + a_4^0\omega^4 - ...,\; h_0(\omega) = b_0^0 + a_1^0\omega - b_2^0\omega^2 - a_3^0\omega^3 + b_4^0\omega^4 + ...$$

(3)

Кроме того, для номинально годографа (2) введем нормировочные функции:

$$R(\omega) = \alpha_0 + \beta_1|\omega| + \alpha_2\omega^2 + \beta_3|\omega|^3 + \alpha_4\omega^4 + ...,\; T(\omega) = \beta_0 + \alpha_1|\omega| + \beta_2\omega^2 + \alpha_3|\omega|^3 + \beta_4\omega^4 + ...$$

(4)

Определение 2. Назовем при $\alpha_0 > 0, \beta_0 > 0, \alpha_n > 0, \beta_n > 0$ функцию

$$Z_0(\omega) = g_0(\omega) / R(\omega) + jh_0(\omega) / T(\omega) = x_0(\omega) + jy_0(\omega)$$

(5)

определенную на всей вещественной оси, сложным нормированным номинальным годографом или кратко - сложным годографом.

Теорема. Для принадлежности классу (n,k)– эквивалентности комплексного интервального полинома $\Phi(s)$ при $\alpha_0 > 0, \beta_0 > 0,\quad \alpha_n > 0, \beta_n > 0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:

1. $\max((a_0^0)^2 - (\gamma\alpha_0)^2,\ (b_0^0)^2 - (\gamma\beta_0)^2) > 0,\ \max((a_n^0)^2 - (\gamma\alpha_n)^2,\ (b_n^0)^2 - (\gamma\beta_n)^2) > 0.$

2. Сложный годограф $Z_0(\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ проходит против часовой стрелки ровно $n-2k$ полуоборотов и не пересекает квадрат с вершинами $(\pm\gamma; \pm\gamma)$.

Условие 1 теоремы необходимо, чтобы коэффициенты A_0, A_n всех полиномов семейства $\Phi(s)$ не обращались в ноль. Кроме того, в отличие от вещественного случая сложный годограф $Z(\omega)$, хотя и является ограниченным, но знать его поведение при $0 \le \omega < +\infty$ не достаточно. k - радиус робастного поведения $\gamma_{\max}^k$ вычисляется по формуле:

$$\gamma_{\max}^k = \min(\gamma^*, \gamma_\infty), \gamma_\infty = \max\left(\left|a_n^0\right| / \alpha_n, \left|b_n^0\right| / \beta_n\right),$$

(6)

$(\pm\gamma^*; \pm\gamma^*)$ - наибольший квадрат с центром в нуле, вписанный в этот годограф.

Литература:

1. *Зеленков Г.А., Дикусар В.В., Зубов Н.В.* Методы анализа робастной устойчивости и неустойчивости. М.: ВЦ РАН, 2007. – 234 с.

2. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление – М.: Наука, 2002. – 303 с.

Лопатин М.С., Зеленков Г.А. (Новороссийск)
mathshell@mail.ru

Системы релейной стабилизации с минимальным числом управляющих воздействий.

Предлагается решение задачи релейной стабилизации - определения минимального числа управляющих воздействий (входов), при которых тривиальное решение этой системы можно сделать асимптотически устойчивым. Получены конструктивные условия существования асимптотически устойчивых периодических колебаний в этой системе, имеющих два переключения и стабилизирующих ее расчетный режим.

Для простоты изложения рассмотрим замкнутую линейную стационарную управляемую систему

$$\dot{X} = AX + BU, \qquad (1)$$

где постоянную матрицу B размера $(n \times r)$ ($B \in R^{n\times}$) можно выбрать надлежащим образом.

Поставим задачу поиска минимального числа p управляющих воздействий (задачу поиска матрицы B минимального ранга), при которых можно построить линейный закон управления относительно фазовых переменных $U = KX$, $K \in R^{p\times n}$ так, чтобы тривиальное решение системы

$$\dot{X} = AX + BKX \qquad (2)$$

было асимптотически устойчивым, т.е. чтобы все собственные числа матрицы $A + BK$ лежали в левой полуплоскости.

Определение 1. Назовем характеристикой линейной стабилизации системы (1) минимальное число p управляющих воздействий, при котором существует матрица B полного ранга ($B \in R^{n\times p}$) такая, что для нее всегда можно построить линейный закон управления относительно фазовых переменных $U = KX$, $K \in R^{p\times n}$ так, чтобы тривиальное решение системы (2) было асимптотически устойчивым, т.е. чтобы все собственные числа матрицы $A + BK$ лежали в левой полуплоскости.

Определение 2. Характеристикой полной управляемости системы (1) называется минимальное число управляющих воздействий, при которых эту систему можно сделать полностью управляемой, путем выбора соответствующей матрицы B полного ранга. Иногда, для краткости, говорят о характеристике полной управляемости матрицы A.

Теорема 1. Характеристика полной управляемости матрицы A совпадает с максимальной геометрической кратностью ее собственных чисел.

Теорема 2. Характеристика линейной стабилизации системы (1) совпадает с максимальной геометрической кратностью собственных чисел матрицы A не принадлежащих левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda_i \geq 0$.

Литература.

1. Балахин П.А., Зеленков Г.А., Зубов Н.В., Стрекопытова М.В. Задача определения минимального числа выходов. Материалы международной математической конференции «Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям». Тезисы докладов. Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2010.
2. Зеленков Г.А., Зубов Н.В., Черноглазов Д.Г. Скалярные системы релейной стабилизации. Труды Института системного анализа РАН «Динамика неоднородных систем». Выпуск 49(1). М.: ЛКИ, 2010. с.28-33.

Искендеров Б.А., Алиева Г.Х.
balaiskenderov07@rambler.ru

Асимптотическое разложение при больших значениях времени решения задачи Коши для уравнения Соболева

При изучении динамики акустических, поверхностных и внутренних волн были введены уравнения, которые относятся к уравнениям типа Соболева. Задача Коши и смешанные задачи для таких уравнений изучены многими авторами.

В данной работе получено асимптотическое разложение при $t \to +\infty$ решения задачи Коши для одного уравнения типа Соболева.

Обозначим через $R_{n+m}(x,y)$ $n+m$-мерное евклидово пространство с точкой $(x,y)=(x_1,...,x_n,y_1,...y_m)$.

Рассмотрим в $R_{n+m}(x,y)$ следующую задачу Коши

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta_{n+m}u(t,x,y)+\Delta_n u(t,x,y)=0\,, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(t,x,y)\big|_{t=0}=\varphi(x,y), \tag{2}$$

где Δ_{n+m}-оператор Лапласа по (x,y). При определенных условиях на начальную функцию $\varphi(x)$ доказано, что для решения задачи Коши (1)-(2) при $t \to +\infty$ имеет место оценка

$$u(x,y,t)=O\left(t^{-\frac{n}{2}}\right)$$

равномерно по (x,y) в каждом компакте из R_{n+m}.

Если $\varphi(x)$ удовлетворяет конечному числу условиям ортогональности

$$\int\limits_{R_n} x_1^{S_1}x_2^{S_2}...x_n^{S_n}\phi(x)\,dx=0, \qquad 0\leq|S|=S_1+S_2+...+S_n\leq N,\ S_j\geq 0,\ j=1,2,...,n,$$

то $$u(x,y,t)=O\left(t^{-\frac{3}{2}-N}\right)$$

равномерно по (x,y) в каждом компакте из R_{n+m}.

Калитвин А.С. (Липецк)
kalitvin@mail.ru

О применении уравнений Вольтерра с частными интегралами к изучению интегро-дифференциальных уравнений Барбашина

Рассматривается линейное интегро-дифференциальное уравнение Барбашина (ИДУБ)

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = c(t,s)x(t,s) + \int_S k(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + f(t,s), \qquad (1)$$

где S – множество конечной или σ - конечной лебеговой меры в R^n, $(t,s) \in [a,b] \times S = D$, $a(t,s), k(t,s,\sigma)$ и $f(t,s)$ – заданные измеримые на $D, D \times S$ и D соответственно функции, а интеграл понимается в смысле Лебега. При $S = [c,d]$ начальные и краевые задачи для ИДУБ (1) изучались в [1], причем постановка задач и свойства заданных в ИДУБ (1) функций приводят к различному пониманию решения этого уравнения.

