Южный Федеральный университет
Учебный центр «Знание»

Международная конференция Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения

Конференция посвящена памяти доктора физико-математических наук,

профессора Николая Карапетовича Карапетянца (1942–2005) —

блестящего ученого и замечательного человека.

Тезисы докладов

22–26 апреля 2012 года
г. Ростов-на-Дону

УДК 330.4+504+37 1Л4
Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения» в г. Ростове-на-Дону. Конференция посвящена памяти доктора физико-математических наук, профессора Николая Карапетовича Карапетянца (1942–2005 гг.) — блестящего ученого и замечательного человека. Тезисы докладов. Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, Ростов н/Д, 2012. — 101 с. ISBN 978-5-00000000-548-4

Спонсор международной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения» — Российский фонд фундаментальных исследований, проект 12-01-06017-г

Тематика международной конференции связана с различными, интеркоррелирующими областями математики, в первую очередь гармонического анализа, функционального анализа, теории операторов, теории функций, дифференциальных уравнений и дробного анализа, интенсивно развивающимися в последнее десятилетие. Актуальность этой тематики связана с исследованием сложных многопараметрических объектов, требующих, в частности, привлечения операторов с переменными параметрами и функциональных пространств с дробными и даже переменными размерностями.

НИКОЛАЙ КАРАПЕТОВИЧ КАРАПЕТЯНЦ

Исполнилось 70 лет со дня рождения известного математика, доктора физико-математических наук, профессора, заведующего кафедрой дифференциальных и интегральных уравнений Ростовского государственного университета (ныне Южный федеральный университет) **Николая Карапетовича Карапетянца** (1942–2005 гг.)

Николай Карапетович родился 22 января 1942 г. в Ростове-на-Дону в семье рабочих. В 1959 г. после окончания средней школы он поступил на физико-математический факультет Ростовского государсвенного университета. Уже в студенческие годы Н. К. Карапетянц провел серьезные научные исследования: его первая научная статья была сделана на пятом курсе.

После окончания университета в 1964 г. Николай Карапетович поступил в аспирантуру РГУ, а спустя несколько дней был призван в армию. Только через год, после демобилизации, он продолжил обучение в аспирантуре под руководством профессора В. С. Рогожина. В 1969 г. Николай Карапетович защитил кандидатскую диссертацию и начал работать на кафедре дифференциальных и интегральных уравнений. На этой кафедре он прошел все ступени: от ассистента до профессора, заведующего кафедрой.

В 1989 г. в Тбилиси, в институте математики им. А. М. Размадзе, Николай Карапетович защитил докторскую диссертацию на тему «Интегральные операторы свертки и с однородными ядрами с переменными коэффициентами». С 1998 по 2005 г. он заведовал кафедрой дифференциальных и интегральных уравнений. На протяжении многих лет он являлся заместителем председателя Диссертационного совета при мехмате РГУ, а несколько лет подряд исполнял обязанности председателя этого совета.

Научные интересы Николая Карапетовича были весьма широки. Он являлся специалистом мирового уровня в области интегральных уравнений и смежных областях анализа. Он внес большой вклад в развитие теории сингулярных интегральных операторов, операторов типа свертки в дискретном и континуальном случаях, интегральных операторов с однородными и квазиоднородными ядрами, интегральных уравнений со сдвигом, дробное интегродифференцирование и некоторых других разделов математики. Н. К. Карапетянц опубликовал более 150 работ в российских и зарубежных журналах и две монографии. Многие его работы стали классическими в соответствующих областях математики.

Научные результаты Н. К. Карапетянца получили широкое международное признание. Он многократно был приглашенным докладчиком на конференциях в России, Армении, Белоруссии, Германии, Мексики и Португалии. На протяжении многих лет Николай Карапетович вместе с профессором С. Г. Самко руководил научным семинаром, созданным на кафедре дифференциальных и интегральных уравнений. Докладчиками на этом семинаре выступали многие известные математики.

Следует особо сказать о многолетнем творческом сотрудничестве Николая Карапетовича со Стефаном Григорьевичем Самко, которое началось еще в студенческие годы и продолжалось до смерти Николая Карапетовича. В 70-е годы ими была опубликована серия научных работ, в которых построена теория операторов с инволютивным сдвигом. Эти исследования были подытожены в известной монографии «Уравнения с инволютивными операторами и их приложения» (1988 г., издательство РГУ). Переработанная и существенно дополненная эта монография вышла в 2001 г. в издательстве Birkhäuser под названием «Equations with Involutive Operators» и стала итогом работы этого творческого тандема.

Николай Карапетович был не только блестящим ученым, но и прекрасным педагогом–новатором. Он разработал и прочитал на механико-математическом и физическом факультетах РГУ ряд общеобразовательных и специальных курсов, среди которых «Дифференциальные уравнения», «Уравнения математической физики», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Элементы гармонического анализа», «Операторы типа свертки и с однородными ядрами». Очень много внимания Николай Карапетович уделял работе со студентами и аспирантами. Под его руководством было защищено восемь кандидатских диссертаций.

Будучи известным ученым, Николай Карапетович всегда оставался скромным и доброжелательным человеком. Он был очень внимателен к своим ученикам и сотрудникам. Его отличали открытый дружелюбный характер, щедрость души и верность данному слову. Он обладал удивительной способностью, если не разделить, то понять и уважать чужую точку зрения. Не будет преувеличением сказать, что его не просто уважали, а любили и на кафедре, и на факультете.

Все, кто знал Николая Карапетовича, кто работал с ним или учился у него, навсегда сохранят память об этом замечательном человеке.

Секция I
Функциональный анализ и теория операторов

М. Э. Абрамян (Ростов-на-Дону)
mabr@math.sfedu.su

СХОДИМОСТЬ В РАВНОМЕРНОЙ НОРМЕ МЕТОДА ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ГЁЛЬДЕРОВСКОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Рассматривается сингулярное интегральное уравнение

$$(aI + S^{(\mu)})f = g, \tag{1}$$

где $S^{(\mu)}$ — оператор сингулярного интегрирования с плотностью μ на единичной окружности Γ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, I — единичный оператор, a и g — комплекснозначные функции, определенные на Γ и удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем $\alpha \in (0,1)$. Плотность μ, определенная на $\Gamma \times \Gamma$, удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α по совокупности переменных. При аппроксимации интеграла по формуле прямоугольников в точках $t_n^{(m)} = \exp(2\pi i m/n)$, $m = 0, \ldots, n-1$, $n \in \mathbb{N}$,

$$(S^{(\mu)}f)(t_n^{(m)}) \approx \frac{1}{\pi i} \sum_{\substack{l=0 \\ l\neq m}}^{n-1} \frac{\mu(t_n^{(m)}, t_n^{(l)}) f(t_n^{(l)}) \, (t_n^{(l+1)} - t_n^{(l)})}{t_n^{(l)} - t_n^{(m)}} = \sum_{l=0}^{n-1} s_{ml}^{(\mu)} f(t_n^{(l)})$$

уравнению (1) ставится в соответствие система линейных алгебраических уравнений порядка n

$$\big(d_n(a) + S_n^{(\mu)}\big) f_n = g_n, \tag{2}$$

где $S_n^{(\mu)}$ — матрица с элементами $\big(s_{ml}^{(\mu)}\big)_{m,l=0}^{n-1}$, $d_n(a)$ — диагональная матрица $\mathrm{diag}\big(a(t_n^{(0)}), \ldots, a(t_n^{(n-1)})\big)$, $g_n = \big(g(t_n^{(0)}), \ldots, g(t_n^{(n-1)})\big)^T$.

Теорема. *Если интегральный оператор $D = aI + S^{(\mu)}$, действующий в пространстве $L_2(\Gamma)$, обратим, а для функций a, μ выполняется условие сильной эллиптичности $a(t) + \lambda\mu(t,t) \neq 0$ при любых $t \in \Gamma$, $\lambda \in [-1,1]$, то для всех $n > n_0 = n_0(D)$ система (2) имеет единственное решение $f_n = \big(f_n^{(0)}, \ldots, f_n^{(n-1)}\big)^T$, связанное с решением f уравнения (1) следующим образом:*

$$\max_{m=0,\ldots,n-1} \big| f(t_n^{(m)}) - f_n^{(m)} \big| < C n^{-\alpha} (\ln n + 1)^{4+2/\alpha},$$

где константа $C = C(D,g)$ не зависит от n.

О. Г. Авсянкин, Ф. Г. Перетятькин (Ростов-на-Дону)
avsyanki@math.sfedu.ru

МНОГОМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ В ВЕСОВЫХ L_p–ПРОСТРАНСТВАХ

Рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

предполагая, что функция $k(x,y)$ однородна степени $(-n)$, т. е.

$$k(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{-n} k(x,y), \quad \forall\, \lambda > 0.$$

Далее, пусть $1 \leqslant p < \infty$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Введем весовое пространство

$$L_{p,\alpha}(\mathbb{R}^n) = \{f(x)\colon f(x)|x|^{\alpha/p} \in L_p(\mathbb{R}^n)\}$$

Рассматривается вопрос действии оператора K из пространства $L_{p,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ в $L_{q,\beta}(\mathbb{R}^n)$. Показано, что если ядро $k(x,y)$ удовлетворяет условиям

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\sigma\in S_{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(\sigma,y)|^r |y|^{nr/p'-n-\alpha r/p}\,dy < \infty,$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\sigma\in S_{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,\sigma)|^r |x|^{nr/p-n+\alpha r/p}\,dx < \infty,$$

где $1 \leqslant r < \infty$, причем $1/q = 1/r + 1/p - 1$, то оператор K ограничен из $L_{p,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ в $L_{q,\beta}(\mathbb{R}^n)$, где

$$\beta = (\alpha + n)q/p - n.$$

Также получены условия ограниченности оператора K из $L_{p,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ в $L_\infty(\mathbb{R}^n)$. В частности показано, что необходимым условием ограниченности является условие $\alpha = -n$.

Даны приложения полученных результатов об ограниченности к исследованию локальных свойств операторов вида (1).

А. Б. Антоневич, А. А. Ахматова (Минск)
antonevich@bsu.by

ОПЕРАТОРЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯМИ С РАЗДЕЛЕННОЙ ДИНАМИКОЙ

Линейный ограниченный оператор B в пространстве $L_2(X, \mu)$ называется *оператором взвешенного сдвига,* если он может быть представлен в виде

$$Bu(x) = a(x)u(\alpha(x)), \quad x \in X,$$

где $\alpha : X \to X$ есть некоторое отображение, $a(x)$ — заданная функция на X.

Наряду с описанием спектра оператора B (получением условий обратимости $B - \lambda I$) представляют интерес свойства $B - \lambda I$ для спектральных значений λ. В частности, при исследовании соответствующих линейных функциональных уравнений важно выяснить, является ли оператор $B - \lambda I$ односторонне обратимым.

В связи с вопросом об односторонней обратимости операторов $aT_\alpha - \lambda I$ все отображения α разбиваются на два класса.

В *первый класс* входят такие отображения, что при любом $a \in C(X)$ оператор $B - \lambda I$ не является односторонне обратимым при всех спектральных значениях λ.

Во *второй класс* входят такие отображения, что существуют $a \in C(X)$, при которых оператор $B - \lambda I$ является односторонне обратимым при некоторых спектральных значениях λ.

Будем говорить, что обратимое отображение α имеет *разделенную динамику*, если существует разбиение $X = X^+ \coprod X^-$ пространства X на непустые измеримые множества, такое, что множество X^+ инвариантно относительно отображения α, множество X^- инвариатно относительно отображения α^{-1}, и при этом

$$\Omega^+(X^+) \bigcap \Omega^-(X^-) = \emptyset,$$

где $\Omega^+(X^+)$ есть множество предельных точек траекторий точек из X^+ при действии α, $\Omega^-(X^-)$ – множество предельных точек траекторий точек из X^- при действии α^{-1}.

Основным результатом является следующее утверждение:

Теорема 1. *Отображение α принадлежит второму классу тогда и только тогда, когда оно имеет разделенную динамику.*

И. В. Барышева, А. С. Калитвин(Липецк)
barysheva_iv@mail.ru, kalitvinas@mail.ru

ОБ УРАВНЕНИЯХ ВОЛЬТЕРРА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Рассматривается уравнение Вольтерра с частными интегралами

$$\begin{gathered} x(t,s)=\int\limits_0^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau+\int\limits_0^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma+ \\ +\int\limits_0^t\int\limits_0^1 n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau+f(t,s)\equiv(Vx)(t,s)+f(t,s), \end{gathered} \tag{1}$$

где $(t,s)\in D=[0,1]\times[0,1]$, $0\le\tau\le t$, $0\le\sigma\le s$, $l(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma)$ и $n(t,s,\tau,\sigma)$ — заданные функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега. Уравнение (1) и оператор V в различных функциональных пространствах исследовались в [1-3].

Через U обозначим множество функций $x(t,s)$, непрерывных на D вместе с частной производной по переменной t. U — банахово пространство относительно нормы $\|x\|_U=\sup\limits_{s,t}\big(|x(t,s)|+|x'_t(t,s)|\big)$.

Пусть $BC(L^1(\Omega))$, где $\Omega=[0,1]$ или $\Omega=D$, — множество ограниченных измеримых функций $c(t,s,\omega)$, которые непрерывны по $(t,s)\in D$ как функции со значениями в $L^1(\Omega)$. $BC(L^1(\Omega))$ — банахово пространство относительно нормы $\|c\|=\sup\limits_D\int\limits_\Omega|c(t,s,\omega)|d\omega$.

Теорема. *Если $l,m,l'_t,m'_t\in BC(L^1(\Omega))$, а $n,n'_t\in BC(L^1(D))$, то при любой функции $f\in U$ уравнение* (1) *имеет в U единственное решение и оно может быть найдено методом итераций.*

Для уравнения (1) с непрерывными вместе с частными производными по t ядрами получена оценка приближённого решения в пространстве U.

Хорошо известно [1], что уравнение (1) с непрерывными ядрами имеет только нулевое суммируемое решение. Показано, что в случае непрерывных ядер оно может иметь несуммируемые решения.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Калитвин А. С.* Линейные операторы с частными интегралами. Воронеж: ЦЧКИ, 2000. 252 с.