В данной работе ИДУБ (1) изучается с начальным условием $x(t_0,s) = \varphi(s)$, где заданная функция $\varphi(s)$ измерима на S. Предполагается, что решение задачи допускает представление

$$x(t,s) = \int_{t_0}^{t} y(\tau,s)d\tau + \varphi(s), \qquad (2)$$

где функция $y(t,s)$ измерима по совокупности переменных и непрерывна по t при каждом фиксированном s. В этом случае $\partial x(t,s)/\partial t = y(t,s)$. Если, дополнительно, функция $y(t,s)$ принадлежит пространству $C(L^p)$ непрерывных на $[a,b]$ вектор-функций со значениями в $L^p = L^p(S)$ $(1 \le p \le \infty)$ и при каждом $t \in [a,b]$ интегральный оператор $(K(t)y)(s) = \int_S |k(t,s,\sigma)| y(\sigma)d\sigma$ действует в L^p, то подстановка (2) в (1) приводит задачу Коши для ИДУБ (1) к уравнению Вольтерра с частными интегралами

$$y(t,s) = \int_{t_0}^{t} c(t,s)y(\tau,s)d\tau + \int_{t_0}^{t}\int_S k(t,s,\sigma)y(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + g(t,s) \equiv (Ay)(t,s) + g(t,s), \qquad (3)$$

где $y(t,s) = f(t,s) + c(t,s)\varphi(s) + \int_S k(t,s,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma$.

Задача Коши для ИДУБ (1) и уравнение (3) равносильны в том смысле, что их решения связаны равенством (2). Однозначная разрешимость уравнения (3) вытекает из обращения в нуль спектрального радиуса некомпактного оператора Вольтерра A с частными интегралами. Условия равенства нулю спектрального радиуса более общих классов линейных операторов Вольтерра с частными интегралами в различных пространствах содержатся в [2,3].

Литература

1. Appell J. M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. – New York: Marcel Dekker, 2000. – 560 p.

2. Калитвин А. С. Линейные операторы с частными интегралами. – Воронеж: ЦЧКИ, 2000. – 252 с.

3. Калитвин А. С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами. – Липецк: ЛГПУ, 2006. – 177 с.

Калитвин В.А. (Липецк)
kalitvin@gmail.com

О численном решении уравнений Вольтерра с частными интегралами

Рассматривается интегральное уравнение Вольтерра с частными интегралами

$$x(t,s)=\int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau+\int_a^t\int_c^s n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma+f(t,s)\equiv(Kx)(t,s)+f(t,s), \qquad (1)$$

где $t\in[a,b]$, $s\in[c,d]$, а $l(t,s,\tau), n(t,s,\tau,\sigma)$ и $f(t,s)$ – заданные непрерывные по совокупности переменных функции.

Уравнение (1) обратимо в пространстве непрерывных на $[a,b]\times[c,d]$ функций и его единственное решение можно найти методом итераций. Явное решение уравнения (1) удается найти в редких случаях. Поэтому важное значение имеет численное решение этого уравнения. Применение же к уравнению (1) известных численных методов решения интегральных уравнений требует осторожности и обоснования, так как при построении соответствующих численных схем обычно используется компактность интегральных операторов, которой нет у оператора K с ненулевым ядром $l(t,s,\tau)$. В частности, требуется изучение условий, обеспечивающих возможность применения метода механических квадратур для численного решения уравнения (1), основанного на замене интегралов по квадратурным и кубатурным формулам. Такие условия содержит приводимая ниже теорема.

При численном решении уравнения (1) отрезки $[a,b]$ и $[c,d]$ разобъем на части точками
$t_p=a+ph\ (p=0,1,\ldots,P,\ a+Ph\le b<(P+1)h)$,
$s_q=c+qg\ (q=0,1,\ldots,Q, c+Qg\le d<(Q+1)g)$. Полагая в (1) $t=t_p$, $s=s_q$ и заменяя первый интеграл по квадратурной формуле $\int_a^{t_p} l(t_p,s_q,\tau)x(\tau,s_q)d\tau=h\sum_{i=0}^{p}\alpha_{pi}l_{pqi}x(t_i,s_q)+r_{pq}$ с узлами в точках $t=t_p$ и $s=s_q$, а второй интеграл по кубатурной формуле $\int_a^{t_p}\int_c^{s_q} n(t_p,s_q,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma=hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q}\gamma_{pqij}n_{pqij}x(t_i,s_j)+\bar r_{pq}$, где $l_{pqi}=l(t_p,s_q,t_i)$, $n_{pqij}=n(t_p,s_q,t_i,s_j)$, а r_{pq} и $\bar r_{pq}$ - остатки этих формул, приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $x(t_i,s_j)\ (i=0,1,\ldots,P;\ j=0,1,\ldots,Q)$. Отбрасывая в этой системе остатки, получим систему уравнений для приближенных значений x_{p0}, x_{pq} функции x в точках $(t_p,s_0), (t_p,s_q)$

$$x_{p0}=h\sum_{i=1}^{p}\alpha_{pi}l_{p0i}x_{i0}+f_{p0}+\delta_{p0},\ x_{pq}=h\sum_{i=1}^{p}\alpha_{pi}l_{pqi}x_{iq}+hg\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\gamma_{pqij}n_{pqij}x_{ij}+f_{pq}+\delta_{pq} \qquad (2)$$

$(p=1,\ldots,P;\ q=1,\ldots Q)$, где $f_{p0}=f(t_p,s_0)$, $f_{pq}=f(t_p,s_q)$, а δ_{p0} и δ_{pq} - погрешности, с которыми будут выполняться при вычислениях уравнения для x_{p0} и x_{pq}.

Теорема. Пусть в квадратурной и кубатурной формулах остатки стремятся к нулю равномерно относительно p,q при $h,g\to 0, |\alpha_{pi}|\le A<\infty, |\gamma_{pqij}|\le B<\infty$ и погрешности вычислений стремятся к нулю равномерно относительно p,q при $h,g\to 0$. Тогда при всех достаточно малых h и g приближенное решение $x_{pq}\ (p=0,1,\ldots,P;\ q=0,1,\ldots,Q)$ может быть найдено по формулам (2), причем для любого заданного $\varepsilon>0$ существуют такие h_0 и $g_{0,}$ что при $h<h_0$ и $g<g_0$ $|x_{pq}-x(t_p,s_q)|<\varepsilon\ (p=0,1,\ldots,P;q=0,1,\ldots,Q)$.

Колпакова Е.В. (Новороссийск)
evge.kolpakova@yandex.ru

О существовании обобщенного собственного спектра бигармонического оператора

Рассматривается вопрос существования обобщенных собственных функций и дискретного обобщенного собственного спектра бигармонического оператора для краевых задач с шарнирным закреплением края в моделях Маргерра-Власова колебаний пологих оболочек [1]. Для следующей краевой задачи на собственные значения для бигармонического оператора

$$\Delta^2\xi = \lambda\xi\,,\ \xi|_{\Gamma} = \left.\left(\frac{d^2\xi}{dn^2} - \mu\chi\frac{d\xi}{dn}\right)\right|_{\Gamma} = 0\,.$$

в [2] доказана теорема существования дискретного собственного спектра при условии, что граница области, на которую проектируется оболочка, класса C^3 и имеет ограниченные четвертые производные. В данной работе удалось ослабить условия на гладкость границы области путем рассмотрения обобщенного собственного спектра. При этом обобщенные собственные функции бигармонического оператора с краевыми условиями шарнирного закрепления края оболочки определены как функции $\xi \in \widetilde{H}_2^2(\Omega,\mu)$, удовлетворяющие условиям шарнирного закрепления края и соотношению

$$\int_{\Omega}\Delta\xi\Delta\xi' dx - \int_{\Gamma}\chi(\mu+1)\frac{d\xi}{dn}\frac{d\xi'}{dn}ds = \lambda\int_{\Omega}\xi\xi' dx\,,$$

при любом $\xi' \in \widetilde{H}_2^2(\Omega,\mu)$.

Теорема. Пусть граница области Ω $\Gamma \in C^2$. Тогда данная краевая задача имеет обобщенный дискретный спектр $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots \le \lambda_l \le \ldots$ из счетного числа стремящихся к бесконечности положительных обобщенных собственных значений, каждому из которых соответствует лишь конечное число линейно независимых обобщенных собственных функций ξ_l. Обобщенный собственные функции ξ_l, $l = 1, 2, \ldots$, образуют полную ортонормированную систему в $L_2(\Omega)$ и полную ортогональную систему в $\widetilde{H}_2^2(\Omega,\mu)$.

Литература.

1. Ворович И.И.//Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1957. Т.21. №6. С. 747-784.
2. Колпакова Е.В., Давтян Д.Б., Седенко В.И.// Изв. ВУЗов. Сев.-Кав. регион. Ест. науки. 2008. № 3. С. 13-14.

Комиссарова Д.А. (Челябинск)
dasha@math.susu.ac.ru

Достаточные условия устойчивости линейных разностных уравнений

Рассмотрим линейное разностное уравнение порядка k

$$x_n = x_{n-1} - \sum_{i=1}^{k} a_i x_{n-i}, \tag{1}$$

где $k \in N$, $a_i \in R$ $(1 \le i \le k)$.

Теорема 1. Если $a_i \ge 0$ $(1 \le i \le k)$ и

$$0 < \sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{2\sin\frac{\pi}{2(2i-1)}} < 1, \tag{2}$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Теорема 1 не означает, что условие (2) является необходимым для устойчивости уравнения (1). Теорема 1 определяет симплекс, являющийся подмножеством области устойчивости уравнения (1).

Доказана невозможность увеличения хотя бы одного из знаменателей в неравенстве (2) с сохранением устойчивости уравнения (1).

Как следствие теоремы 1 можно получить еще более простой признак устойчивости уравнения (1).

Теорема 2. Если $a_i \geq 0 \ \ (1 \leq i \leq k)$ и

$$0 < \sum_{i=1}^{k} i a_i \leq \frac{\pi}{2}, \tag{3}$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Теорема 2 является аналогом результата, полученного Вагиной и Кипнисом [1] относительно дифференциальных уравнений.

Константа $\pi/2$ в правой части неравенства (3) неулучшаема. Однако если допустить, чтобы правая часть в неравенстве (3) зависела от порядка уравнения k, то получим следующий признак асимптотической устойчивости уравнения (1).

Теорема 3. Если $a_i \geq 0 \ \ (1 \leq i \leq k)$ и

$$0 < \sum_{i=1}^{k} i a_i < 2k \sin \frac{\pi}{2(2k-1)}, \tag{4}$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Правая часть неравенства (4) также неулучшаема.

Литература

1. Вагина, М.Ю. Устойчивость нулевого решения дифференциального уравнения с запаздываниями / М.Ю. Вагина, М.М. Кипнис // Мат. заметки. - 2003. - Т. 74, вып. 5. - С. 786-789.
2. Kipnis, M.M. A note on explicit stability conditions for autonomous higher order difference equations / M.M. Kipnis, D.A. Komissarova // J. Difference Equ. Appl. - 2007. - V. 13, № 5. - P. 457-461.

Кряквин В.Д. (Ростов-на-Дону)
vadkr@math.rsu.ru

Псевдодифференциальные операторы в пространствах Гельдера-Зигмунда: фредгольмовость, обратимость

В докладе рассматриваются ограниченные псевдодифференциальные операторы с символами из класса Л. Хермандера в классических пространствах Гельдера-Зигмунда функций, определенных на n-мерном пространстве. Обсуждаются условия компактности и нетеровости (фредгольмовости) этих операторов, их характеризация. Установлено, что обратный оператор к псевдодифференциальному в этих пространствах является псевдодифференциальным.

Кудрявцев О.Е. (Ростов-на-Дону)
koe@donrta.ru

Приближенная факторизация Винера-Хопфа в задачах финансовой математики

В настоящее время процессы Леви используются при моделировании различных естественных явлений, таких как диффузия потоков в пористых средах и плазме, лазерное охлаждение, молекулярные столкновения, долговременные изменения климата, движение молекул в разреженном газе, помехи при телефонной связи. Последние два десятилетия негауссовы модели Леви активно используются и в финансовой математике. Ценообразование различных видов производных финансовых инструментов (опционов) является приоритетным направлением в этой области. С математической точки зрения цена опциона – это функционал от моделирующего процесса, вычисление которого в случае моделей Леви сводится к решению задач для специального класса интегро-дифференциальных уравнений с частными производными. В ходе решения, возникает необходимость многократного решения следующего типа уравнений, зависящих от положительного параметра $q > 0$.

$$q^{-1}(q-L)f(x) = G(x), \quad x > h; \qquad (1)$$

$$f(x) = 0, \quad x \le h, \qquad (2)$$

где $h \in R$, $G(x)$ – ограниченная функция, $G(x) \to 0, x \to +\infty$, L – инфинитезимальный генератор процесса Леви.

Напомним, что генератор L допускает представление в виде интегро-дифференциального оператора:

$$Lf(x) = \frac{\sigma^2}{2} f''(x) + \mu f'(x) + \int_R (f(x+y) - f(x) - f'(x) y \cdot I_{[-1;1]}(y)) F(dy),$$

где $\sigma \ge 0$, $\mu \in R$ – константы, а $F(dx)$ – мера на $R \setminus \{0\}$, удовлетворяющая свойству $\int_{R\setminus\{0\}} \min(1, x^2) F(dx) < \infty$. Параметр σ^2 называется гауссовским коэффициентом, а мера $F(dx)$ – мерой Леви.

В докладе предлагается универсальный и с вычислительной точки зрения эффективный численный метод решения задач (1) – (2), см. [1,2]. Метод основан на численной факторизации Винера-Хопфа, по простоте реализации близок к конечно-разностным схемам, но существенно выигрывает в скорости и точности. Основная идея заключается в том, что символ обратного оператора к $q^{-1}(q-L)$ является символом безгранично делимого распределения. При построении приближенной факторизации мы опираемся на хорошо известную теорему о том, что характеристическая функция каждого безгранично делимого распределения может быть записана как предел последовательности конечного числа произведений характеристических функций пуассоновского типа. Действие факторов Винера-Хопфа на функции эффективно реализуется с помощью быстрого преобразования Фурье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Kudryavtsev O.E., Levendorskii S.Z.*, Fast and accurate pricing of barrier options under Levy processes, Finance Stoch. 2009. V. 13, №.4.-P.531-562.

[2] *Кудрявцев О.Е.,* “Вычисление цен барьерных и американских опционов в моделях Леви”, Обозрение прикладной и промышленной математики.-2010.-Т17,№2.-С.210-220.

Левенштам В.Б. (ЮФУ, Ростов-на-Дону; ЮМИ, Владикавказ)
vleven@math.rsu.ru

Асимптотическое интегрирование одной задачи в критическом случае

В работах [1,2] построены и обоснованы полные асимптотики решения задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка и фундаментальной матрицы решений нормальной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Указанные уравнения содержат высокочастотные слагаемые, причем некоторые (плавные и высокочастотные) слагаемые пропорциональны определенным положительным степеням частоты – большие слагаемые. Существенно, что в данных работах рассмотрена в определенном смысле нерезонансная ситуация. В докладе речь пойдет об асимптотическом интегрировании описанных задач (и его обосновании) в резонансном случае.

Литература

1. Крутенко Е.В., Левенштам В.Б. Асимптотика решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с большими слагаемыми // Сиб. матем. журн. 2010. Т.51, №1. С.74-89.
2. Крутенко Е.В., Левенштам В.Б.Асимптотический анализ некоторых системлинейных дифференциальных уравнений с большим параметром // Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 2009. Т.49, №12 . С. 2144-2155.

Николенко П.В. (Ростов-на-Дону)
ppdominikl@mail.ru

Поиск оптимального производственного задания при известной функции поставки ресурса

Пусть на предприятии имеется n технологических линий, $x_i(t)$ – результат работы i-й линии к моменту t, тогда $C_i x_i(t)$ – доход, $x_i'(t) = u_i(t)$ – интенсивность. При этом вектор $u(t)$ удовлетворяет следующему условию: $u(t) \in M$, где $M = \{u : u \geq 0, Au \leq b\}$, M - выпуклый многогранник, структура которого определяется спецификой производства. Имеется оптимальный стационарный режим работы u_0, являющийся решением задачи $z = cu \to max, u \in M$. При этом все используемые ресурсы должны поступать в необходимых количествах. Рассмотрим случай, когда скорость поступления ресурса выше скорости его потребления при оптимальном стационарном режиме, а возможности накапливать ресурс невелики. В этих условиях придётся отказаться от оптимального стационарного режима работы и искать функцию интенсивностей $u(t)$, которая с одной стороны позволит использовать поступающий ресурс, с другой стороны принесёт максимально большой доход.

Пусть известен график поставки ресурса. Функция $\tilde{\varphi}(t)\ (t \in [0,T])$ – количество ресурса, имеющегося в момент времени t. Будем считать, что $\tilde{\varphi}(0) > 0$, $\tilde{\varphi}' > 0$, $\tilde{\varphi}''$ - знакоопределена. Пусть предприятие может накопить ресурс в количестве не большем, чем S_0, тогда процесс производства протекает так, что выполнено следующее условие $\tilde{\varphi}(t) - \sum k_i x_i(t) \leq S_0$.