2. *Калитвин А. С.*, *Фролова Е. В.* Линейные операторы с частными интегралами. C - теория. Липецк: ЛГПУ, 2004. 195 с.

3. *Калитвин А. С.*, *Калитвин В. А.* Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2007. 177 с.

Е. В. Бурцева (Ростов-на-Дону)
evg-burceva@yandex.ru

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИСТЕМ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, СУММИРУЕМЫХ С ПОКАЗАТЕЛЬНЫМИ ВЕСАМИ

УДК.517.9

В пространстве $\{\rho_2, \rho_1\}_p^2 \times \{\rho_4, \rho_3\}_p^2 \times ... \times \{\rho_{2n}, \rho_{2n-1}\}_p^2,\ j \in \overline{1, 2n}$, $1 \leq p < \infty$ рассмотрена система дискретных уравнений типа свертки, порождаемая оператором $\widehat{R}(a)$. Здесь через $\{\rho_{2j}, \rho_{2j-1}\}_p$ обозначено пространство последовательностей

$$f_j = \{f_{jk}\}_{k \in \mathbb{Z}},\ f_{jk} = \rho_{2j}^k (P_+ \widetilde{f}_j)_k + \rho_{2j-1}^k (P_- \widetilde{f}_j)_k,$$

где $\widetilde{f}_j = \{\widetilde{f}_{jk}\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_p(\mathbb{Z}), 1 \leq p < \infty,\ P_\pm \widetilde{f}_j = \{1/2(1 \pm sign\ k)\widetilde{f}_{jk}\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Матричный оператор $\widehat{R}(a)$ порядка $2n$ задается следующим образом:

$$\widehat{R}(a) = (R_{ij})_{i,j=1}^{2n},\ R_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j+1} P_- + (-1)^j C(a_i) P_-, & \text{если } j < i, \\ (-1)^j P_+ + (-1)^{j+1} C(a_i) P_+, & \text{если } j > i, \\ P_- + C(a_i) P_+, & \text{если } j = i = 2k-1, k \in \overline{1, n}, \\ P_+ + C(a_i) P_-, & \text{если } j = i = 2k, k \in \overline{1, n}. \end{cases}$$

Вектор $a = (a_1, a_2, ..., a_{2n}),\ \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in \{\rho_i, \rho_i\}_1$ называется символом оператора $\widehat{R}(a)$. Через $C(a_i)$ обозначается оператор дискретной свертки

$$C(a_i) f_j = \{\sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{i,k-s} f_{js}\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Для этой системы построена теория односторонней обратимости, найдены обратные операторы, описаны дефектные подпространства.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных операторов. Кишинев: Штиинца, 1973. 426 с.

2. *Дыбин В. Б., Бурцева Е. В.* Оператор краевой задачи Римана на кольце и его приложение к одному классу систем уравнений в дискретных свертках. // Труды научной школы И.Б.Симоненко. Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ. 2010. С. 79–92.

3. *Дыбин В. Б., Бурцева Е. В.* Оператор краевой задачи Римана на кольце и его приложение к одному классу систем уравнений в дискретных свертках // ЮФУ, Ростов-на-Дону, рук. Деп. в ВИНИТИ. 2011. № 361-В2011, от 22.07.11. 2011.

4. *Дыбин В. Б., Бурцева Е. В.* Задача Римана на системе концентрических колец и дискретные уравнения типа свертки // тез. докл. Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна - 2012». Воронеж, 2012. С. 58–61.

N. Vasilevski (CINVESTAV, Mexico)
nvasilev@math.cinvestav.mx

COMMUTATIVE ALGEBRAS OF TOEPLITZ OPERATORS IN ACTION

We will discuss a quite unexpected phenomenon in the theory of Toeplitz operators on the Bergman space: the existence of a reach family of commutative C*-algebras generated by Toeplitz operators with non-trivial symbols. As it tuns out the smoothness properties of symbols do not play any role in the commutativity, the symbols can be merely measurable. Everything is governed here by the geometry of the underlying manifold, the hyperbolic geometry of the unit disk.

These commutative algebras come with a powerful research tool, the spectral type representation for the operators under study. This permits us to answer to many important questions in the area.

А. В Гиль, В. А Ногин (Ростов-на-Дону)
gil-alexey@yandex.ru, vnogin@ns.math.rsu.ru

ОЦЕНКИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА С ОДНОРОДНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ И ОСОБЕННОСТЯМИ ЯДЕР НА СФЕРЕ [1]

Рассматриваются операторы

$$(A_\theta^\beta \varphi)(x) = \int\limits_{1-\delta\leqslant|t|\leqslant 1+\delta} \theta(t')(1-|t|^2+i0)^{\beta-1}\varphi(x-t)\,dt, \tag{1}$$

где $0<\beta<1$, $0<\delta<1$, $\theta(t')$ $\left(t'=\frac{t}{|t|}\right)$ — бесконечно дифференцируемая функция в $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, называемая характеристикой оператора

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Южного Математического Института Владикавказского научного центра РАН.

A_θ^β. Получены необходимые и достаточные условия ограниченности оператора A_θ^β из H^p в H^q и из H^p в BMO.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $0 < p \leq q < \infty$. Оператор A_θ^β ограничен из H^p в H^q тогда и только тогда, когда выполнены неравенства*

$$\frac{1}{p} - \frac{n}{q} \leq \beta, \text{ если } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 \quad \text{и} \quad \frac{n}{p} - \frac{1}{q} \leq \beta + n - 1, \text{ если } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1.$$

Теорема 2. *Оператор A_θ^β ограничен из H^p в BMO тогда и только тогда, когда*

$$\frac{1}{\beta} \leq p < \infty.$$

Аналоги теорем 1 и 2 были получены в [1]-[3] в случае, когда характеристика $\theta(t')$ заменена радиальной характеристика $\theta(t) = \theta(|t|)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гиль А. В, Ногин В. А* $H^p - H^q$ оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими символами // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. 2010. Т. 5. С. 8–13.

2. *Гиль А. В, Ногин В. А* Оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими символами // Владикавказский математический журнал. 2010. Т. 12, № 3. С. 22–31.

3. *Гиль А. В, Ногин В. А* Оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими символами // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естественные науки. Спецвыпуск. 2011. С. 26–27.

С. М. Грудский
(CINVESTAV, Mexico; ЮФУ, Ростов на Дону).
grudsky@math.cinvestav.mx

ОПЕРАТОР ФОКСА И ЛИ, ТЕОРИЯ ЛАЗЕРОВ И ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ ВИНЕРА - ХОПФА

В известной работе 1961 г. А. Г. Фокс и Т. Ли, при иследовании проблемы об импульсах лазера с помощью аппроксимационных соображений, пришли к задаче на собственные значения для интегрального уравнения Винера-Хопфа на конечном интервале с сильно осциллирущим символом вида

$$a(\lambda) = \exp\{i\, c\, \lambda^2\}, \quad c \in R.$$

Соответствующий оператор имеет бесконечное число собственных значений, расположенных вдоль некоторой спирали комплексной плоскости. Исследование спектра этого оператора привлекло внимание значительного числа математиков-вычислителей, особенно в случае большой длины интервала. Отметим, что теоретических результатов в этой области, до последнего времени, было очень немного. Это обстоятельство объясняется сильной осцилляцией простого на вид символа данного оператора.

В настоящей работе отмечается, что аппроксимация Фокса и Ли применима только для первых собственных значений. Если же мы хотим рассматривать задачу об исследовании всех собственных значений, то разумней исследовать оригинальный (до аппроксимации) оператор Винера-Хопфа, который имеет непрерывный, вплоть до бесконечно удаленной точки, символ на вещественной оси.

В качестве первого шага в этом направлении, мы приводим здесь решение задачи о нахождении равномерной асимптотики всех собственных значений и собственных функций оператора Винера-Хопфа на конечном интервале с четным, комплекснозначным, рациональным символом в случае, когда длина интервала стремится к бесконечности, и даем алгоритм построения любого числа членов асимптотического ряда. Также демонстрируем численные примеры, потверждающие высокую эффективность метода вычисления собственных чисел, основанного на полученных асимптотических формулах.

В. М. Деундяк (Ростов–на–Дону)
vlade@math.rsu.ru

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ

Гомотопические методы и методы операторной K-теории применяются к исследованию разрешимости сингулярных интегральных операторов в гильбертовых модулях и операторов типа свертки на абелевых локально компактных группах. Для C^*–алгебр многомерных бисингулярных операторов в гильбертовых модулях построено символическое исчисление, для операторов из этих алгебр получен критерий фредгольмовости в терминах обратимости операторнозначного символа, вычислен операторный K–функтор и найдены новые необходимые условия фредгольмовости. Для пространств фредгольмовых и обратимых операторов рассматриваемого класса проведена гомотопическая классификация, в терминах K–функтора вычислен индекс. Аналогичные результаты получены для операторов типа свертки и бисвертки на абелевых локально компактных группах. С помощью общих моделей локальной теории получены приложения к исследованию разрешимости операторов в парах пространств. На основе этих результатов в терминах K–функтора вычислен индекс непрерывных семейств многомерных сингулярных операторов и операторов типа свертки на абелевых локально компактных группах в L_p–пространствах. Установлены изоморфизмы подобия для ряда операторных алгебр, редуцирующие изучение одних классов операторов к другим. Обсуждается одна задача Н. К. Карапетянца об операторах с однородными ядрами.

Представленные результаты частично опубликованы в [1]–[4].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Deundyak V. M.* On the Index Theorem for Multi-dimensional Bisingular Integral Operators on Hilbert modules // Journal of Natural Geometry. 2001. V. 20. P. 2–22.

2. *Деундяк В. М.* Применение идеалов Никольского к исследованию разрешимости бисингулярных интегральных операторов // Известия вузов. Математика. 2004. № 9. С. 713-729.

3. *Deundyak V. M., Simonenko I. B.* On Homotopy Properties and Indices of Families of Singular and Bisingular Operators with PC–Coefficients // Jornal of Mathematical Sciences. 2005. V. 125, № 6. P. 1593–1599.

4. *Деундяк В. М.* Многомерные интегральные операторы с однородными ядрами компактного типа и мультипликативно слабо осциллирующими коэффициентами // Математические заметки. 2010. Т.87, № 5. С. 713-729.

В. Б. Дыбин (Ростов-на-Дону)
vladimir-dybin@yandex.ru

УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЁРТКИ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ СИМВОЛАМИ

Скалярные дискретные операторы типа свёртки: оператор свёртки $C(A)$, операторы Винера-Хопфа $W(A) = P_+C(A)P_+$, $\breve{W}(A) = P_-C(A)P_-$, составные операторы $\Pi(A_1, A_2) = P_+C(A_1) + P_-C(A_2)$, $\Pi^\tau(A_1, A_2) = C(A_1)P_+ + C(A_2)P_-$ - рассмотрены в пространствах $\{\alpha, \beta\}_\sigma$ последовательностей f суммируемых с показательными весами, $f = M_\alpha P_+\widetilde{f}$, $M_\alpha\widetilde{f} = \{\alpha^n\widetilde{f}_n,\ n \in Z\}$, $\widetilde{f} \in \sigma$, $\{\sigma\}-$ стандартный набор банаховых пространств М.Г.Крейна [1]. Символы операторов порождают две алгебры функций $W(\overline{K}^{\widehat{\alpha}^{-1}}_{\widehat{\beta}^{-1}})$, аналитических в кольце $K^{\widehat{\alpha}^{-1}}_{\widehat{\beta}^{-1}} = \{\widehat{\beta}^{-1} < |z| < \widehat{\alpha}^{-1}\}$ и имеющих предельные значения на границах кольца из винеровских алгебр $W(\Gamma_{\widehat{\alpha}^{-1}})$ и $W(\Gamma_{\widehat{\beta}^{-1}})$, $\widehat{\alpha} = min(\alpha, \beta)$, $\widehat{\beta} = max(\alpha, \beta)$. В отличие от безвесового случая построение теории нётеровости и теории односторонней обратимости начинается с операторов $W(A)$ и $\breve{W}(A)$, которые играют здесь системообразующую роль: в их терминах описаны критерии нётеровости остальных операторов, а сами они участвуют в построении обратных операторов соответствующего вида. Для каждого оператора получены критерии нётеровости, двусторонней, односторонней и обобщённой обратимости, найдены дефектные подпространства и конструкции обратных операторов. Последняя задача является нетривиальной в связи с тем, что символы нётеровых операторов могут обладать обширными нуль-множествами в своих областях аналитичности. Эти множества остаются «наблюдателями» при построении теории нётеровости оператора, но «решительно вступают в дело» при конструировании обратных операторов. В связи с этим вычислены нормы операторов двустороннего сдвига $V^{\pm 1}$ и на их основе построено операторное исчисление, аналогичное исчислению И.Ц. Гохберга[2]. Оно, в частности, обеспечивает проблему одностороннего обращения операторов свёртки с символами, имеющими вид квазиполиномов с нулями, лежащими в областях аналитичности алгебры $W(\overline{K}^{\widehat{\alpha}^{-1}}_{\widehat{\beta}^{-1}})$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // УМН.1958. Т. 13, вып.5. С. 3–120.

2. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М., 1971.

3. *Дыбин В. Б., Джиргалова С. Б.* Составные дискретные свертки в пространстве $\{\alpha, \beta\}_p, 1 \leq p \leq \infty$, Часть I,II // РГУ, Деп. ВИНИТИ 14.01.03. № 90 – В 2003, РГУ, Деп. ВИНИТИ 12.11.03. № 1946 В 2003.

С. А. Золотых, В. А. Стукопин (Ростов-на-Дону)
orakarate@mail.ru, stukopin@mail.ru

О ПОЛУАЛГЕБРАИЧНОСТИ ПРЕДЕЛЬНОГО СПЕКТРА ЛЕНТОЧНЫХ ТЕПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ [1]

Задача описания предельного спектра ленточных тёплицевых матриц была решена Ф. Спитцером и П. Шмидтом в [1] (см., также, [2], где приведено современное изложение описания предельного спектра). Они, в частности, доказали, что предельный спектр является объединением аналитических дуг. Здесь мы показываем, что предельный спектр может быть описан как совместное множества решений вещественных полиномиальных уравнений и неравенств. Другими словами, предельный спектр является полуалгебраическим множеством.