Запишем нашу задачу, как задачу оптимального управления. Обозначим $\varphi(t) = \tilde{\varphi}(t) - S_0$. Введём время, как дополнительную фазовую переменную. Получаем следующее

$I(u) = -\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(T) = -\int_0^T Cu(\tau)d\tau \to min$; $\dot{x_i} = u_i$, i =1, … , n ; $\dot{x}_{n+1} = 1$;
$g(x, x_{n+1}) = -kx + \varphi(x_{n+1}) \leq 0$; $S = \{x \in R^{n+1} | x_{n+1} = T\}$, $x^0 = 0$

Рассматриваются управления, переводящие точку x^0 на многообразие S так, что траектория x(t) лежит в области $G = g^{-1}((-\infty, 0])$. Среди этих управлений надо выбрать то, на котором функционал I принимает минимальное значение. Удаётся построить единственное управление u(t), для которого выполнены необходимые условия оптимальности (см. главу 6 [1]). Например, в случае когда функция поставок такова, что $\tilde{\varphi}'' < 0$, $\tilde{\varphi}(0) > S_0$, $\tilde{\varphi}'(T) < ku_0$ скорость поставки ресурса к окончанию срока ниже скорости потребления при оптимальном стационарном режиме управление u(t) выглядит следующим образом. Пусть $\tilde{\varphi}'(t_0) = ku_0$, тогда для $t \in [0, t_0]$ u(t) – решение следующей задачи: $z = cu \to max, u \in M, ku = \tilde{\varphi}'(t)$; для $t \in [t_0, T]$ $u(t) \equiv u_0$.

Литература

Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов. Москва, 1976 г.

Рогозин С.В. (Минск, Беларусь)
rogosinsv@gmail.com

Роль С.Г.Самко в становлении теории дифференциальных уравнений дробного порядка

В докладе дан обзор результатов исследований Стефана Григорьевича Самко по различным направлениям современного анализа:
- разрешимость и построение решений в замкнутой форме сингулярных интегральных уравнений и соответствующих краевых задач;
- разрешимость и построение решений в замкнутой форме особых интегральных уравнений со слабыми особенностями (в том числе, интегральных уравнений Абеля и их обобщений);
- разрешимость интегральных уравнений типа свертки;
- исследование свойств интегральных операторов (в том числе, операторов типа потенциала) в функциональных пространствах;
- интегралы и производные дробного порядка;
- функциональные пространства с переменными показателями.

Выделены результаты, оказавшие наиболее существенное влияние на становление современной теории дифференциальных уравнений дробного порядка. Особое внимание уделено роли БИБЛИИ СОВРЕМЕННОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ [1-2].

Работа выполнена при частичной поддержке Белорусского Республиканского Фонда Фундаментальных Исследований, грант Ф10МС-024.

Литература.

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и Техника, 1987.
2. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications. Amsterdam: Gordon & Breach Sci. Publishers, 1993.

Сазонов Л.И. (ЮФУ, Ростов-на-Дону; ЮМИ ВНЦ РАН, Владикавказ)
sazonov@math.rsu.ru

Оценки решений возмущенной линеаризованной системы Озеена

При исследовании полугрупповыми методами уравнений Навье – Стокса во внешних областях существенную роль играют оценки решений соответствующих линеаризованных уравнений. Осуществление линеаризации системы Навье – Стокса на стационарном решении с постоянным ненулевым пределом на бесконечности и стандартное применение гидродинамического проектора П приводит к ОДУ в некотором банаховом пространстве

$$\frac{du}{dt} = Au + Bu,$$

где A, B – операторы вида $Au = \Pi(\triangle u - a\partial_1 u)$, $Bu = -\Pi((w,\nabla)u + (u,\nabla)w)$, $w + ae_1$ – стационарное течение. Данное ОДУ будем рассматривать в пространстве $S_p(\Omega)$, *(1<p<∞)* соленоидальных *p* –суммируемых полей во внешней области Ω, которая содержится и может, в частности, совпадать со всем пространством R^n (n>2).

Оператор Озеена *A* порождает аналитическую группу *T(t),* для которой справедливы $L_p - L_q$ – оценки

$$\partial^\alpha T(t)_{p\to q} \le c^\alpha_{pq} t^{-\frac{|\alpha|}{2}-\frac{n}{2}(1/p-1/q)}, \ 1<p\le q<\infty,$$

причем при указанных условиях они выполняются для всего пространства, а для внешних областей возникают ограничения на параметры α, *p, q* [1].

В работах [2 – 4] исследовался вопрос об условиях, при которых возмущенный оператор Озеена *A+B* порождает аналитическую полугруппу, для которой имеют место аналогичные оценки. Методами теории некоммутативных банаховых алгебр было установлено, что указанные оценки справедливы, если спектр возмущенного оператора Озеена *A+B* не имеет собственных значений в замыкании правой полуплоскости Re $\lambda \ge 0$. В частности, этот факт имеет место для малых в определенном смысле возмущений *w*.

На основе приведенных результатов были изучены вопросы о нелинейной устойчивости стационарных решений, доказаны теоремы о существовании малых глобальных нестационарных возмущений стационарных решений и получены оценки их затухания по времени в L_p – нормах.

В докладе будут изложены эти и новые результаты, полученные автором в данном направлении.

Литература

[1] Сазонов Л.И. Обоснование метода линеаризации в задаче обтекания // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58, № 5. С. 85 – 109.

[2] Сазонов Л.И. Оценки возмущенной полугруппы Озеена // Владикавказский математи-ческий журнал. 2009. Т. 11, вып. 3. С.50 – 61.

[3] Сазонов Л.И. Об устойчивости стационарных решений задачи обтекания // Изв. Вузов.
Сев.-Кав. регион. Естест. Науки. 2009. Спецвыпуск «Актуальные проблемы математической гидродинамики.» С. 195 – 200.

[4] Сазонов Л.И. Оценки возмущенной полугруппы Озеена в R^n и устойчивость стационарных решений системы Навье-Стокса // Владикавказский математический журнал. Т. 12, вып. 3. С. 71 – 82.

Северин Г.Ю. (Воронеж)
akg.77@mail.ru

Бифуркация малых синхронных устойчивых автоколебаний в двух двумерных динамических системах с близкими линейными частями.

Рассматриваются две двумерные динамические системы с близкими линейными частями, каждая из которых порождает устойчивый предельный цикл. При малых линейных перекрёстных связях между системами в получившейся 4-мерной системе может возникнуть устойчивый синхронный предельный цикл. Более того, эту связь можно вводить только в одну двумерную систему, т.е. совершать подстройку.

Вводится новое определение синхронных автоколебаний для двух двумерных систем с близкими линейными частями в терминах устойчивых периодических решений.

Получены необходимые и достаточные условия для коэффициентов четырёхмерной системы, приводящие к бифуркации малых синхронных устойчивых автоколебаний с нулевой разностью фаз.

Литература.

1. Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Куртс Ю., Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление, М., « Техносфера», 2003.
2. Блехман И.И., Синхронизация динамических систем, М., «Наука», 1971.

Сумбатян М.А. (Ростов-на-Дону)
sumbat@math.rsu.ru

Приложение гиперсингулярных интегральных уравнений в теории трещин

В работе исследуются двумерная и трехмерная задачи линейной динамической изотропной теории упругости для тонких трещин, когда и продольные, и поперечные волны принимают участие в дифракционном процессе. Рассматриваются как прямая, так и обратная задача. Трещина может иметь произвольную форму, и даже самопересекаться. При этом в трехмерной задаче она должна быть расположена в одной плоскости. Прямая задача соответствует случаю, когда граница трещины заранее известна, а обратная задача – когда эта граница должна быть восстановлена по известному рассеянному полю на фиксированной частоте колебания.

Рассматриваются два типа граничных условий на поверхности трещины: акустически мягкий и акустически твердый случаи. В обоих случаях математически формулировка задачи основана на ее сведении к системе интегральных уравнений, взятых по границе трещины. В случае акустически мягкой границы ядра интегральных уравнений имеют слабую особенность в нуле. В случае акустически твердой границы основное свойство возникающей системы граничных интегральных уравнений – это то, что ядра обладают гиперсингулярным поведением в нуле. В обоих случаях описываются базовые свойства таких уравнений и приводятся квадратурные формулы для вычисления интегралов.

В двумерной задаче, где интегральные уравнения являются одномерными, квадратурная формула является известной, однако в работе она впервые применяется к решению как прямой, так и обратной задачи. В трехмерной задаче, где интегральные уравнения – двумерные, соответствующие квадратурные формулы были известны лишь при выборе ортогональной сетки узлов. Здесь даются новые представления для квадратурных формул с выбором сетки узлов в полярной системе координат, что удобно, например, при решении задачи для круглой трещины, расположенной в пространстве. Показывается, что численная трактовка гиперсингулярных интегралов может быть выполнена так же, как если бы в них не было никакой особенности вообще.

Обратная задача реконструкции состоит в том, чтобы выбрать такую трещину, диаграмма рассеяния которой совпадает с измеренной функцией амплитуды рассеяния в зависимости от угла падения. Предлагается численный алгоритм, который обеспечивает быструю реконструкцию в реальном масштабе времени. Тестирование алгоритма в трехмерном случае произведено на примере задачи о реконструкции формы неизвестной эллиптической трещины. Показана численная устойчивость алгоритма, основанного на методе случайного глобального поиска минимума нелинейного функционала невязки для исходного операторного уравнения обратной задачи.

Тестирование алгоритма на большом числе обратных задач позволяет сделать следующие выводы. Точность реконструкции, как правило, высокая. Как ни странно, но реконструкция малых трещин дает лучшие результаты, чем реконструкция больших. С физической точки зрения это можно объяснить тем, что трещина, имеющая более гладкую диаграмму отражения, может быть реконструирована с большей точностью.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 10-01-00557а.

Яковенко Г.Н. (Долгопрудный)
Yakovenko_G@mtu-net.ru

Операторы, связанные с управляемыми системами[1]

Обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\dot{x} = \varphi(t,x,u), \quad x \in R^n, \quad u \in U \subset R \ , \tag{1}$$

с управлением u соответствует семейство операторов [1]

$$X(u) = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{2}$$

параметризованное управлением u. В семействе (2) выделяются базисные операторы

$$X_j = X(u_j) = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ij}(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \varphi_{ij}(t,x) = \varphi_i(t,x,u_j), \quad u_j \in U, \quad j = \overline{1,p} \le n+1\,, \tag{3}$$

такие, что выполняются равенства $\operatorname{rank}\|\varphi_{ij}(t,x)\| = p$ и

$$X(u) = \sum_{j=1}^{p} f_j(t,x,u) X_j\,.$$

Базисные операторы $X_1,\ldots,X_p$ пополняются [1]: вычисляются коммутаторы $[X_j, X_k]$, $j,k = \overline{1,p}$; если коммутатор линейно несвязан с базовыми операторами, он добавляется к ним; если же коммутатор линейно связан операторами, то он отбрасывается; если на очередном шаге отброшены все вновь вычисленные операторы, процедура завершена. В результате пополнения управляемой системе (1) сопоставляется полная система операторов $X_1,\ldots,X_m$, $p \le m \le n+1$. Полная система, в частности, служит для вычисления первых интегралов уравнений (1): функций $w(t,x)$, сохраняющихся на любом решении $x(t)$, $u(t)$ системы (1). Функционально независимый набор $w_1(t,x),\ldots,w_{n+1-m}(t,x)$ — решения системы $X_1 w = 0,\ldots,X_m w = 0$. В случае $m = n+1$ нетривиальные первые интегралы отсутствуют. Для вычисления стационарных первых интегралов $w(x)$ требуется пополнить систему $X_1,\ldots,X_m$, $X_{m+1} = \partial/\partial t$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00228) и АВЦП Развитие научного потенциала высшей школы 2009–2010 гг. (проект 2.1.1/3604).

Функционально независимый набор стационарных первых интегралов $w_1(x), \dots, w_{n+1-M}(x)$ — решения полной системы

$$X_1 w = 0, \dots, X_m w = 0,\ X_{m+1} w = \partial w / \partial t = 0,\ X_{m+2} w = 0, \dots, X_M w = 0,\ p \le m < M \le n+1.$$

Полные системы операторов $X_1, \dots, X_m$ и $X_1, \dots, X_M$ участвуют при исследовании других вопросов математической теории управления: инвариантность к внешним возмущениям, симметрии по состоянию, симметрии в случае преобразования управления и независимой переменной — времени t, при изучении оптимальных процессов [1].

Список литературы

1. *Яковенко Г.Н.* Теория управления регулярными системами. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 264 с.

Секция 4
Математика в естествознании, интеллектуальные системы и компьютерные науки

УДК 539.3

Беркович В.Н. (Ростов-на-Дону)
bvn119@rambler.ru

Некоторые математические аспекты в задачах установившихся колебаний упругой кусочно-однородной клиновидной среды

В предлагаемом докладе рассмотрены вопросы исследования граничных интегральных уравнений (ГИУ), порождаемых смешанными задачами математической физики в связи с моделированием процессов возбуждения упругих волн в кусочно-однородных областях, составленных из клиновидных компонент с общим ребром в условиях их жесткого контакта и различными механическими характеристиками. Рассматриваемые ГИУ имеют специальный вид и связаны с интегральным преобразованием Конторовича-Лебедева, часто применяемым для исследования этого класса смешанных краевых задач. Изучены вопросы разрешимости указанных ГИУ в пространствах дробной гладкости $W_2^{\gamma}(\partial\Omega),\ 0<\gamma<1$ и дан способ построения решения этих уравнений, частично рассмотренный в [1].

В процессе получения ГИУ рассмотрена проблема удовлетворения условиям жесткого контакта (сопряжения) на границах раздела клиновидных компонент, представляющая, на наш взгляд, самостоятельный интерес. Указанная проблема решается в специальных классах обобщенных функций на основе использования результатов [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Беркович В.Н.*** Некоторые математические вопросы смешанных задач динамики неоднородной клиновидной среды. // Изв.вузов. Сев.-Кавк. регион. Ест.науки. 2005. №4. С.15-19.
2. ***Брычков Ю.А., Прудников А.П.*** Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука.1977. 286с.

Боев Н.В. (Ростов-на-Дону)
boyev@math.rsu.ru

Распространение ультразвуковой волны в трехмерном упругом теле, ограниченном кусочно–гладкой поверхностью

На основе интегрального представления Кирхгофа в рамках геометрической теории дифракции определяются траектория и амплитуда продольной ультразвуковой волны в трехмерном упругом теле конечных размеров, граничная поверхность которого может быть произвольной кусочно-гладкой поверхностью. Высокочастотная продольная волна вводится в упругое тело ультразвуковым датчиком с его поверхности. Распространяющаяся продольная волна при взаимодействии с граничной поверхностью в общем случае допускает отражение в продольную и трансформацию в поперечную волну. Так как продольная составляющая отраженной волны имеет большую скорость, то она фиксируется приемником первой и является весьма информативной о форме границы упругого тела и о наличии дефектов в упругом теле. Исследуемая проблема сведена к геометрической и механической задачам.

Первая задача – геометрическая. Она состоит в расчете пространственной траектории N-кратно переотраженного луча, вдоль которого распространяется ультразвуковая волна. Для трехмерного тела форма луча представляет собой пространственную ломаную линию. Тело конечных размеров отнесено к глобальной декартовой системе координат, в которой считается известным уравнение граничной поверхности. По уравнению поверхности в каждой ее точке определяются базисные орты локальной декартовой системы координат, определяемой нормалью к поверхности и касательными к линиям кривизны поверхности. Расчет траектории луча основан на решении геометрических задач: нахождении точек пересечения прямой с поверхностью, законах отражения лучей от поверхности. При этом используются матрицы перехода от одной декартовой системы к другой, элементы которых выписываются через скалярные произведения базисных векторов. Вторая задача – механическая и состоит в расчете перемещений в конечной точке построенного луча. Построенное асимптотическое решение на основе модификации физической теории дифракции Кирхгофа основано на использовании интегрального представления Сомильяны. Оно имеет локальный характер и дает главный асимптотический член амплитуды дифрагированного поля в малой окрестности любого луча, вышедшего из фиксированной точки упругого тела (источника), последовательно отразившегося в точках зеркального отражения от граничной поверхности тела и пришедшего в точку приема. Главный член асимптотики перемещения в точке приема получен оценкой 2N-кратного дифракционного интеграла методом многомерной стационарной фазы и определяется произведением коэффициентов отражения продольной волны в продольную, определителем матрицы Гессе (гессианом) порядка 2N симметричной ленточной структуры (с шириной ленты, равной семи). Элементы гессиана выписаны в явном виде. Диагональные элементы определяются расстояниями между точками, участвующими в формировании луча, направлениями падающих и отраженных волн, главными кривизнами граничных поверхностей в точках зеркального отражения. Остальные элементы определяются как расстояниями и направлениями падающих и отраженных волн, так и элементами матриц перехода от одной локальной декартовой системы координат к другой в соседних точках зеркального отражения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 10-01-00557а.

Гачаев А.М. (Грозный)
gachaev_chr@mail.ru

Математическое моделирование деформационно-прочностных характеристик вязкоупругих материалов

В данной работе проведено математическое моделирование деформационно-прочностных характеристик полимеров. Используется модель на основе производных дробного порядка.