Для формулировки результата нам потребуются понятия пуассонова произведения $R^p(f_1,\dots,f_n,g)$ и результанта $R(f_1,\dots,f_n,g)$ в случае системы многочленов нескольких переменных (см., например, [3]). Нам, по существу, будет нужен только случай $n=2$.

Теорема 1. *Пусть* $f(z)=\sum_{k=-n}^{n}a_kz^k$ *— лорановский полином,* $Q(\lambda,z)=z^n(f(z)-\lambda)$, $Q_1(\lambda,x,y)=Re(Q(\lambda,x+iy)), Q_2(\lambda,x,y)=Im(Q(\lambda,x+iy)), g(u,z_1,z_2)=u-z_1^2-z_2^2$, $A(\lambda,u,z_1,z_2)=R(Q_1(\lambda,z_1,z_2),Q_2(\lambda,z_1,z_2),g(u,z_1,z_2))$. *Тогда, предельный спектр последовательности ленточных тёплицевых матриц* $T_n(f)$ *является подмножеством одномерного множества решений следующей системы полиномиальных уравнений и неравенств:*
$R(A,A'_u)=0, Im(z_1)=0, Im(z_2)=0, Im(u)=0, Re(u)\geq 0.$

Замечание. Можно получить и точное описание предельного спектра как полуалгебраического множества, но оно более громоздко и, по существу, является алгоритмом его нахождения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schmidt P., Spitzer F.* The Toeplitz matrices of an arbitrary Laurent polynomial// Math. Scand. 1960. V.8. - P.15 - 38.

2. *Bottcher A. C, Grudsky S. M.* Spectral properties of banded Toeplitz matrices. SIAM, 2005, 411.

3. *Bikker P., Uteshev A.* On the Bezout Construction of the Resultant. - J. Symbolic Computation. 28 (1999), 45–88.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"в рамках мероприятия 1.2.2 (госконтракт П1116).

А. С. Калитвин (Липецк)
kalitvinas@mail.ru

ОБ ОПЕРАТОРАХ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ДВУХ КЛАССАХ ИДЕАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ[1]

В работе изучаются операторы с частными интегралами вида

$$(Kx)(t,s) = \int\limits_T l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int\limits_S m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma +$$

$$+ \int_D\int n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma, \qquad (1)$$

где $t \in T = [a,b], s \in S = [c,d], D = T \times S$, l,m,n — заданные на $D{\times}T, D{\times}S, D{\times}D$ соответственно функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Пусть u_0 — некоторая положительная функция из $X = L^p(D)$ $(0 < p < 1)$, т.е. $u_0 \in X$ и $u_0(t,s) > 0$ почти всюду на D. Через E_{u_0} обозначим множество функций из X, удовлетворяющих неравенству $|x(t,s)| \le \lambda u_0(t,s)$, где постоянная λ зависит от x. E_{u_0} является банаховым идеальным пространством относительно нормы $\|x\|_{E_{u_0}} = \inf\{\lambda : |x(t,s)| \le \lambda u_0(t,s), x \in L^p(D), 0 < p < 1\}$.

Примеры показывают, что однородные уравнения Вольтерра с частными интегралами и непрерывными ядрами могут иметь в $H = E_{u_0}$ ненулевые решения, а соответствующие уравнениям операторы действуют в H, в $G = L^p(D)(1 \le p \le \infty)$ и не действуют в X. Поэтому для нахождения множества решений уравнения $x = Kx + f$ полезно использовать более широкие пространства, например, сумму Z пространств G и H, в которых действует оператор (1), где под суммой $Z = G + H$ пространств G и H понимается множество функций z, представимых в виде суммы $g + h$, где $g \in G$, а $h \in H$. При этом Z является банаховым идеальным пространством относительно нормы $\|z\| = \inf\{\|g\|_G + \|h\|_H : z = g + h, g \in G, h \in H\}$.

Теорема. *Если оператор K действует из $H = E_{u_0}$ в $H_1 = E_{u_1}$, где E_{u_1} определяется аналогично E_{u_0}, или действует из $Z = G + H$ в $Z_1 = G_1 + H_1$, где $G_1 = L^{p_1}(D)(1 \le p_1 \le \infty)$, то оператор K непрерывен, имеет двойственный оператор, а регулярность оператора K означает действие в рассматриваемых пространствах оператора (1) с функциями $|l|, |m|, |n|$ вместо функций l, m, n.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки (проект 01-2011-51784).

В. А. Калитвин (Липецк)
kalitvin@gmail.com

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЧАСТИЧНО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ УРЫСОНА[1]

Рассматривается обратимое в пространстве $C(D)$ - непрерывных на $D = [a, b] \times [c, d]$ функций частично интегральное уравнение

$$x(t, s) = \int\limits_a^b l(t, s, \tau, x(\tau, s))d\tau + f(t, s) \equiv (Lx)(t, s) + f(t, s), \qquad (1)$$

где $l(t, s, \tau, u)$ и $f(t, s)$ — заданные на $G = D \times [a, b] \times R^1$ и D соответственно непрерывные функции. Хорошо известно, что L — не вполне непрерывный оператор в $C(D)$, а уравнение (1) принципиально отличается от обычных интегральных уравнений Урысона. Поэтому применение к уравнению (1) известных методов исследования интегральных уравнений, включая приближенные и численные методы решения, требует обоснования. Следующая теорема содержит условия применимости к уравнению (1) метода механических квадратур.

Теорема. *Пусть $x_0(t, s)$ — решение уравнения (1). Если в квадратурной формуле*

$$\int\limits_a^b l(t, s, \tau, x(\tau, s))d\tau = \sum_{k=1}^n \alpha_k l(t, s, t_k, x(t_k, s)) + \rho(t, s)$$

остаток $\rho(t, s) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно относительно (t, s) для любой функции $x \in C(D)$, $\alpha_k \geq 0$, $\sum\limits_{k=1}^n \alpha_k = b - a$, существует непрерывная на G частная производная $l'_u(t, s, \tau, u)$ и уравнение $y(t, s) = \int\limits_a^b l'_u(t, s, \tau, x_0(\tau, s))y(\tau, s))d\tau$ имеет только нулевое решение, то при достаточно больших n существует единственное решение системы

$$x_i(s) = \sum_{k=1}^n \alpha_k l(t, s, t_k, x_k(s)) + f(t_i, s), i = 1, \ldots, n,$$

определена функция $x_n(t, s) = \sum\limits_{k=1}^n \alpha_k l(t, s, t_k, x_k(s)) + f(t, s)$, причем $\|x_0 - x_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, где норма берется в $C(D)$.

Таким образом, приближенное решение x_n $(n = 1, 2, \cdots)$ сходится при $n \to \infty$ к решению x_0 уравнения (1) в $C(D)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки (проект 01-2011-51784).

Yu. I. Karlovich (Cuernavaca, México)
karlovich@uaem.mx

ALGEBRAS OF CONVOLUTION TYPE OPERATORS WITH PSO DATA[1]

Applying the theory of pseudodifferential and Calderón-Zygmund operators, we study the compactness of commutators of multiplication operators aI and convolution operators $W^0(b)$ on weighted Lebesgue spaces $L^p(\mathbb{R}, w)$ with $p \in (1, \infty)$ and Muckenhoupt weights w for some classes of piecewise slowly oscillating functions $a \in PSO^\diamond$ and $b \in PSO^\diamond_{p,w}$ on the real line $\mathbb{R}$. Then we study the Banach algebras $\mathcal{Z}_{p,w}$ and $\mathfrak{A}_{p,w}$ generated by the operators $aW^0(b)$ on the space $L^p(\mathbb{R}, w)$ with functions $a \in SO^\diamond$ and $b \in SO^\diamond_{p,w}$ admitting slowly oscillating discontinuities at any point $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ and, respectively, with functions $a \in PSO^\diamond$ and $b \in PSO^\diamond_{p,w}$ admitting piecewise slowly oscillating discontinuities at any point $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Applying the method of limit operators under some condition on Muckenhoupt weights w, we describe the maximal ideal space Ω of the commutative quotient Banach algebra $\mathcal{Z}^\pi_{p,w} = \mathcal{Z}_{p,w}/\mathcal{K}_{p,w}$, where $\mathcal{K}_{p,w}$ is the ideal of compact operators on $L^p(\mathbb{R}, w)$ and define the Gelfand transform for $\mathcal{Z}^\pi_{p,w}$. Making use of the Allan/Douglas local principle with respect to points $\omega \in \Omega$, the two idempotents theorem and the limit operators techniques, we construct a Fredholm symbol calculus for the Banach algebra $\mathfrak{A}_{p,w}$ and establish the Fredholmness for the operators $A \in \mathfrak{A}_{p,w}$ in terms of their Fredholm symbols being 2×2 matrix functions defined on a set shape of which depends on p, w and properties of a and b.

The talk is based on a joint work with Iván Loreto Hernández.

А. В. Козак, Д. В. Позняк (Ростов-на-Дону)
avkozak@aaanet.ru, poznyak_denis@mail.ru

О НЁТЕРОВОСТИ ОПЕРАТОРОВ СВЁРТКИ В ПОЛОГИХ ОБЛАСТЯХ

В статье [1] авторами были получены достаточные условия равномерной обратимости интегральных операторов свёртки в некотором классе пологих областей многомерного евклидового пространства E_m. В настоящей работы методы этой статьи применены к исследованию нётеровости тех же операторов в классе областей, аналогичном рассматриваемому в [1]. Сформулируем основной результат.

[1] Partially supported by the SEP-CONACYT Project No. 168104 (México) and by PROMEP (México) via “Proyecto de Redes”.

Пусть r, δ - положительные вещественные числа. Через $\mathfrak{M}(r, \delta)$ обозначим множество всех подмножеств M m-мерного евклидова пространства E_m, для каждого из которых существует $\sigma > 0$, такое что для любой точки $x \in E_2 \backslash B(0, \sigma)$ существуют C^1-диффеоморфизм ω шара $B(x, r)$ и полупространство Π, удовлетворяющие условиям:

1) $\omega(M \cap B(x, r)) = \Pi \cap B(x, r)$;

2) $\|\omega'(y) - I\| \leqslant \delta$ для всех $y \in B(x, r)$.

Теорема. *Пусть* $a \in L_1(E_m)$ *и*

$$1 - \int\limits_{E_m} a(y) e^{i(\lambda, y)} dy \neq 0 \quad (\lambda \in E_m).$$

Тогда существуют положительные константы r, δ, c *такие, что для любого* $M \in \mathfrak{M}(r, \delta)$ *у оператора*

$$(A_M f)(x) = f(x) - \int\limits_M a(x - y) f(y) dy,$$

действующего в пространстве $L_p(M)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$, *существует двусторонний регуляризатор* R_M *и* $\|R_M\| \leqslant c$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козак А. В., Симоненко И. Б.* Обратимость операторов свёртки в больших областях // Математические исследования, Кишинев. 1980. № 54. С. 56—66.

2. *Симоненко И. Б.* Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений, I // Изв. АН СССР, сер. мат., 29, вып.2, 1965, С. 567—586.

С. Н. Мелихов (Ростов-на-Дону, Владикавказ)
melih@math.rsu.ru

ПРОСТРАНСТВА КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ И ПРОЕКТИВНЫЕ ОПИСАНИЯ

Пусть G – открытое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^N$; $A(G)$ – пространство всех вещественно аналитических функций в G, наделенное естественной топологией проективного предела последовательности (LB)-пространств. Сильное сопряженное $A(G)'_b$ к $A(G)$ посредством преобразования Фурье-Лапласа топологически изоморфно весовому (LF)-пространству $\mathcal{F}A'(G)$ целых функций в $\mathbb{C}^N$. Л. Эренпрайс показал, что топология $\mathcal{F}A'(G)$ не может быть задана ассоциированными весовыми sup-нормами.Позднее проблема проективного описания индуктивных пределов последовательности весовых пространств Фреше целых функций исследовалась многими авторами. Другими словами, для весового индуктивного предела и его проективной оболочки, являющейся пересечением весовых банаховых пространств, исследовался вопрос о топологическом или алгебраическом совпадении этого индуктивного предела с его проективной оболочкой.

Мы показываем, что (LF)-пространство $\mathcal{F}A'(G)$ совпадает со своей проективной оболочкой алгебраически. Существенную роль в доказательстве играет теорема Фрагмена-Линделефа, установленная Л. И. Ронкиным для плюрисубгармонических функций нормального типа при порядке 1.

Подобный результат получен также для пространства $\mathcal{E}'_{\{\omega\}}(G)$ квазианалитических функционалов, где $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(G)$ обозначает пространство всех ω-ультрадифференцируемых функций типа Румье на G, заданное квазианалитической весовой функцией ω. Точнее, доказано, что (LF)-пространство $\mathcal{F}\mathcal{E}'_{\{\omega\}}(G)$ целых в $\mathbb{C}^N$ функций, топологически изоморфное посредством преобразования Фурье-Лапласа сильному сопряженному $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(G)'_b$, совпадает со своей проективной оболочкой алгебраически. Важную роль при этом играет результат Р. Майзе и Т. Хайнриха о носителе квазианалитического функционала. Х. Бонетом и Р. Майзе было показано, что индуктивная топология в $\mathcal{F}\mathcal{E}'_{\{\omega\}}(G)$ строго сильнее топологии его проективной оболочки.

Е. И. Мирошникова (Ростов-на-Дону)
elenmiroshnikova@gmail.com

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть $\mathfrak{W}_{n;2}$ — C^*–алгебра действующих в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ многомерных интегральных операторов с однородными степени $(-n)$ ядрами компактного типа:

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(x,y)\varphi(y)dy$$

и мультипликативно слабо осциллирующими коэффициентами [1].