Рассматривается стандартная модель линейного вязкоупругого тела [1], которая имеет вид

$$\sigma(t)+\sum_{i=1}^{m} b_i D^{\alpha_i}\sigma(t)=E_0\varepsilon(t)+\sum_{i=1}^{m} E_i D^{\beta_i}\varepsilon(t), \qquad (1)$$

где $\sigma(t),\varepsilon(t)$ - напряжение и деформация в момент времени $t, b_j, E_0, E_j, \alpha_i, \beta_i$ -заданные величины, а D_{0t}^{α} - оператор дробного дифференцирования порядка α с началом 0 и концом t, т.е. $D_{0x}^{\alpha}\varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)}\displaystyle\int_0^x \dfrac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, & \alpha<0,\\ \dfrac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}} D_{0x}^{\alpha-[\alpha]-1}\varphi(t), & \alpha>0\end{cases}$

В работах [2], [3] изучены прочностные характеристики одного класса полимеров, что привело к необходимости решения уравнения

$$\sigma(t)=E_0 D^{\alpha}\varepsilon(t). \qquad (2)$$

Здесь установлено, что участок эластичности деформационной кривой аппроксимируется интегральной кривой уравнения (2).

В этой части работы анализируется уравнение (2) и его решения.

Самым важным моментом в построенных моделях, в частном в уравнении

$$E_0\varepsilon(t) = J^{1/3}\sigma(t),$$

где $J^{1/3}u = \frac{1}{\Gamma(1/3)}\int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^{2/3}}$ - оператор дробного интегрирования в смысле Римана-Лиувилля порядка 1/3. т.е. является диссипативным.

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.:Физматлит, 2003. – 272с.
2. Кехарсаева Э.Р., Гачаев А.М., Алероев Т.С. Модель деформационно-прочностных характеристик хлорсодержащих полиэфиров. //Пластичные массы, 2004, №11. с.35.
3. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого тела – М.: наука, 1977.

Гервич Л.Р., Штейнберг Б.Я. (Ростов-на-Дону)
lgervith@gmail.com

Размещение массивов с перекрытиями в параллельных итерационных процессах

Многие численные методы приводят к итерационному процессу умножения некоторой матрицы на вектор:

$$X^k = A*X^{k-1}.$$

Во многих прикладных задачах умножаемая матрица является разреженной или даже ленточной. Если решаемая задача имеет большую размерность, то для ее решения естественно использование технологий параллельных вычислений.

В данной работе на примере итерационного умножения ленточной матрицы на вектор рассмотрен параллельный алгоритм, предполагающий размещение данных по процессорам с перекрытиями. Такое размещение необходимо для минимизации времени межпроцессорных пересылок. Следует отметить, что общее количество пересылаемых данных при данном подходе не уменьшается: уменьшается количество пересылок, объем каждой пересылки увеличивается.

В работе определяются оптимальная величина перекрытия и, как следствие, оптимальная частота пересылаемых данных. Алгоритм может быть использован в таких задачах, как задача теплопроводности, метод Рунге-Кутты (в некоторых конкретных применениях), итерационный метод решения задачи Дирихле

В ходе работы были проведены численные эксперименты на вычислительных кластерах мехмата ЮФУ и ЮГИНФО. На некоторых входных данных получено существенное ускорение времени выполнения алгоритма, использующего перекрытия, по сравнению с обычным алгоритмом. Например, для матрицы размерности 10000 с шириной ленты 11 на 16 узлах было получено двойное ускорение времени выполнения относительно алгоритма, не использующего распределение матриц с перекрытиями.

УДК 519.1, 378.1

Ерусалимский Я.М. (Ростов-на-Дону)
dnjme@math.sfedu.ru

Современный учебник математики и требования к нему

Термин «современный учебник», как и «современная методика» широко распространен, но применяется, как правило, в рекламных целях или в чисто временном смысле. Современность не означает произведенное только что, сию минуту и такое, чего ещё никогда не было. Современность означает только одно – соответствие требованиям сегодняшнего дня. Одним из современных учебников элементарной геометрии я считаю учебник Ф. Симашко для гимназий и средних военных училищ, изданный еще в XIX веке. Современность учебника или методики относится к содержанию и его форме. Ниже приведены требования к современному учебнику математики, которыми мы руководствовались при написании учебника [1] и учебных пособий [2,3]. Представляется, что требования к современному учебнику математики, сформулированные ниже и апробированные нами, будут полезны авторам учебников или учебных пособий не только по математике, но и по физике, химии, биологии и др. естественным наукам.

Требования к современному учебнику по математике:

1. Соответствие действующим Федеральным государственным образовательным стандартам и действующим программам.
2. Современный стиль изложения.
3. Интерактивность.
4. Гипертекстовость.
5. Современный дизайн.
6. Компьютеризованность и алгоритмичность.
7. Модульность.
8. Технологичность.
9. Открытость – замкнутость.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Владимирский Б.М., Горстко А.Б., Ерусалимский Я.М. Математика. Общий курс/ Сп-б.: Лань, изд. четвертое, стереотипное, 2008.- 960 с.
2. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения/ М.: Вузовская книга, 2009, изд. 9- е, испр. и дополненное.
3. Авдейчик А.Г., Дыбин В.Б., Ерусалимский Я.М. и др. Элементарная математика в примерах и задачах: практикум для подготовки к ЕГЭ и вступительным экзаменам в вузы (под ред. В.Б.Дыбина, Я.М.Ерусалимского/ М.: Вузовская книга, 2-е изд., испр. и доп., 2008.- 280 с.

Жбанова О.В. (Ростов-на-Дону)
zhbanova@sfedu.ru

Аспирация нелинейно упругой сферической оболочки

В данной работе рассматривается модель микропипеточной аспирации тонкостенной нелинейно упругой сферической оболочки. Изгибной жёсткостью оболочки пренебрегаем. Оболочка нагружена равномерно распределенным нормальным давлением. Целью работы является исследование напряженно-деформированного состояния оболочки и построение зависимости между величиной давления в пипетке при аспирации и деформацией оболочки.

Уравнение равновесия оболочки в деформированной конфигурации имеет вид [1,2]: $\nabla \cdot \underline{\underline{L}} + \underline{q} = 0$. Это уравнение преобразуется к системе нелинейных ОДУ, учитывая параметры оболочки, граничные и начальные условия, свойства материала, вид функции интенсивности внешних сил.

В итоге получены уравнения равновесия осесимметричной деформации сферической оболочки под действием равномерно распределённого нормального давления, выраженные через функции кратностей удлинений λ_1, λ_2 и угол наклона касательной к деформированному сечению ψ. Полученные уравнения описывают равновесия оболочки на всех участках оболочки: на участке оболочки, лежащей внутри пипетки, и на участке вне пипетки.

Системы нелинейных ОДУ, с граничными условиями на участках, лежащих внутри и вне пипетки, представляют собой краевые задачи, решение которых ищется численно методом пристрелки по трём параметрам s_c, A, B. Интегрирование дифференциальных уравнений осуществляется методом Рунге-Кутта четвёртого порядка. Численное решение реализовано в математическом пакете Matlab. Точность проверяется на каждом шаге сравнением решений для определенного набора параметров, но для разного разбиения участков поиска.

Построена модель микропипеточной аспирации нелинейно-упругой сферической оболочки, для случая, когда контакт оболочки с пипеткой осуществляется в одной точке.

Результатами численного моделирования являются графики напряжений, формы для различных значений разницы давлений Δp при заданных давлениях в оболочке и радиусах пипетки r_p, и графики зависимости Δp^* и H - глубины всасывания оболочки в микропипетку. Произведен анализ полученных графиков.

1. *Зубов Л. М., Колесников А. М.* Большие деформации упругих безмоментных оболочек вращения // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2004. No1 с.33-37.
2. *Kolesnikov A. M., Zubov L. M.* Large bending deformations of a cylindrical membrane with internal pressure // ZAMM. 2009. Volume 89. Issue 4.– pp. 288-305.

Задорожный А.И., Задорожная Н.С. (Ростов-на-Дону)
simon@sfedu.ru

Теорема о диссипации свободных гравитационных волн в слое вязкой несжимаемой жидкости конечной электрической проводимости

Исходя из анонсированной физической постановки, проблема сводится к неклассической задаче на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений импульсов, неразрывности и индукции для жидкости. Перечисленные уравнения сопрягаются с уравнениями Максвелла в вакууме, граничащем со свободной поверхностью, и дном, являющимся абсолютно твердым диэлектриком.

В результате приходим к следующей спектральной краевой задаче

$$\sigma U(z) = iQ(z) + Rg^{-1}[U''(z) - U(z)],$$

$$\sigma W(z) = -Q'(z) + Rg^{-1}[W''(z) - W(z)] - A[X'(z) + iZ(z)], \quad W'(z) - iU(z) = 0;$$

$$\sigma Z(z) = -iW(z) + Rm^{-1}[Z''(z) - Z(z)], \quad Z'(z) - iX(z) = 0, \quad z \in]-d;0[.$$

Здесь U, W, Q, X, Z - амплитудные функции горизонтальной и вертикальной скорости, гидродинамического давления, напряженности горизонтального и вертикального магнитных полей, индуцированных движением жидкости, соответственно; Rg, Rm -

гидродинамическое и магнитное числа Рейнольдса, A - число Альфвена, z - вертикальная координата, $d = const$ - толщина жидкого слоя, σ - искомый спектральный параметр.

Граничные условия на дне выражают прилипание: $W(-d) = U(-d) = 0$, а так же наличие приповерхностного тока при выполнении $Z''(-d) - Z(-d) = 0$, либо его отсутствие в том случае, когда $Z'(-d) + Z(-d) = 0$. На невозмущенной свободной поверхности $z = 0$ выполняются условия непрерывности нормальных компонент тензора полных (т.е. гидродинамических и магнитных) напряжений при переходе из среды в вакуум, условие равенства нулю вязких касательных напряжений, а так же одно из вышеуказанных условий для поверхностных токов.

Далее после достаточно громоздких выкладок выводится уравнение (функционал) баланса энергии вида

$$\sigma^2 K(U,W) + |\sigma|^2 AM(Z) + \sigma Rg^{-1} D(W) + \sigma ARm^{-1} R(Z) + |W(0)|^2 = 0,$$

где естественно назвать $K(U,W) = \int_{-d}^{0} \left[|U|^2 + |W|^2\right] dz$ - функционалом кинетической энергии, $M(Z) = |Z(0)|^2 + \int_{-d}^{0} \left[|Z'|^2 + |Z|^2\right] dz$ - функционалом магнитной энергии; $D(W)$ - известный из классической гидродинамики функционал диссипации за счет молекулярной вязкости, $R(Z) = \int_{-d}^{0} |Z'' - Z|^2 dz$ - рэлеевский диссипативный функционал, $|W(0)|^2$ выражает потенциальную энергию архимедовых сил. Записанный функционал баланса энергии отличается от функционала свойственного самосопряженному квадратичному операторному пучку лишь наличием усложняющего анализ члена с $|\sigma|^2$.

Приведенное выше энергетическое соотношение позволяет сделать следующее утверждение. Счетный спектр задачи лежит в левой комплексной полуплоскости ($\mathrm{Re}(\sigma) < 0$), при условии сильной демпфированности $\mathrm{Im}(\sigma) = 0$ и затухание носит монотонный (апериодический, лимитационный) характер. Смена немонотонных режимов монотонными происходит при переходе через кратный вещественный корень. Установлен любопытный факт: во все время движения $K(U,W) > M(Z)$. В случае бесконечной глубины и при равенстве чисел Рейнольдса построена полная картина спектра.

Мишугова Г.В., Мул А.П., Рябых Г.Ю. (Ростов-на-Дону)
galinamishugova@mail.ru

Выделение конечного числа доминирующих характеристик в годовых временных рядах в метеорологии

В метеорологии в годовых временных рядах трудно выделить либо наличие амплитудных или частотных аномалий («событий»), либо регулярные периодические составляющие. Чтобы провести анализ таких временных рядов возникает трудность формализации критических точек или разладок сигнала. Еще одной проблемой является нахождение стационарных точек сигнала, соответствующих локальным экстремальным значениям [1].

В непрерывном вейвлет-анализе известна процедура выделения точек скелета вейвлет-преобразований (WTMM – wavelet transform modulus maxima) [2]

1. Выделяем масштабно-зависимые экстремальные точки сигнала (временные точки локальных минимумов и максимумов сглаженного сигнала, а также точки локального максимума модуля производной от сглаженного сигнала, которые задают естественную фрагментацию поведения исходного сигнала для рассматриваемого масштаба времени).

2. Объединение экстремальных точек различного типа в цепи отдельно для точек минимума или максимума сглаженного сигнала и для точек максимальных значений модуля первой производной, причем, отдельно для отрицательных и отдельно для положительных производных. Заметим, что сглаженный сигнал обладает большим числом экстремальных точек для малых масштабов усреднения, но с ростом масштаба число таких точек быстро уменьшается.

Точки соединения длинных цепей локальных максимумов и локальных минимумов сглаженного сигнала назовем точками бифуркации. Из смысла этих точек следует, что в их окрестности исследуемый сигнал ведет себя примерно как константа на временном масштабе, соответствующей точке соединения цепей.

Авторы выделяют периоды времени, содержащие точки бифуркации и применяют метод Прони разложение в окрестности этих точек для анализа процессов.

При обработке сигнала с помощью метода Прони строится модель, которая не является периодограммной [3]. Методом наименьших квадратов выделяется конечное число параметров базовых функций. Задача сводится к отысканию корней многочленов весьма высокой степени. Метод Прони сводит нелинейные аспекты модели к процедуре факторизации многочленов, делая возможным применение быстрых вычислительных алгоритмов. В результате обработки из исходного сигнала выделяется конечное число доминирующих характеристик с высокой точностью, второстепенные составляющие сигнала относятся к шуму.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Любушин А.А., В.Ф.Писаренко, М.В.Болгов, Т.А.Рукавишникова Исследование общих эффектов вариаций стока рек – Метеорология и гидрология, 2003, N7. С.76-88.
[2] Солонина А.И., Улахович Д.А., Арбузов С.М., Соловьева Е.Б. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций / 2-е издание. - Спб.: БХВ-Петербург, 2005. - 768 с.: ил.
[3] Марпл.-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М., Мир, 1990, 584 с.

Сахарова Л.В. (Ростов-на-Дону)
L_Sakharova@mail.ru

Исследование механизма трансформации гауссовского распределения концентраций при аномальных режимах ИЭФ

Создана математическая модель естественного pH-градиента в водном растворе амфолитов-носителей – амфотерных аминокислот. Задача возникает в практике применения изоэлектрического фокусирования (ИЭФ) - одного из наиболее универсальных и широко применимых электрофоретических методов идентификации и фракционирования многокомпонентных биохимических смесей.

Математическая формулировка задачи представляет собой систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, соответствующих потоку концентраций амфолитов, обобщенному закону Ома, уравнению электронейтральности, а также закону сохранения вещества. Введение в рассмотрение новых переменных позволило значительно упростить исходную задачу и, избавившись от главной трудности – интегрального условия, свести ее к системе обычных дифференциальных уравнений. Численное решение задачи состояло из следующих этапов: перехода к экспоненциальной форме решения для исключения лишенных физического смысла решений; составления алгоритма решения краевой задачи на базе модифицированного метода Ньютона, методов Рунге-Кутта, а также метода движения по параметру; составления программы на языке Turbo Pascal с использованием стандартного модуля Graph; исследования системы ИЭФ посредством создания серии наглядных рисунков, на которых изображаются профили амфолитов, pH и проводимость γ. Построенная численная модель позволяет подробно исследовать графическим способом динамику зависимости системы от плотности тока при ее возрастании от низких до сверхвысоких значений.

Модель обнаруживает качественное соответствие с общепринятыми математическими моделями ИЭФ при низких и средних плотностях тока. Получаемые посредством нее профили концентраций амфолитов имеют вид стандартных гауссовских распределений. Однако в случае сверхвысоких плотностей тока взамен классическому распределения концентраций возникает «аномальное» распределение – гауссовское распределение трансформируется в «дельтообразное», а графики pH и γ приобретают ступенчатый вид. «Аномальное» распределение было протестировано асимптотическим методом и методом касательных. Полученные результаты указывают на адекватность построенной модели исходной математической задаче.

Для исследования «аномального» режима были построены асимптотические формулы, обнаружившие высокую сходимость с расчетным решением при высоких плотностях тока. Асимптотика имеет вид простых математических формул, представляющих концентрации амфолитов как функции pH. Выявлен также электрохимический смысл распределения: концентрации двух соседних амфолитов в интервале между их изоэлектрическими точками есть функции разностей их степеней диссоциации.

Построенная математическая модель позволяет осуществлять прогнозирование динамики ИЭФ для случая каждой отдельной электрохимической системы: подбирать оптимальную плотность тока и состав электролита, обеспечивающую монотонность pH и проводимости в электрохимической камере. Таким образом, построенная модель может быть использована для оптимизации практического эксперимента, приводящей к увеличению разрешающей способности метода ИЭФ.