В работе строится некоторый аналог интегрального преобразования Фурье–Мелина $\Phi_n : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ (см., например, [2], [3]), который на соответствующем классе гладких функций определяется равенством:

$$(\Phi_n(\varphi))(\zeta) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{-i\ln|\zeta|}(|\zeta||x|)^{-\frac{n}{2}}\delta_{\frac{\zeta}{|\zeta|}}(\frac{x}{|x|})\varphi(x)dx,$$

где δ_s — обобщенная функция Дирака на сфере S_{n-1} с носителем в точке $s(\in S_{n-1})$. С помощью Φ_n вводится новая шкала пространств типа Соболева и исследуются псевдодифференциальные аналоги операторов из C^*–алгебры $\mathfrak{W}_{n;2}$. Для этих псевдодифференциальных операторов получены условия ограниченности и разрешимости.

Эти результаты распространяются на псевдодифференциальные аналоги операторов с анизотропно однородными ядрами компактного типа [4].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Деундяк В. М.* Многомерные интегральные операторы с однородными ядрами компактного типа и мультипликативно слабо осциллирующими коэффициентами // Математические заметки. 2010. Т. 87, № 5. С. 713–729.

2. *Пламеневский Б. А.* Алгебры псевдодифференциальных операторов. М.: Наука, 1986.

3. *Rabinovich V., Roch S., Silbermann B.* Limit Operators and their Applications in Operator Theory. Boston–Basel–Berlin: Birkhauser, 2004.

4. *Деундяк В. М., Мирошникова Е. И.* Об ограниченности и фредгольмовости интегральных операторов с анизотропно однородными ядрами компактного типа и переменными коэффициентами // Известия вузов. Математика. 2012 (в печати).

А.Э. Пасенчук (Новочеркасск)
pasenchuk@mail.ru

О НЕТЕРОВОСТИ ОДНОГО КЛАССА ДВУМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТЕПЛИЦА В ПРОСТРАНСТВЕ ГЛАДКИХ НА ТОРЕ ФУНКЦИЙ

Пусть $\Gamma = \{\xi \in C : |\xi| = 1\}$, $\Gamma^2 = \Gamma\times\Gamma$. Обозначим через $C_\infty\left(\Gamma^2\right)$ счетно-нормированное пространство гладких на торе Γ^2 функций с естественной топологией, а через $C_\infty^{++}\left(\Gamma^2\right)$ - его подпространство, состоящее из функций, аналитически продолжимых в область

$\{|\xi| < 1, \quad |\eta < 1|\} \subset C^2$.

Оператор проектирования $C_\infty\left(\Gamma^2\right)$ на $C_\infty^{++}\left(\Gamma^2\right)$ обозначим через

P^{++}:$P^{++}\left(\sum_{(k,j)\in Z^2}\varphi_{kj}\xi^k\eta^j\right) = \sum_{(k,j)\in Z_+^2}\varphi_{kj}\xi^k\eta^j$, где Z - группа целых чисел, а $Z_+ = \{k \in Z : k \geq 0\}$.

Рассмотрим функцию $a(\xi,\eta) = \alpha\xi^{-1}\eta + \beta + \gamma\xi\eta^{-1}$ и связанный с ней тригонометрический полином $p(t) = \alpha t + \beta + \gamma t^{-1}$. Пусть $t_1,\ t_2$ - корни этого полинома.

В этом докладе рассматривается оператор Теплица
$T = P^{++}\left(a(\xi,\eta)\right)^{-1}\Big|_{ImP^{++}},\quad T : C_{\infty}^{++}\left(\Gamma^2\right) \to C_{\infty}^{++}\left(\Gamma^2\right)$.

Теорема 1. *Оператор Теплица T ограничен в пространстве $C_{\infty}^{++}\left(\Gamma^2\right)$ тогда и только тогда, когда корни полинома $p(t)$ не удовлетворяют условиям $t_1 = t_2^{-1},\quad |t_1| = |t_2| = 1$.*

Теорема 2. *Пусть оператор T ограничен в пространстве $C_{\infty}^{++}\left(\Gamma^2\right)$. Тогда для него следующие условия равносильны:*

1. *оператор T нетеров в пространстве $C_{\infty}^{++}\left(\Gamma^2\right)$,*
2. *оператор $C_{\infty}^{++}\left(\Gamma^2\right)$ обратим в пространстве $C_{\infty}^{++}\left(\Gamma^2\right)$,*
3. *корни полинома $p(t)$ таковы, что $|t_1| \le 1,\quad |t_2| \ge 1$.*

В случае выполнения условий теоремы получена конструкция обратного оператора.

В. С. Пилиди (Ростов-на-Дону)
pilidi@sfedu.ru

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ, СУММИРУЕМЫХ С ПЕРЕМЕННОЙ СТЕПЕНЬЮ

В докладе рассматриваются утверждения о равносильности фредгольмовости и наличия одной или нескольких априорных оценок для операторов некоторых классов. Рассматриваются сингулярные интегральные операторы с непрерывными коэффициентами и коэффициентами, имеющими разрывы почти-периодического типа, в классических L_p-пространствах. В этом случае фредгольмовость оказывается равносильной наличию априорных оценок, в которых участвуют только L_p-нормы. Для операторов, действующих в тензорных произведениях гильбертовых пространств, фредгольмовость равносильна четырем априорным оценкам смешанного типа.

Рассмотрим случай сингулярных интегральных операторов, действующих в пространствах функций, суммируемых с переменной степенью.

Пусть Γ — контур в комплексной плоскости, состоящий из конечного числа простых замкнутых попарно не пересекающихся кривых, удовлетворяющих условию Ляпунова. Предположим, что функции p, p_1 определены на Γ и удовлетворяют ослабленному условию Липшица, для всех $t \in \Gamma$ выполняется неравенство $1 < p_1(t) \leqslant p(t)$ и множество $\{t : t \in \Gamma, p_1(t) < p(t)\}$ является всюду плотным в Γ. Подчеркнем, что в данном случае вложение $L_{p(\cdot)}(\Gamma) \subset L_{p_1(\cdot)}(\Gamma)$ не является компактным.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Предположим, что a, $b \in C(\Gamma)$, T — компактный оператор в пространстве $L_{p(\cdot)}(\Gamma)$. Оператор $A = aI + bS + T$ является Φ-оператором в пространстве $L_{p(\cdot)}(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда выполняется априорная оценка*

$$\|\varphi\|_{p(\cdot)} \leqslant \mathrm{const}(\|A\varphi\|_{p(\cdot)} + \|\varphi\|_{p_1(\cdot)}), \quad \varphi \in L_{p(\cdot)}(\Gamma).$$

Приведенное утверждение может быть перенесено на случай сингулярных интегральных операторов с непрерывными матричными коэффициентами, действующих в соответствующих пространствах вектор-функций.

N. Samko (Faro, Portugal)
nsamko@gmail.com

WEIGHTED HARDY-TYPE OPERATORS IN VANISHING MORREY SPACES

In this talk we discuss $p \to q$-boundedness of the multi-dimensional Hardy type operators in the vanishing local generalized Morrey spaces $V\mathcal{L}^{p,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, w)$ defined by an almost increasing function $\varphi(r)$ and radial type weight $w(|x|)$. We obtain sufficient conditions, in terms of some integral inequalities imposed on φ and w, for such a boundedness. In the case where the function $\varphi(r)$ and the weight are power functions, these conditions are also necessary.

С. Г. Самко (Faro, Portugal)
ssamko@ualg.pt

ОПЕРАТОРЫ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА В ПРОСТРАНСТВАХ ЛИПЩИЦА НА КВАЗИМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ

Известно решение задачи классического анализа о действии операторов типа потенциала в рамках пространств Липшица=Гельдера в рамках множеств, обладающих так называемым «cancelation property» например, для всего пространства $\mathbb{R}^n$ или для сферы. Области в $\mathbb{R}^n$ таким свойством не обладают, так как гладкость потенциала, вообще говоря, ухудшается при приближении к границе.

Мы рассматриваем эту задачу на произвольном ограниченном множестве квазиметрического пространства с мерой, удовлетворяющей так называемому условию роста и показываем, что соответсвующий оператор типа потенциала отображает гельдеровские функции, зануляющиеся на границе, в гельдеровские функции порядка больше, чем исходный, на порядок потенциала.

Это доказывается в более общей постановке, в рамках обобщенных пространств Гельдера с заданной доминантой модуля непрерывности. При отсутствии «cancelation property» наше доказательство основывается на исследовании потенциала с постоянной плотностью. В частности, показывается, что, например в случае любой области в $\mathbb{R}^n$ такой потенциал ведет себя как степень расстояния до границы, с показателем, равным порядку потенциала. Дается также приложение к областям на сфере.

И. Ю. Смирнова, А. Н. Карапетянц (Ростов-на-Дону)
inf@sfedu.ru

О СВЯЗИ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ БЕРГМАНА СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ С ПРОСТРАНСТВАМИ ХАРДИ

Начиная с работ С. Бергмана и М. М. Джрбашяна, пространства аналитических p - суммируемых по отношению к σ - конечной мере функций на открытом связном множестве в комплексной плоскости интенсивно изучались в работах многих авторов. Нас будут интересовать весовые пространства Бергмана на единичном диске D и верхней полуплоскости Π со смешанной нормой. Например, в случае единичного диска D пространство $L^{2,p}_{\lambda}(D)$, $\lambda > -1$ есть пространство измеримых функций $f(z) = f(rt)$ на D для которых конечна норма

$$\|f\|_{L^{2,p}_{\lambda}(D)} = \left(\int_T \left| \int_0^1 |f(rt)|^p \nu_\lambda(r) r dr \right|^{\frac{2}{p}} \frac{1}{\pi} \ d\sigma(t) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $d\sigma(t) = \frac{dt}{it}$ — дифференциал единичной окружности, и обозначено $\nu_\lambda(r) = (\lambda+1)(1-r^2)^\lambda, \quad \lambda > -1$. Весовое пространство Бергмана $A^{2,p}_{\lambda}(D)$ со смешанной нормой является замкнутым подпростраством пространства $L^{2,p}_{\lambda}(D)$, состоящим из аналитических в D функций. Понятно, что при изучении аналитических p - суммируемых функций основное внимание должно быть уделено поведению функции при приближении к границе области. Введение смешанной нормы позволяет особо выделить поведение функции при приближении к границе. В последствии, естественно, необходимо исследование как отдельных операторов Теплица в весовых пространствах Бергмана со смешанной нормой, так и порождаемых этими операторами C^* - алгебр. Это является непосредственным продолжением исследований в работах Н. Л. Василевского, С. М. Грудского и А. Н. Карапетянца. Но в рамках данного сообщения остановимся на частном вопросе — связи весовых пространств Бергмана (аналитического и антианалитического) $A^{2,p}_{\lambda}(D)$, $\widetilde{A}^{2,p}_{\lambda}(D)$ и $A^{2,p}_{\lambda}(\Pi)$, $\widetilde{A}^{2,p}_{\lambda}(\Pi)$ с соответствующими пространствами Харди $H^2_+(T)$, $H^2_-(T)$ и $H^2_+(R)$, $H^2_-(R)$.

С. М. Умархаджиев (Грозный)
umsalaudin@gmail.com

ОБОБЩЁННЫЕ ГРАНД-ПРОСТРАНСТВА МОРРИ

Пусть $1 \le p < \infty$, $0 \le \lambda < 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ открытое множество и w – вес на Ω. Классическое весовое пространство Морри обозначается через $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega, w)$ и определяется нормой

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega,w)} := \sup_{x\in\Omega, r>0} |B(x,r)|^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L^p(\widetilde{B}(x,r),w)},$$

где $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ |y-x| < r\}$, $\widetilde{B}(x,r) = B(x,r) \cap \Omega$.

Обобщённые гранд-пространства Морри с весом $\mathcal{L}^{p),\lambda_\alpha}(\Omega, w_a)$ введены с изменением трёх характеристик: показателя p, веса w и показателя Морри λ.

О п р е д е л е н и е. Пусть $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ и w – вес на Ω. Пространство $\mathcal{L}^{p),\lambda_\alpha}(\Omega, w_a)$ есть множество функций $f : \Omega \to R$ с конечной нормой

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{p),\lambda_\alpha}(\Omega,w_a)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{\mathcal{L}^{p-\varepsilon,\lambda+\alpha\varepsilon}(\Omega,wa^\varepsilon)},$$

где α – некоторое действительное число и a – неотрицательная функция на Ω.

В работе [1] доказана весовая интерполяционная теорема для операторов, действующих пространства Лебега в пространство Морри. Посредством этой теоремы и по схеме доказательства ограниченности линейных операторов в гранд-пространствах Лебега (см. [2]) получена

Т е о р е м а. Пусть линейный оператор T ограничен из пространства Лебега $L^p(\Omega, w)$ в пространство Морри $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega, w)$ и из пространства $L^{p-\varepsilon_0}(\Omega, wa^{\varepsilon_0})$ в пространство $\mathcal{L}^{p-\varepsilon_0,\lambda+\alpha\varepsilon_0}(\Omega, wa^{\varepsilon_0})$ для некоторых чисел $\varepsilon_0 \in (0, p-1)$, $\alpha \in R$ и неотрицательной на Ω функции a. Тогда T также ограничен из обобщённого гранд-пространства Лебега с весом $L^{p)}(\Omega, w_a)$ в обобщённое гранд-пространство Морри с весом $\mathcal{L}^{p),\lambda_\alpha}(\Omega, w_a)$, где $-\frac{\lambda}{p} \leq \alpha < \frac{1-\lambda}{p}$ и $a \in \mathcal{L}^{p,\lambda+\alpha p}(\Omega, w)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Umarkhadzhiev S. M.* Riesz-Thorin-Stein-Weiss interpolation theorem in a Lebesgue-Morrey setting// in print Operator Theory: Advances and Applications (Birkhauser Verlag, Basel/Switzerland). 2011.

2. *Samko S. G, Umarkhadzhiev S. M.* On Iwaniec-Sbordone spaces on sets which may have infinite measure// Azerbaijan Journal of Mathematics. V. 1, No 1, 2011, P. 67–84.

А. А. Шкаликов (Москва)
ashkalikov@yahoo.com

ВОЗМУЩЕНИЯ САММОСОПРЯЖЕННЫХ И НОРМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ. БАЗИСЫ РИССА И ТЕОРЕМЫ О СРАВНЕНИИ СПЕКТРОВ

Изучаются операторы вида $A = T + B$, где T (для определенности) положительный самосопряженный оператор с дискретным спектром, а B является локально подчиненным оператору T^α при некотором $\alpha < 1$. При некоторых соотношениях между α и показателем плотности распепределения собственных значений оператора T устанавлиаются теоремы о базисности и безусловной базисности собственных функций возмущенного оператора $A = T + B$, а также теоремы о сравнении спектров операторов A и T. Результаты усиливают известные теоремы А. С. Маркуса и В. И.Мацаева. В доказательстве используется теория сингулярных интегралов на комплексных кривых.

Секция II
Теория функций

Д. А. Абанина, А. В. Кузьминова (Ростов-на-Дону)
abanina@math.rsu.ru, kuzminova.alina@rambler.ru

ТЕОРЕМА ДЕЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМОМ НЕРАДИАЛЬНЫМ ДВУЧЛЕННЫМ ВЕСОМ

Рассматривается индуктивное пространство целых функций

$$H^{p,\infty}_{u,v} = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}: \ \|f\|_n = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{p_n u(|z|)+nv(|\operatorname{Im} z|)}} < \infty \right\},$$

задаваемое последовательностью $p_n u(|z|) + nv(|\operatorname{Im} z|)\,, n \in \mathbb{N}$, нерадиальных двучленных весов. Здесь $0 < p_n \uparrow p < \infty$; $u(t)$, $v(t)$ — некоторые весовые функции.

Установлено, что мультипликаторами пространства $H^{p,\infty}_{u,v}$ являются все целые функции $\mu(z)$, для которых выполнено условие

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n \in \mathbb{N}\,, \ \exists C > 0 : \quad |\mu(z)| \le C\, e^{\varepsilon u(|z|)+nv(|\operatorname{Im} z|)}\,, \ \forall z \in \mathbb{C}\,,$$

причем для каждого такого мультипликатора оператор умножения $\Lambda_\mu : f \mapsto \mu f$ действует непрерывно в $H^{p,\infty}_{u,v}$.

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Пусть $v(t)$ — правильно меняющаяся функция порядка 2, а $\mu(z)$ — произвольный нетривиальный мультипликатор пространства $H^{p,\infty}_{u,v}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) оператор Λ_μ имеет замкнутый образ в $H^{p,\infty}_{u,v}$;

(ii) μ — делитель $H^{p,\infty}_{u,v}$, т. е. если $f \in H^{p,\infty}_{u,v}$, $\frac{f}{\mu} \in H(\mathbb{C})$, то $\frac{f}{\mu} \in H^{p,\infty}_{u,v}$;

(iii) $\forall \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists r_0 > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R}$ с $|x| \ge r_0\, \exists t \in \mathbb{R}$:

$$|t - x| \le \delta v^{-1}(u(x)) \ \text{и}\ |\mu(t)| \ge e^{-\varepsilon u(t)}\,.$$

Ранее аналогичные задачи решались в [1] для классической алгебры целых функций, задаваемой весами $n\ln(1+|z|)+n|\operatorname{Im} z|$, $n \in \mathbb{N}$. В дальнейшем в [2] и [3] соответственно изучались случаи весов $nu(|z|) + nv(|\operatorname{Im} z|)$ и $p_n u(|z|) + n|\operatorname{Im} z|$, $p_n \uparrow p < \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ehrenpreis L.* Solution of some problems of division // Amer. J. Math. 1960. V. 82. P. 522–588.

2. *Momm S.* Closed principal ideals in nonradial Hörmander algebras // Arch. Math. 1992. V. 58. P. 47–55.

3. *Абанин А. В., Абанина Д. А.* Теорема деления в некоторых весовых пространствах целых функций // Владикавк. мат. журн. 2010. Т. 12, вып. 3. С. 3–21.

А. В. Абанин (Ростов-на-Дону, Владикавказ)
abanin@math.rsu.ru

КАНОНИЧЕСКИЕ ВЕСОВЫЕ СИСТЕМЫ В ТЕОРИИ РОСТА ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЙ

Для эффективного решения многих задач, связанных с весовыми шкалами голоморфных функций, требуется оптимальным образом выбрать достаточный класс канонических весов. Именно, нужно взять такой максимально узкий класс весов с регулярными свойствами (гладкость, выпуклость какого-либо типа и т.п.), чтобы с его помощью можно было определить любое из пространств шкалы. Степень решения данной проблемы в значительной мере определяет успех изучения большинства задач, исследуемых с помощью или в рамках весовых функциональных пространств. Априорные свойства весов позволяют судить об алгебраических и топологических свойствах пространств и, тем самым, полнее использовать мощные результаты современного функционального, вещественного и комплексного анализа.

В докладе будет дан обзор имеющихся результатов (см., в частности, [1], [2]) и нерешенных проблем по следующим направлениям, непосредственно связанным с классами оптимальных весов и весовых систем:

1. Канонические весовые системы для пространств проективного и индуктивного типов.
2. Разрешимость неоднородного уравнения Коши-Римана в весовых классах.
3. Продолжение целых функций с подпространств с сохранением оценок роста.
4. Теория функций регулярного роста.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bierstedt K. D., Bonet J., Taskinen J.,* Associated weights and spaces of holomorphic functions // Studia Math. 1998. V. 127, № 2. P. 137–168.

2. *Abanin B. V., Pham Trong Tien.* Continuation of holomorphic functions with growth conditions and some of its applications // Studia Math. 2010, V. 200, № 3. P. 279–295.

А. В. Абанин, П. С. Сергунин (Ростов-на-Дону)
abanin@math.rsu.ru, paviol88@mail.ru

КРИТЕРИЙ ИЗОМОРФНОСТИ ПРОСТРАНСТВ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ТИПА БЕРЛИНГА

Рассматривается задача об изоморфной классификации пространств ультрадифференцируемых функций, задаваемых неубывающими каноническими весовыми последовательностями (по поводу канонических весов см. [1, п. 1.3.3]) С каждой такой последовательностью $\Phi = (\varphi_n)$ свяжем пространство

$$\mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^{\infty}(\mathbb{R}) : |f|_{\varphi_n} := \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \sup_{|x| \le n} \frac{|f^{(j)}(x)|}{e^{\varphi_n^*(j)}} < \infty, \ \forall n \in \mathbb{N} \right\},$$

наделенное топологией пространства Фреше, задаваемой набором преднорм $(|\cdot|_{\varphi_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Здесь $\varphi_n^*(s) := \sup\{ts - \varphi_n(t) : t \ge 0\}$– функция, сопряженная с φ_n по Юнгу. $\mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R})$ называется пространством ультрадифференцируемых функций типа Берлинга.

Постановка задачи такова. Пусть мы имеем два пространства $\mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E}_{(\Psi^*)}(\mathbb{R})$. Требуется найти необходимые и достаточные условия на весовые последовательности Φ и Ψ, при которых эти пространства топологически изоморфны.

Напомним, что Φ и Ψ называют эквивалентными ($\Phi \sim \Psi$), если

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists m \in \mathbb{N}, \ \exists C_n > 0 : \ \psi_n(t) \le \varphi_m(t) + C_n, \ t \ge 0;$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists m \in \mathbb{N}, \ \exists C_n > 0 : \ \varphi_n(t) \le \psi_m(t) + C_n, \ t \ge 0.$$

В докладе представлен следующий результат, полученный при дополнительных технических ограничениях на весовые последовательности.

Критерий изоморфности. $\mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{E}_{(\Psi^*)}(\mathbb{R}) <=> \Phi \sim \Psi$.

Отсюда следует, что пространства $\mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E}_{(\Psi^*)}(\mathbb{R})$ топологически изоморфны тогда и только тогда, когда они совпадают.

Ранее в [1, п. 6.4] аналогичный результат был получен для весовых последовательностей специального вида $\Phi = (n\varphi)$ и $\Psi = (n\psi)$.

Как и в [1], критерий был установлен за счет использования классического топологического инварианта — диаметральной размерности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абанин А. В.* Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения. М.: Наука, 2007. 222 с.

С. С. Волосивец (Саратов), Б. И. Голубов (Долгопрудный)
volosivetsss@mail.ru, golubov@mail.mipt.ru

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ И СИММЕТРИЧЕСКАЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ СИНУС- И КОСИНУС-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ[1]

Пусть функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ интегрируема по Лебегу на $\mathbb{R}_+$ ($f\in L(\mathbb{R}_+)$), где $\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$. Тогда ее косинус- и синус-преобразования Фурье при $x\in\mathbb{R}$ задаются равенствами
$\hat{f}_c(x)=(2/\pi)^{1/2}\int_{\mathbb{R}_+}f(t)\cos xt\,dt$; $\hat{f}_s(x)=(2/\pi)^{1/2}\int_{\mathbb{R}_+}f(t)\sin xt\,dt$.

Теорема Пэли. *Если ряд Фурье* $a_0/2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ *непрерывной* 2π*-периодической функции* f *имеет неотрицательные коэффициенты, то он сходится равномерно на* $\mathbb{R}$ *к этой функции.* (См., например, [1], с. 277).

Следующую теорему можно считать аналогом теоремы Пэли для косинус- и синус-преобразований Фурье.

Теорема 1. *Пусть функция* $f\in L(\mathbb{R}_+)$ *равномерно непрерывна на* $\mathbb{R}_+$*, причем* $\int_0^x f(t)\,dt\in L(\mathbb{R}_+)$*. Тогда если* $\hat{f}_c(t)\ge 0$ *или* $\hat{f}_s(t)\ge 0$ *на* $\mathbb{R}_+$*, то* $f(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}(2/\pi)^{1/2}\int_0^y\hat{f}_c(t)\cos xt\,dt$*, соответственно,* $f(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}(2/\pi)^{1/2}\int_0^y\hat{f}_s(t)\sin xt\,dt$ *равномерно относительно* $x\in\mathbb{R}_+$.

Для $m\in\mathbb{N}$ рассмотрим m-ю симметрическую разность $\Delta_h^m f(x)=\sum\limits_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j}f(x+(m-2j)h/2)$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{h\to0}h^{-m}\Delta_h^m f(x)=A$, то говорят, что функция f в точке x имеет симметрическую производную Шварца порядка m, равную A. Известно, что если в точке x_0 у функции f существует обычная производная

[1]Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270а), работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00321).

$f^{(m)}(x_0)$ порядка m, то в этой точке у нее существует и симметрическая производная Шварца порядка m, равная $f^{(m)}(x_0)$. Обратное утверждение неверно.

Теорема 2. *Пусть* $f \in L(\mathbb{R}_+)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $m \in \mathbb{N}$, *и* $\int_y^\infty |\hat{f}_c(t)|\,dt = o(y^{-m})$, $y \to \infty$, *или* $\int_y^\infty |\hat{f}_s(t)|\,dt = o(y^{-m})$, $y \to \infty$. *Тогда в точке* $x > 0$ *функция* f *имеет симметрическую производную Шварца, равную* A, *тогда и только тогда, когда несобственный интеграл* $(2/\pi)^{1/2}\int_{\mathbb{R}_+} t^m \hat{f}_c(t)\cos(xt + m\pi/2)\,dt$ *(соответственно, интеграл* $(2/\pi)^{1/2}\int_{\mathbb{R}_+} t^m \hat{f}_s(t)\sin(xt + m\pi/2)\,dt$*) сходится и его значение равно* A.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.

Л. В. Карташева (Ростов-на-Дону)
kartasheva@mail.ru

ВЫРОЖДЕНИЕ СИМВОЛА СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СО СДВИГОМ В ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ НА РАЗОМКНУТОМ КОНТУРЕ

Основным пространством $S_{m,n}$ является линеал функций $\varphi(t)$, имеющих неинтегрируемые степенно-логарифмические особенности на концах конутра $[a, b]$. Интегралы будем понимать в смысле конечной части по Адамару (обозначается F.P.).

Топология в $S_{m,n}$ вводится с помощью системы норм:

$$\|\varphi(t)\|_r = \max\left\{\|\varphi(t)\|_{L_p(\rho_1)}, \|\varphi'(t)\|_{L_p(\rho_2)}, \ldots, \|\varphi^{(p-1)}(t)\|_{L_p(\rho_r)}\right\}$$

$$\rho_i = (t-a)^{p(m+i)}(b-t)^{p(n+i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

$$\|\varphi(t)\|_{L_p(\rho_1)} = \left(\int\limits_L \rho_1|\varphi(t)|^p dt\right)^{1/p}, \quad p > 1.$$

Рассматривается интегральное уравнение

$$Kf = A[\beta(t)]\beta'(t)f[\beta(t)] + B(t)f(t) + \underset{\vee}{T}\,Af + \underset{\vee}{S}\,Bf = g(t) \qquad (1)$$

в пространстве обобщенных функций $S'_{m,n}$.

Коэффициенты $A(t), B(t)$ — бесконечно дифференцируемые функции на $[a,b]$, причем $A(t) = (t-\alpha_0)^{m_0} A_1(t)$, $B(t) = (t-\beta_0)^{\rho_0} B_1(t)$. $B(t)$ — функция, обратная сдвигу $\alpha(t)$. $B_1(t)$, $A_1(t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — бесконечно дифференцируемые функции на $[a,b]$.

Под выражениями $\underset{\vee}{T} Af$ и $\underset{\vee}{S} Bf$ понимаются функционалы, определяемые соответственно равенствами:

$$\underset{\vee}{T} Af = \left(f, \frac{A(t)}{\pi i \rho_0[\alpha(t)]} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\rho_0(\tau)}{\tau - \alpha(t)}\, d\tau \right); \quad \underset{\vee}{S} Bf = (f, -B\widehat{S}\varphi),$$

где $\widehat{S}\varphi = \dfrac{1}{\pi i \rho_0(t)} \displaystyle\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\rho_0(\tau)}{\tau - t}\, d\tau$, $\rho_0(t) = (t-a)^m (b-t)^n$.