Шамраева В.В., Цветкова И.В. (Ростов-на-Дону)
shamraeva@mail.ru

Решение некоторых задач, возникающих при отыскании мартингальной меры в случае финансового рынка с бесконечным числом скупщиков акций

Рассмотрим одношаговый финансовый рынок, заданный на стохастическом базисе $(\Omega,\mathbf{F})$, где $\mathbf{F}=(\mathsf{F}_0,\mathsf{F}_1)$ - одношаговая фильтрация, причём $\mathsf{F}_0=\{\Omega,\varnothing\}$, а F_1 - порождена разбиением Ω на счетное число атомов A_i, $i=1,2,\ldots$. Рассмотрим $\mathbf{F}$-адаптированный случайный процесс $Z=(Z_n,\mathsf{F}_n)_{n=0}^{1}$, который мы мыслим как дисконтированную стоимость акции. Введём следующие множества вероятностных мер: $\overline{\mathsf{P}}=\{P=(p_1,p_2,\ldots,p_i,\ldots):\ p_i\geq 0,\ i=1,2,\ldots\}$, $Z_0\big|_{\Omega}=a$, $Z_1\big|_{A_i}=b_i$ (i=1,2,…), $\overline{\mathsf{P}}(Z,F)=\{P\in\overline{\mathsf{P}}:$ $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|b_i|\,p_i<\infty,\ \sum\limits_{i=1}^{\infty}b_ip_i=a\}$. Пусть, далее $f(P)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_ip_i$ цена финансового обязательства $f_1=\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_iI_{A_i}$, вычисленная по мартингальной мере $P\in\overline{\mathsf{P}}(Z,F)$. Таким образом, мы приходим к следующей задаче I: $f(P)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_ip_i\to\sup(\inf)$

$$\tilde{P}:\begin{cases} p_1+p_2+\ldots+p_i+\ldots=1, \\ b_1p_1+b_2p_2+\ldots+b_ip_i+\ldots=a, \\ p_i\geq 0,\quad i=\overline{1,\infty}. \end{cases}$$

Исследование финансовых рынков со счётным числом состояний было проведено в [1]. При этом использовался принципиально новый метод перехода от неполных рынков к полным – метод интерполяции, оперирующий такими понятиями как СУХЕ (свойство универсальной хааровской единственности) и ОСУХЕ (ослабленное свойство универсальной хааровской единственности). Однако в упомянутой работе остался нерешённым вопрос о нахождение достаточных условий (на a, b_1, b_2, …), гарантирующих существование мартингальных мер P, удовлетворяющих СУХЕ (ОСУХЕ). В данных тезисах анонсируется подход к решению этой проблемы при помощи построения двойственной к I задачи II: $g(U)=u_1+a\cdot u_2 \to$ inf(sup) при $\widetilde{U}=\{u_1+b_j u_2 \geq c_j, j=1,2,...\}$. Обозначим M:=sup{$f(P)$: $P\in\tilde{P}$}, N:=inf{g(U): U$\in\tilde{U}$}.

Теорема. Пусть задача II имеет финитно-определенную систему ограничений. Тогда 1) если N>-∞, то задача I разрешима, при этом N=M; 2)если задача I разрешима, то N>-∞ и тогда N=M.

Следовательно, условия на a, b_1, b_2, …, гарантирующие финитно-определённость системы ограничений задачи II, дадут вместе с тем и условия разрешимости задачи I. Кроме того, имея условия на эти же коэффициенты, найденные в работе [1], можно изучить некую между ними взаимосвязь. Что даст возможность найти ряд ещё одних условий (возможно, отличных от условий, предложенных в [1]), гарантирующих существование мартингальных мер P, удовлетворяющих СУХЕ (ОСУХЕ). Что в конечном итоге, позволит преобразовывать неполные и безарбитражные рынки в полные безарбитражные, что в финансовой математике является весьма актуальной задачей.

Список литературы

[1] Данекянц А.Г. Моделирование безарбитражных финансовых рынков с помощью хааровских интерполяций на счётном вероятностном пространстве. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Ростов-на-Дону, 2005.

Шварцман М.М. (Ростов-на-Дону)
black_drive@smtp.ru

Математические модели в синергетике

На первом этапе моделирования в новой предметной области математические модели (ММ) строятся с позиций математики. Различные типы математических уравнений прикладываются к изучаемой системе и с интересом наблюдают: «А что получится?». В случае совпадения результатов моделирования с какой-либо особенностью изучаемой системы, начинается "эксплуатация" этого класса уравнений. Затем наступает понимание принципиальной ограниченности используемого подхода и начинается поиск другого инструментария математики. По мере углубления понимания свойств изучаемой системы, наступает второй этап моделирования: ММ начинают создавать с позиций самой системы. В ряде случаев, второй этап инициирует возникновения нового направления в математике.

Первому этапу моделирования в синергетике, «тон задал» нобелевский лауреат И. Пригожин. Для описания работы брюсселятора он применил систему дифференциальных уравнений (СДУ). Это направление продолжил один из основателей синергетического движения в России С.П. Курдюмов. Многие годы, занимаясь физикой плазмы, он, при построении ММ в синергетике, использовал уравнение теплопроводности. Руководитель Санкт-Петербургского НИЦ "Синергетика" М.А. Басин анализирует СДУ в комплексной области. Синергетическая школа Г.Г. Малинецкого, с одной стороны, для построения ММ использует более сложные СДУ; с другой стороны, привлекают: итерационные уравнения, топологические методы, нейронные сети.

Общим для итерационных уравнений и СДУ является то, что решения, описывающие поведение системы во времени, определяются начальными условиями. В то время как, с позиций синергетики, происходит непрерывное взаимовлияние настоящего и будущего. Т.е. характер поведения системы в настоящем и далее зависит от того, в какое одно из возможных состояний оно попадёт в будущем. Выбор одного из дискретных состояний на начальном этапе зависит от случайностей. По мере приближения системы к одному из квазистационарных состояний, система становится более чувствительной к событиям, способствующим её переходу в это состояние. Динамика системы в настоящем варьирует спектр потенциальных квазистационарных состояний. При попадании системы в одно из квазистационарных состояний, спектр других возможных состояний меняется качественно. Вариация и изменение спектра будущих состояний, в свою очередь, влияет в настоящем на степень реакции системы на случайные процессы и/или управленческие решения.

Таким образом, ММ в синергетике должна учитывать:

- влияние будущих возможных квазистационарных состояний на характер процессов в настоящем;
- непрерывное и дискретное изменение будущих состояний системы, в зависимости от процессов в настоящем;
- изменение чувствительности системы к вероятностным событиям и/или управленческим решениям при приближении к одному из возможных квазистационарных состояний.

Имеется ли математический аппарат и/или инструментарий в другой предметной области, с помощью которого можно реализовать такую модель?

СТЕФАН ГРИГОРЬЕВИЧ САМКО
(к семидесятилетию со дня рождения)

В этом году 28 марта исполнилось семьдесят лет одному из видных российских математиков, почётному члену Академии наук Высшей школы Украины, доктору физико-математических, профессору Стефану Григорьевичу Самко.

С.Г. Самко заложил основы нового направления исследований, связанных с дробным интегродифференцированием как в одномерном, так и в многомерном случаях, и их приложениям к интегральным уравнениям первого рода с ядром типа потенциала. Эти исследования нашли отражение в книгах С.Г. Самко "Гиперсингулярные интегралы и их приложения", и в энциклопедической монографии "Интегралы и производные дробного порядка" (изд-во “Gordon & Breach”).

Им, вместе с Н.К. Карапетянцем, предложен общий подход к исследованию уравнений, содержащих обычные и обобщенные инволютивные опeратры и даны многочисленные приложения этого подхода. Эти результаты отражены в их совместной монографии "Уравнения с инволютивными операторами и их приложения" (издательство Birkhauser). С 1979 по 1981 гг. С.Г. Самко является деканом механико - математического факультета Ростовского государственного университета, а с1989 по 1998 гг. заведует кафедрой дифференциальных и интегральных уравнений РГУ. Им создана большая научная школа, 23 его ученика защитили кандидатские диссертации. В 1992-1993 он – Фулбрайтовский профессор в одном из университетов США. В 2003 – 2005 г.г. он является директором департамента математики университета Алгарве.

В конце 90-х его научные интересы обращаются к новому направлению исследований, в которых параметры изучаемых обьектов зависят от точки и классические методы не применимы. Вместе с учениками и коллегами он разработал подходы, позволяющие исследовать классические операторы гармонического анализа (максимальные, сингулярные, типа потенциала и гиперсингулярные) в функциональных пространствах Лебега, Соболева и Морри переменного порядка, как в эвклидовой постановке, так и в общем случае квазиметрических пространств с мерой.

Стефан Григорьевич вносит огромный вклад в развитие математики. Им опубликовано более 230 научных работ и пять монографий. В течение многих лет он является членом редакционных коллегий журналов «Известия вузов. Математика», «Integral Transforms Spec. Funct.», « Fractional Calculus and Applied Analysis» «Intern. J. of Math. and Stat. Sci.», «Proceed. Georgian Acad. Sci.» и других, председателем или членом оргкомитетов ряда международных конференций и симпозиумов.

СОДЕРЖАНИЕ

Именной указатель