Решение уравнения (1) приводит к необходимости рассмотрения союзного уравнения:

$$K'\varphi \equiv A(t)\varphi[\alpha(t)] + B(t)\varphi(t) + \frac{A(t)}{\pi i \rho_0[\alpha(t)]} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\rho_0(\tau)}{\tau - \alpha(t)}\, d\tau - \\ - \frac{B(t)}{\pi i \rho_0(t)} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\rho(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \qquad (2)$$

в пространстве основных функций $S_{m,n}$.

Обозначим $\varkappa'$ индекс краевой задачи, соответствующей уравнению (2) и введем $\varkappa = -\varkappa'$.

Тогда, если $\varkappa + m_0 > 0$ рассмотрим два случая

1) $\varkappa > 0$. В этом случае получим решение уравнения (1) в виде $f = M'g + \sum\limits_{k=1}^{\varkappa+m_0} a_k \Delta_k(t)$, где a_k — постоянные, определяемые равенствами $a_k = (f(t) - M'g, \Phi_k(t))$, $\Phi_k(t)$ — система основных функций биортогональных системе обобщенных функций $\Delta_k(t)$.

2) $\varkappa < 0$. В данном случае решение задачи (1) имеет вид: $f = M'g + \sum\limits_{k=1}^{\varkappa+m_0} a_k \nu_k(t)$.

Л. Н. Ляхов (Воронеж)
lyakhov@box.vsi.ru

О РЯДАХ ШЛЕМИЛЬХА ПО j-ФУНКЦИЯМ БЕССЕЛЯ

В отличае от классических рядов Шлемильха $\frac{a_0}{2\Gamma(\nu+1)}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k J_\nu(kx)+b_k Y_\nu(kx)}{(kx/2)^\nu}$, где J_ν — функция Бесселя первого рода порядка ν, Y_ν — функция Струве порядка ν, рассматриваются ряд $\frac{\alpha_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(\nu)\ j_{ev,\nu}(kx)+b_k\ j_{od,\nu}(kx)$ по четным j-функциям Бесселя $j_{ev,\nu}(x)=2_p\Gamma(p+1)\frac{J_\nu(x)}{x^p}$ и по нечетным j-функциям Бесселя $j_{od,\nu}(x)=j'_{ev,\nu}(x)$. В лекции будут приведены следующие результаты (см. [1]) представляющие собой реализации подходов использующих формулы обращения весовых дробных интегралов порядка $\frac{\gamma}{2}=\frac{2\nu+1}{2}$. Именно классе четных функций решение уравнения $f(t)=\Pi_t^\nu g(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi g(t\cos\alpha)\ \sin^{\gamma-1}\alpha\ d\alpha$ находиться по формуле $g(x)=\frac{2\sqrt{\pi}\cdot x}{\Gamma\left(1-\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}\right)}\left(\frac{d}{xdx}\right)^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]+1}\int\limits_0^x\frac{f(t)\ t^\gamma\ dt}{(x^2-t^2)^{\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}}}$.

Теорема 1. *Пусть четная функция* $f\in AC^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]+1}(0,\pi)$ *представлена равномерно сходящимся рядом Шлемильха*

$f(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k(\nu)\ j_{ev,\nu}(kx)$ *и* $\nu=\frac{\gamma-1}{2}$. *Тогда*

$$a_k=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1-\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}\right)}\int_0^\pi\left(\frac{d}{xdx}\right)^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]+1}\int\limits_0^x\frac{f(t)\ t^\gamma\ dt}{(x^2-t^2)^{\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}}}\,.\,x\ \cos(kx)\ dx.$$

Теорема 2. *Пусть нечетная функция* f *такова, что* $\frac{f(x)}{x}\in AC^{[\gamma/2]+2}(0,\pi)$, *представлена равномерно сходящимся j-рядом Шлемильха* $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\ j_{\nu,od}(kx)$, $\nu=\frac{\gamma-1}{2}$. *Тогда*

$$b_k=\frac{4(\gamma+1)(\pi)^{-1/2}}{k\ \Gamma\left(1-\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}\right)}\int_0^\pi x\ \left(\frac{d}{xdx}\right)^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]+2}\int\limits_0^x\frac{f(t)\ t^{\gamma+1}\ dt}{(x^2-t^2)^{\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}}}\ \cos(kx)\ dx\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляхов Л. Н., Санина Е. Л.* Многочлены Шлемильха. Интерполяционная формула Рисса для B-производной и неравенство Берштейна для дробных B-производных Вейля-Маршо // ДАН, 2007. Т. 417. №5. С. 592-596.

В. З. Мешков, И. П. Половинкин
(Воронеж, Старый Оскол)
polovinkin@yandex.ru

ДВУХТОЧЕЧНАЯ ФОРМУЛА СРЕДНЕГО ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Пусть функция $u(x)$ удовлетворяет в односвязной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ уравнению Лапласа $\partial^2 u/\partial x_1^2 + ... + \partial^2 u/\partial x_n^2 = 0$.

Рассмотрим в Ω пару точек $X^{(j)} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)})$, $j = 1, 2$. Зафиксируем некоторый индекс $i \in \{1, \ldots, n\}$ и положим $a_{ij} = (x_j^{(1)} - x_j^{(2)})/|X^{(1)} - X^{(2)}|$, $j = 1, \ldots, n$. Остальные элементы матрицы A достроим из условий $AA^T = I$, $\quad det\, A = 1$ (символ "T" означает транспонирование), I — единичная матрица. Пусть A_i — матрица, полученная из A заменой i-го столбца нулями, $2P = \sqrt{r^2 - |X^{(1)} - X^{(2)}|^2}$. Введем оператор S_t следующим образом:

$$S_t = S_t^n u = \sqrt{\pi^{1-n}} \int\limits_{|\xi|=t} u\,(\eta)\; d\omega_\xi,\ |X^{(1)} - X^{(2)}| > 0,$$

где $d\omega_\xi$ — элемент площади поверхности сферы $|\xi| = t$,

$$\eta = \frac{r\,\xi_i (X^{(1)} - X^{(2)})}{|X^{(1)} - X^{(2)}|\sqrt{r^2 - |X^{(1)} - X^{(2)}|^2}} + \frac{X^{(1)} + X^{(2)}}{2} + A_i \xi,$$

Введем оператор B_t с помощью формул

$$B_t = B_t^n\, v = t \left(\frac{\partial}{2t\partial t}\right)^{(n-1)/2} \left(\frac{1}{t} S_t v\right),\ n \equiv 1(mod 2),$$

$$B_t = B_t^n\, v = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\partial}{2t\partial t}\right)^{\frac{n}{2}} \int\limits_0^t \frac{S_t v\, d\tau}{\sqrt{t^2 - \tau^2}},\ n \equiv 0(mod 2).$$

Для достаточно малого $r > 0$ доказана формула среднего

$$u(X^{(1)}) + u(X^{(2)}) = B_P u, \tag{1}$$

которая при $X^{(2)} \to X^{(1)}$ переходит в известную одноточечную формулу среднего для гармонической функции. Показано, что для достаточно гладкой функции выполнение в односвязной области равенства (1) для любой пары точек и любого достаточно малого $r > 0$

является достаточным условием гармоничности этой функции. Доказан аналог формулы (1) для некоторых случаев уравнения Гельмгольца.

В. Г. Рябых, Г. Ю. Рябых (Ростов-на-Дону)
ryabich@aaanet.ru

О ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВА БЕРГМАНА

Основные определения и обозначения.

Пусть $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, $D = D_1$; $d_r(\zeta) = \{z \in \mathbb{C} : |z-\zeta| < r\}$, $T_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$, $T = T_1$, $t_r(\zeta) = \bar{d}_r(\zeta) \backslash d_r(\zeta)$, $d\sigma$-плоская мера Лебега.

Пространством H'_p (Бергмана) назовем множество функций $a(z)$, аналитических в круге D, таких, что $d(a,0) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_D |a(z)|^p \, d\sigma(z) < \infty$.

Обозначим через a_j последовательность точек из D. Через $b_{n,r}(z)$ обозначим функцию Бляшке в круге радиуса r:

$$b_{n,r}(z) = \left(\frac{z}{r}\right)^m \prod_{k=1}^{n} \frac{r|a_k|}{a_k} \frac{a_k - z}{r^2 - \bar{a}_k z},$$

в произведении каждый множитель повторяется столько раз, какова кратность a_j.

Положим $|a_n| \leq r < |a_{n+1}|, z \neq |a_n|e^{i\alpha_j}$, $b_{n,r}(|a_n|e^{i\alpha_j}) = 0$, а $\rho_\zeta = \min(r - |a_n|, |a_{n+1}| - r)$ и

$$B(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} b_{n,r}(\zeta + \rho_\zeta e^{i\theta}) \, d\theta, \zeta = re^{i\theta}, |a_n| < r < |a_{n+1}|,$$

$B(|a_n|e^{i\varphi}) = \lim\limits_{\zeta \to |a_n|e^{i\varphi}} B(\zeta)$.

Теорема 1. *Пусть функция* $\varphi \in {H'}_p (0 < p < \infty)$ *и* $\varphi(a_k) = 0, a_k \in D$. *Тогда*

$$H(z) = \frac{\varphi(z)}{B(z)},$$

$H(z)$ *аналитична в* D *и* $\iint\limits_D |H(re^{it})|^p \, r dr dt \leq \|\varphi\|^p_{H'_p}$

Теорема 2. *Если* $\varphi \in H'_p, 0 < p < \infty, \varphi(a_k) = 0$, *то ее можно представить в виде*

$$\varphi(z) = \Phi(z)\Psi(z),$$

$\Phi(z) = (H(z))^{1/2} \neq 0, z \in D,\ \Psi(z) = (H(z))^{1/2} B(z), z \in D,\ \Phi, \Psi \in H'_{2p}$. *Причем,*

$$\|\Phi\|_{H'_{2p}}^{2p} \leq \|\varphi\|_{H'_p}^{1/2}, \|\Psi\|_{H'_{2p}}^{2p} \leq \|\varphi\|_{H'_p}^{1/2}.$$

Фам Ч. Т. (Ростов-на-Дону, Владикавказ)
phamtien@mail.ru

РАЗМЕРНОСТЬ ВЕСОВОГО ПРОСТРАНСТВА ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть G – открытое множество в $\mathbb{C}$, $w : G \to \mathbb{R}$ – непрерывная положительная в G функция. Образуем следующие весовые пространства

$$H_w(G) := \{f \in H(G) : \|f\|_w := \sup_{z \in G} \frac{|f(z)|}{w(z)} < \infty\},$$

$$H_{w0}(G) := \{f \in H(G) : \frac{f(z)}{w(z)} \to 0, \text{ при } z \to \partial G\},$$

топология которых задается нормой $\| \cdot \|_w$.

Здесь $\dfrac{f(z)}{w(z)} \to 0$ при $z \to \partial G$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется компакт K в G такой, что $\left|\dfrac{f(z)}{w(z)}\right| < \varepsilon, \forall z \in G \backslash K$. Функцию w будем называть *весом*, если соответствующее пространство $H_w(G)$ нетривиально.

Данные пространства представляют значительный интерес и рассматриваются во многих работах (например, в [1]–[3]). К настоящему времени известны простейшие достаточные условия на веса, при которых соответствующие пространства обладают некоторым свойством (см. [4]). С другой стороны, никаких сколь-нибудь общих результатов завершенного характера в данном направлении до сих пор нет. В настоящей работе будут представлены новые результаты о размерности пространств $H_w(G)$ и $H_{w0}(G)$. В качестве следствий приводятся критерии и достаточные условия рефлексивности $H_w(G)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Anderson J. M. , Duncan J.* Duals of Banach spaces of entire functions // Glasgow Math. J. 1990. Vol. 32. P. 215–220.

2. *Bonet J., Domanski P., Lindstrom M. and Taskinen J.* Composition operators between weighted Banach spaces of analytic functions // J. Austral. Math. Soc. 1998. Vol 64. P. 101–118.

3. *Bonet J., Wolf E.* A note on weighted Banach spaces of holomorphic functions // Arch. Math. 2003. Vol 81. p. 650–654.

4. *Абанин А. В.* Весовые пространства непрерывных и голоморфных функций // Математический анализ и математическое моделирование: Труды международной конференции молодых ученых. Владикавказ, 2010. С. 15–20.

А. А. Феоктистова (Липецк)
alek-feoktistova@yandex.ru

МУЛЬТИПЛИКАТОР ФУРЬЕ-БЕССЕЛЯ, РАВНЫЙ ЕДИНИЦЕ НА ОБЛАСТИ С КРАЕМ

Пусть $R_N^+ = \{x = (x', x''), x' \in R_n, x'' \in R_{N-n},\ x_1{>}0, \ldots, x_n{>}0\}$ и $\Omega^+ \subset R_N^+$ — область, прилежащая к гиперплоскостям $x_i = 0$, где $i = 1, \ldots, n$. Часть ее границы, принадлежащую координатным гиперплоскостям $x_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, обозначим Γ^0, а другую ее часть, принадлежащую части простраства R_N^+, обозначим Γ^+.

Будем обозначать S_{ev} подпространство $S(R_N)$, состоящее из функций четных по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_n$. Пространство весовых обобщенных функций $S'_{ev} = S'_{ev}(R_N^+)$ определяется на основе весовой линейной формы $(u, v)_\gamma = \int_{R_N^+} u(x)\, \overline{v}(x)\, (x')^\gamma\, dx$, где $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $\gamma_i > 0$, $(x')^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}$. Весовое пространство Лебега, состоящее из измеримых на R_N^+ функций φ, для которых конечна норма $\|\varphi\|_{L_p^\gamma(R_N^+)} = \left(\int_{R_N^+} |\varphi(x)|^p\, (x')^\gamma\, dx\right)^{1/p}$, будем обозначать $L_p^\gamma(R_N^+)$ для $1 \le p < \infty$.

Через $F_B[f]$ и $F_B^{-1}[f]$ будем обозначать соответственно прямое и обратное смешанное преобразование Фурье-Бесселя (см. [1]). Функция $\mu(x)$ называется FB-мультипликатором в $L_p^\gamma(R_N^+)$, $1 \le p \le \infty$ (см.[1]), если она измерима, четная по каждой весовой переменной $x_1, \ldots, x_n$, и для любой функции $\varphi(x) \in S_{ev}(R_N^+)$ выполняется неравенство $\| F_B^{-1}[\mu\varphi] \|_{L_p^\gamma} \le C_p \| \varphi \|_{L_p^\gamma}$, где константа C_p не зависит от функции φ.

Функцию f будем называть регулярной в смысле L_p^γ, если для всех $\rho_0 > 0$ функция $\Phi = F_B^{-1}\left[(1 + |\xi|^2)^{-\rho_0/2} F_B[f]\right] \in L_p^\gamma(R_N^+)$.

Теорема 1. *Пусть μ — FB-мультипликатор в L_p^γ ($F_B^{-1}[\mu] = \hat{\mu} \in L_1^\gamma(R_N^+)$), равный единице на частично открытом множестве $\Omega^+ \cup \Gamma_0 \subset \overline{R_N^+}$. И пусть или $f \in L_p^\gamma(R_N^+)$, или f регулярная в смысле L_p^γ функция. Тогда на множестве $\Omega^+ \cup \Gamma_0$ имеет место следующее* *равенство*

$$F_B\left[(\hat{\mu} * f)_\gamma\right](x) = \mu F_B[f](x) = F_B[f](x), \quad x \in \Omega^+ \cup \Gamma_0.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Киприянов И. А., Ляхов Л. Н.* О мультипликаторах смешанного преобразования Фурье-Бесселя // ДАН. — 1997. — Т.354, N4. — С. 449–451.

Л. А. Хвощинская (Минск)
ludmila.ark@gmail.com

ПОСТРОЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ ПРОБЛЕМЫ РИМАНА СИСТЕМЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Задача определения системы аналитических функций $y_1, y_2, ..., y_m$, которая при обходе вокруг особых точек $a_1, a_2, ..., a_n$ испытывает линейное преобразование с помощью постоянных невырожденных матриц $V_1, V_2, ..., V_n$, в своей первоначальной постановке имеем неопределенность, так как не указан класс решений этой задачи. Поэтому под проблемой Римана будем понимать проблему определения более узкого класса функций, где ветви логарифмов выбираются однозначно в зависимости от выбранного класса решений. Не ограничивая общности, будем считать точку $a_{n+1} = \infty$ особой. Проводя через особые точки $a_1, a_2, ..., a_n, \infty$ разрез, сформулируем проблему Римана в виде краевой задачи Римана с кусочно-постоянной матрицей

$$Y^+(t) = A_k Y^-(t), t \in (a_k, a_{k+1}), k = \overline{1,n}, A_k = (V_1 V_2 ... V_k)^{-1}. \qquad (1)$$

Чтобы решить задачу (1), необходимо построить каноническую матрицу $X(z)$, столбцы которой являются решениями задачи (1), и обладающую важным свойством: порядок определителя матрицы на бесконечности равен сумме порядков ее столбцов.

Если матрицы группы монодромии имеют размерность 2×2, показано, что в общем случае каноническую матрицу задачи (1) можно построить, если предположить наличие в комплексной плоскости точек $b_1, b_2, ..., b_{n-2}$, в которых функция y_2 имеет нуль не 1-го, а 2-го порядка. Построенная таким образом матрица является решением регулярной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dz} = X \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{z - a_k}, \qquad (2)$$

причем матрица $U_{n+1} = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ является верхнетреугольной. Элементы матриц $U_k(k = \overline{1, n}$ выражаются через особые точки, логарифмы характеристических чисел матриц монодромии и их произведений.

Получены формулы для вычисления суммарного индекса и частных индексов задачи (1), от которых зависит разрешимость и число линейно независимых решений этой задачи.

М. М. Цвиль (Ростов-на-Дону)
tsvilmm@mail.ru

О СХОДИМОСТИ ПРОСУММИРОВАННЫХ СРЕДНИМИ РИССА КРАТНЫХ РЯДОВ ФАБЕРА

Введем необходимые обозначения: D_k^+ — конечная односвязная область, ограниченная спрямляемой жордановой кривой L_k, $k = 1, 2, \ldots, n$: D_k^- — ее дополнение до всей плоскости; функция $z_k = \psi_k(w_k)$ конформно и однолистно отображает внешность единичного круга $\{|w_k| > 1\}$ на область D_k^- при условиях $\psi_k(\infty) = \infty$, $\psi_k'(\infty) > 0$; функция $w_k = \varphi_k(z_k)$ — обратная к $\psi_k(w_k)$.

Через C^n обозначим n-мерное комплексное пространство, его точки $z = (z_, z_2, \ldots, z_n)$. Пусть $D^+ = D_1^+ \times D_2^+ \times \ldots \times D_n^+$ — полицилиндрическая область в $\mathbb{C}^n$ с остовом $\sigma = L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_n$; T^n — единичный тор; $\Pi^n = \{\theta \in \mathbb{R}^n \colon -\pi \leqslant \theta_k \leqslant \pi,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$ — n-мерный куб; $\Pi_+^n = \{\theta \in \mathbb{R}^n \colon 0 \leqslant \theta_k \leqslant \pi\}$; Z^n — множество векторов $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$ с целочисленными координатами; Z_+^n — множество векторов $\ell \in Z^n$ с неотрицательными координатами.

Пусть функция $f(z)$ n-комплексных переменных представима интегралом типа Коши с плотностью $\tau(\zeta)$.

В работе [1] построен n-мерный аналог формулы суммирования В. К. Дзядыка кратного ряда Фабера, а именно многочлен $P_{\Omega_+}(z)$.

В случае, когда тригонометрический полином $S_\Omega(\theta) = \sum\limits_{\ell \in \Omega} \lambda_\ell e^{i\ell\theta}$, где $\ell\theta = \ell_1\theta_1 + \ell_2\theta_2 + \ldots + \ell_n\theta_n$, $\ell \in Z^n$, $\theta \in \Pi^n$, Ω — множество решетки Z^n, является четным по каждому переменному θ_k и выполняется условие

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\Pi^n} S_\Omega(\theta) d\theta = 1,$$

то многочлен $P_{\Omega_+}(z)$ приводится к виду:

$$P_{\Omega_+}(z) = \frac{1}{(2\pi)^n}\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Pi_+^n} S_{\Omega_+}(\theta)d\theta \int\limits_{\sigma} \tau^*(\zeta\langle\theta\rangle)\frac{d\zeta}{(\zeta - z)^I}, \qquad (1)$$

где $\tau^*(\zeta\langle\theta\rangle)$ — сумма слагаемых вида:

$$\tau^*(\zeta\langle\theta\rangle) = \tau(\zeta\langle\theta\rangle) + \tau(\zeta_1\langle-\theta_1\rangle, \zeta_2\langle\theta_2\rangle, \ldots, \zeta_n\langle\theta_n\rangle) + \ldots$$

$$\ldots + \tau(\zeta_1\langle-\theta_1\rangle, \zeta_2\langle-\theta_2\rangle, \ldots, \zeta_n\langle\theta_n\rangle) + \ldots + \tau(\zeta\langle-\theta\rangle)$$

и $\zeta\langle\theta\rangle = (\zeta_1\langle\theta_1\rangle, \ldots, \zeta_n\langle\theta_n\rangle)$, $\zeta_k\langle\theta_k\rangle = \psi_k[\varphi_k(\zeta_k)\ell^{i\theta_k}]$.

В качестве тригонометрического полинома $S_\Omega(\theta)$ возьмем риссовские средние порядка η круговых частичных сумм кратного ряда Фурье

$$S_\mu^\eta(\theta) = \sum_{|m|^2 \leqslant \mu^2} \left(1 - \frac{|m|^2}{\mu^2}\right)^\eta \lambda_m e^{im\theta},$$

$|m| = \sqrt{|m_1|^2 + \ldots + |m_n|^2}$, $\eta > \frac{n-1}{2}$. Доказано, что при дополнительных условиях на последовательность тригонометрических полиномов $\{S_\mu^\eta(\theta)\}$ последовательность многочленов (1), порожденная этим ядром порядка $\eta > \frac{n-1}{2}$, сходится к функции $f(z)$ равномерно внутри D^+.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цвиль М. М.* Формула суммирования В. К. Дзядыка кратных рядов Фабера // Тез. докл. Международного семинара «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения». Ростов-на-Дону, 2011.

А. Ф. Чувенков (Ростов-на-Дону)
chuvenkovaf@mail.ru

О ВЕСОВЫХ ГРАНД ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА НА МНОЖЕСТВАХ БЕСКОНЕЧНОЙ МЕРЫ, ПОРОЖДЕННЫХ КВАЗИСТЕПЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Функциональные пространства grand Lebesque spaces [1] вводились и исследовались для функций заданных на ограниченных множествах в R^n. На произвольном неограниченном множестве аналогичные пространства были введены и изучались с весом, регулирующим сходимость интегралов в бесконечности [2]. В настоящей работе рассматриваются весовые гранд пространства Орлича [3] на множествах бесконечной меры, порожденные квазистепенными функциями в смысле [4], имеющие различный степенной рост в нуле и в бесконечности. Устанавливаются основные свойства таких пространств.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Iwaniec T., Sbordone C.* On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses. // Arch. Rational Mech. Anal., 1992. № 119. C. 129–143.

2. *Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M.* On Iwanies-Sbordone spaces on sets which may have infinite measure.// Azerb. Journal of Math., 2011. V.1, № 1. C. 67–84.

3. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958. С. 271.

4. *Симоненко И. Б.* Интерполяция и экстраполяция линейных опреаторов в простарнствах Орлича. Матем. сб., 1964. № 63(105), 4. С. 536–553.

И. А. Шакиров (Набережные Челны)
iskander@tatngpi.ru

НОВЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛАГРАНЖЕВОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

В $L_2[0,2\pi]$ и $C[0,2\pi]$ интерполяционный полином

$$\Phi_n^*(x,t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} x(t_k) D_n^*(t_k - t)$$

$$(D_n^*(u) = \frac{\sin nu}{2\tan(u/2)}; t_k = \frac{\pi}{n}k, n \in N) \tag{1}$$

приближает заданную функцию $x(t)$ ($t \in [0,2\pi]$) по норме этих пространств лучше, чем другие моноядерно представленные [1] полиномы Лагранжа

$$\Phi_n^c(x,t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} x(t_k) D_n^c(t_k - t)$$

$$\left(D_n^c(u) = \frac{1}{2}\sin nu \cot(\frac{u}{2} - c), c \in R\right) \tag{2}$$

(если в (2) c=0, то $\Phi_n^0(x,t) \equiv \Phi_n^*(x,t)$).

Данное утверждение в пространстве $L_2[0,2\pi]$ является известным, а его справедливость в $C[0,2\pi]$ следует из результатов работ

[1]–[2]. При этом существенно используются явные (безмодульные) виды функций и констант Лебега, соответствующие (2). Среди них первостепенное значение имеют фундаментальные характеристики полинома (1), для которых получены следующие новые результаты.

1. Найдены более простые и практичные (чем в [1]-[3]) безмодульные виды функций и констант Лебега, соответствующие полиному (1):

$$\lambda_n^*(t) = \frac{\sin nt}{2n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sin(t_{k-1}+t)} + \frac{1}{\sin(t_k - t)} \right) \quad (t \in T[0, \frac{\pi}{n}];$$

$$\lambda_n^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} cosec \frac{2k-1}{2n} \pi). \tag{3}$$

2. Фундаментальные характеристики (3) вычислены короткой суммой в двух взаимодополняющих частных случаях $n = 2m$ и $n = 2m+1 \quad (m \in N)$:

$$\lambda_n^*(t) = \frac{\sin nt}{n} \sum_{k=1}^{[n/2]} (\frac{1}{\sin(t_{k-1}+t)} + \frac{1}{\sin(t_k - t)}) \ (t \in T),$$

$$\lambda_n^* = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{[n/2]} cosec \frac{2k-1}{2n} \pi \quad (n = 2m);$$

$$\lambda_n^*(t) = \frac{\sin nt}{n} (cosec(t_{[n/2]}+t) + \sum_{k=1}^{[n/2]} (cosec(t_{k-1}+t) + cosec(t_k - t)))(t \in T),$$

$$\lambda_n^* = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{[n/2]} cosec \frac{2k-1}{2n} \pi \quad (n = 2m+1, [z] - entier\, z).$$

3. Используя результаты предыдущего пункта, для характеристик (3) получены слудующие асимптотически точные приближенные формулы $\lambda_n^* \cong 1 + (2/\pi) \ln n \sin nt$ $(t \in T)$ и $\lambda_n^* \cong 1 + (2/\pi) \ln n$ $(n = 1 \Rightarrow \lambda_1^*(t) \equiv 1, \lambda_1^* = 1)$, у которых погрelности существенно малы уже при n=2.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Шакиров И. А.* О тригонометрическом интерполяционном полиноме Лагранжа, имеющем минимальную норму как оператор из $C_2\pi$ в $C_2\pi$ //

Изв. вузов. Математика. 2010. в-10. С. 60–68.
2. *Шакиров И. А.* Полное исследование функций Лебега, соответствующих классическим интерполяционным полиномам // Изв. вузов. Математика. 2011. в-10. С. 80–88.
3. *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Н. думка, 1988.

Секция III
Дифференциальные уравнения и математическая физика

С. М. Айзикович, С. С. Волков (Ростов-на-Дону),
И. Федотов (Претория)
saizikovich@gmail.com, fenix_rsu@mail.ru, fedotovi@tut.ac.za

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ РАСЧЕТА ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВАНИЯХ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ [1]

В работе рассматривается осесимметричная контактная задача об изгибе круглой пластинки лежащей на мягком непрерывно неоднородном слое. Проблеме расчета круглых пластин посвящено большое число работ, для построения решения задачи в аналитическом виде использовались: метод ортогональных многочленов, регулярный и сингулярный асимптотический методы. В данной работе для построения решения задачи был использован двусторонне-асимптотический метод, который основан на построении аппроксимации, трансформанты ядра интегрального уравнения задачи, специального вида [1], при этом функция прогибов и нагрузка, действующая на пластину, представляется в виде ряда по формам собственных колебаний круглой пластины [2].

Получены в аналитическом виде основные механические характеристики задачи (контактные напряжения, функцию прогибов пластины, радиальные и тангенциальные моменты). Построенное решение, является двусторонне-асимптотически точным, т.е. оно эффективно, как в зоне больших, так и малых значений характерного геометрического параметра задачи (отношение толщены слоя к радиусу пластины) для гибких и жестких пластин.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Айзикович С.М.* Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред // ПММ. 1982. Т.46. Вып.1. С. 148–158.

2. *Цейтлин А.И.* Об изгибе круглой пластины, лежащей на линейно-деформируемом основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. №1. С. 99–112.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (11-08-91168-ГФЕН_а), ГК No.11.519.11.3015, 11.519.11.3028, P1107

Г. М. Айрапетян, В. А. Бабаян (Ереван)
hhayrapet@gmail.com, bvazgen@gmail.com

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ С ВЕСОМ ФУНКЦИЙ

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ - единичный круг комплексной плоскости, $T = \partial D = \{z : |z| = 1\}$ - его граница. Весовая функция ρ на T определяется по формуле $\rho(t) = |1 - t|^{\alpha}$, где α - действительное число. Пространство функций f, таких, что $f\rho$ непрерывна на T, обозначим $C(\rho)$. Норма в $C(\rho)$ определяется соотношением

$$\|f\|_{C(\rho)} = \max_{t \in T} |f(t)|\rho(t).$$

Рассматриваем задачу Дирихле в следующей постановке:

Задача D

Пусть $f_0, f_1 \in C(\rho)$ *- заданные функции. Требуется определить решение бигармонического уравнения*

$$\Delta^2 u(x, y) = 0, (x, y) \in D,$$

удовлетворяющее условиям,

$$\lim_{r \to 1-0} \|u(rt) - f(t)\|_{C(\rho)} = 0 \qquad (1)$$

$$\lim_{r \to 1-0} \|\frac{\partial u(rt)}{\partial r} - f(t)\|_{C(\rho)} = 0 \qquad (2)$$

Рассматривается случай, когда α - порядок весовой функции, больше единицы. Число линейно независимых решений однородной задачи D (когда $f_0 \equiv f_1 \equiv 0$) определяется по показателю порядка весовой функции. Получены также необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородной задачи D. Решения записываются в явном виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айрапетян Г. М.* Задача Дирихле в пространствах с весом. // Изв. НАН Армении. Сер. матем. 2001, Т. 36, № 3, С. 22–44.

2. *Soldatov A. P.* Generalized potentials of double layer for second order elliptic systems. // Научные ведомости БелГУ. Сер. матем. физика. 2009, № 13(68), вып. 17/1, С. 103–109.

3. *Айрапетян Г. М., Бабаян В. А.* О задаче Дирихле в пространстве непрерывных с весом функций. // Научные ведомости БелГУ. Сер. матем. физика. 2011, № 17(112), вып. 24, С. 5–16.

А. О. Бабаян (Ереван)
barmenak@gmail.com

О ДЕФЕКТНЫХ ЧИСЛАХ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КРУГЕ

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ - единичный круг комплексной плоскости и $\Gamma = \partial D$ его граница. В области D рассматривается эллиптическое дифференциальное уравнение вида:

$$Lu(x,y) \equiv \sum_{k=0}^{4} A_k \frac{\partial^4 u}{\partial x^k \partial y^{4-k}} = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{1}$$

где A_k такие комплексные постоянные ($A_0 \neq 0$), что корни λ_j, $j = 1, \ldots, 4$ характеристического уравнения

$$A_0\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4 = 0$$

удовлетворяют условиям

$$\Im\lambda_1 > 0, \Im\lambda_2 > 0, \quad \Im\lambda_3 < 0, \Im m\lambda_4 < 0. \tag{2}$$

Функцию u - решение уравнения (1), ищем в классе $C^{(1,\alpha)}(D \cup \Gamma)$. На границе Γ искомая функция удовлетворяет условиям Дирихле:

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial N^k}\right|_{\Gamma} = f_k(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma, \quad k = 0, 1. \tag{3}$$

Здесь f_1 и f_2 заданные на Γ функции, которые вместе с $\frac{df_1}{dS}$ удовлетворяют условию Гельдера на Γ, $\frac{\partial}{\partial N}$ - производная по направлению внутренней нормали к Γ, а $\frac{d}{dS}$ - производная по длине дуги Γ.

В работе получены формулы для определения дефектных чисел задачи (1), (3). Доказано, что при различных расположениях корней эти числа могут принимать только два значения: ноль или единица.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Бабаян А. О.* Об однозначной разрешимости задачи Дирихле для одного класса эллиптических уравнений четвертого порядка // Изв. НАН Армении. Сер. матем. 1999. Т. 34, № 5. С. 1–15.

2. *Babayan A.* Defect Numbers of the Dirichlet Problem for the Properly Elliptic Equation //Continuum Mechanics and Related Problems of Analysis: Book of Abstracts of International Conference to celebrate 70th Anniversary of the Georgian NAS and the 120th Birthday of its First President Academician N. Muskhelishvili. Tbilisi, 2011. C. 94–95.

А. О. Ватульян (Ростов-на-Дону)
vatulyan@math.rsu.su

Итерационные схемы в обратных задачах математической физики[1]

Изучается класс коэффициентных обратных задач для линейных операторов математической физики, посвященный исследованию задач об определении переменных коэффициентов дифференциальных операторов, принадлежащих конусу положительных функций, по некоторой дополнительной информации. Предметом настоящего исследования являются краевые задачи для эллиптических операторов с параметром, порожденных различными типами операторов при периодических воздействиях; при этом дополнительной информацией в обратной задаче является задание дополнительных граничных условий, зависящих от параметра. Такая постановка приводит к смешанным задачам (и задачам Коши) для эллиптических операторов второго порядка, что порождает нелинейные некорректные проблемы. Основной метод их исследования-построение итерационных процессов. На основе слабой постановки представлен простой способ формирования итерационных процессов, не требующий вычисления производных по Фреше от исходных операторов, характерный для традиционной процедуры типа Ньютона и ее обобщений. Предлагаемый подход на каждой итерации сочетает процедуру решения прямой задачи, которая решается обычно численно, и определение функций-поправок при обращении линейных компактных операторов первого рода на основе регуляризации А. Н. Тихонова, причем их ядра определяются через полевые функции, найденные на предыдущей итерации. Особое внимание уделено нахождению начальных приближений, обеспечивающих сходимость итерационного процесса и анализу различных типов граничных условий, для которых задача нахождения коэффициентов является сильно некорректной. Показано, каким образом рассматриваемые задачи для полуограниченных областей типа слоя могут быть сведены к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Представлены примеры реконструкции одномерных функций для ряда операторов упругости, электроупругости, вязкоупругости, пороупругости, изучены некоторые особенности возникающих отображений.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№10-01-00194-а)и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"на 2009 - 2013 годы .

М. В. Дубатовская, С. В. Рогозин (Минск)
marina.dubatovskaya@gmail.com, dubatovska@bsu.by

КОМПОЗИЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ С ПСЕВДО-ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ [1]

Рассматривается задача о проводимости двумерного ограниченного композиционного материала с псевдо-фрактальной структурой. Задачи о проводимости композиционных материалов с другими типами псевдо-фрактальной (например, задача о проводимости ковра Серпинского) рассматривалась ранее в работах [1], [2].

Рассматриваемый в работе композиционный материал имеет следующую геометрическую структуру. Внутренности семейства окружностей (включения)

$$|z| = \frac{1}{3}, \quad \left| z - 2\sum_{j=1}^{m} \frac{e^{\frac{\pi i}{3}k_j}}{3^j} \right| = \frac{1}{3^{m+1}}, \ \ m \in \mathbb{N}, \ \ k_j = 0, 1, \ldots, 5,$$

заполнены материалом одного типа, а внешность этих окружностей, лежащая внутри единичного круга (матрица композиционного материала) - материалом другого типа. Предполагается, что на границе между матрицей и включениями выполнено условие идеального контакта. Тепловой поток заданной интенсивности пересекает композиционный материал в направлении оси OX.

В терминах комплексных потенциалов данную задачу можно трактовать как семейство задач $\mathbb{R}$-линейного сопряжения на границе каждого включения и задачи Шварца на единичной окружности.

Решение строится методом функциональных уравнений [3] и представимо в виде рядов по специальным группам Шоттки симметрий относительно рассматриваемого семейства окружностей.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Adler P. M., Mityushev V. V.* Conductivity of Serpinsky carpet // Труды института математики НАН Беларуси. 2001. Т. 9. С. 7–15.

2. *Mityushev V. V., Adler P. M.* Schwarz problem for multiply connected domains and its application to diffusion around fractal // Complex Variables. 2002. V. 47, No 4. P. 303–324.

3. *Mityushev, V.V., Rogosin, S.V.* Constructive Methods for Linear and Nonlinear Boundary Value Problems for Analytic Functions. Theory and Applications. Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, **108**. Boca Raton etc.: Chapman & Hall / CRC: , 1999. xii + 284 p.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке государственной программы научных исследований «Конвергенция-15».

V. A. Eremeyev, H. Altenbach (Magdeburg),
L. P. Lebedev (Bogotá)
eremeyev.victor@gmail.com, holm.altenbach@ovgu.de,
lebedev1946@gmail.com

ON SPECTRUM OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF LINEAR ELASTICITY WITH SURFACE STRESSES [1]

Following [1, 2] a mathematical investigation of the eigenvalue problems for elastic bodies including surface stresses is presented. Weak setup of the problems is based on the Rayleigh variational principle. Certain spectral properties are established for the problems under consideration. In particular, bounds for the eigenfrequencies of an elastic body with surface stresses are presented. These bounds demonstrate increases in both the rigidity of the body and of the eigenfrequencies over those of the body with surface stresses neglected.

We prove

Theorem 1. *Let ω_k be eigenfrequencies of a bounded elastic body with surface stresses enumerated in increasing order as $\omega_0 \le \omega_1 \le \omega_2, \dots$, and let ω_k^f and ω_k° be correspondingly ordered eigenfrequencies of the elastic body with free boundary and with fixed boundary, respectively. Then*

$$\omega_k^f \le \omega_k \le \omega_k^\circ, \quad k = 1, 2, 3, \dots . \tag{1}$$

The proof is based on Rayleigh's minimal principle and Courant's maximum-minimum principle. The classical formulation of Courant's principle is modified to account for the peculiarities of the eigenvalue problems under consideration.

The increase in the eigenfrequencies for the elastic body with surface stresses, in comparison with the same body with free boundary, can be interpreted as the increase in the stiffness. The influence of the surface elasticity is more significant for higher eigenfrequencies and for bodies with surface imperfections.

R E F E R E N C E S

1. *Altenbach, H., Eremeyev, V. A., Lebedev, L. P.* On the existence of solution in the linear elasticity with surface stresses// ZAMM. 2010. Vol. 90. № 7. Pp. 535–536.

2. *Altenbach, H., Eremeyev, V.A., Lebedev, L.P.* On the spectrum and stiffness of an elastic body with surface stresses// ZAMM. 2011. Vol. 91 № 9. Pp. 699–710.

[1]The first author was supported by DFG grant No. AL 341/33-1.

В. А. Еремеев, А. В. Наседкин (Ростов-на-Дону)
nasedkin@math.sfedu.ru

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕЛ С ПОВЕРХНОСТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ [1]

В работе рассмотрены задачи на собственные значения для пьезоэлектрических (электроупругих) тел ограниченных размеров с учетом поверхностных напряжений. Как показывают исследования последних лет, учет поверхностных напряжений позволяет описывать наблюдаемые эффекты увеличения жесткости при уменьшении размеров для наноматериалов. Аналогично упругим наноразмерным телам здесь при анализе пьезоэлектрических сред в модель посредством добавления на поверхности упругих мембран вводятся поверхностные напряжения.

Спектральные свойства краевой задачи для пьезоэлектрического тела ограниченных размеров с учетом поверхностных упругих напряжений устанавливаются комбинацией подходов, принятых в [1,2].

Показано, что операторное уравнение слабой постановки задачи о собственных колебаниях ограниченных пьезоэлектрических тел с поверхностными напряжениями имеет вещественный дискретный спектр, а соответствующие собственные функции образуют систему, ортогональную и полную в L_2 и в энергетическом пространстве. С использованием минимаксного принципа Куранта–Фишера установлены теоремы об изменениях собственных значений при учете поверхностных напряжений и при изменениях граничных условий и материальных констант. Показано, что учет поверхностных напряжений приводит к возрастанию собственных значений, а однотипные изменения механических и электрических граничных условий или материальных характеристик приводят к противоположным изменениям собственных значений.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Белоконь А. В., Наседкин А. В.* О некоторых свойствах собственных частот электроупругих тел ограниченных размеров // ПММ. 1996. Т. 60, №. 1. С. 151–158.

2. *Altenbach H., Eremeyev V. A., Lebedev L. P.* On the spectrum and stiffness of an elastic body with surface stresses // Z. Angew. Math. Mech. 2011. V. 91, No. 9. P. 699–710.

---

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00829).

Д. А. Жуков (Таганрог)
fossil.new@yandex.ru

О БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ MG-ДЕФОРМАЦИЯХ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ СТАЦИОНАРНОСТИ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ ВДОЛЬ КРАЯ[1]

Пусть $S-$ поверхность в E^3 с краем ∂S, и выполнены условия:

1) поверхность S задана радиус-вектором $\vec{r} = \vec{r}(u,v) \in D_{3,p}$, $p > 2, (u,v) \in \Omega$, где $\Omega-$ плоская односвязная область;

2) гауссова кривизна поверхности $S : K \geqslant k_0 > 0, k_0 = const$;

3) ∂S не содержит омбилических точек, $\partial S \in C^1_\alpha, 0 < \alpha \leqslant 1$.

Подвергнем S бесконечно малой MG-деформации, т.е. бесконечно малой деформации, при которой сохраняется поточечно гауссов образ поверхности, вариация гауссовой кривизны равна функции σ класса $D_{1,p}$, $p > 2$, заданной на S. Тривиальной деформацией будем называть бесконечно малый параллельный перенос.

Индекс поверхности S относительно поля главных направлений обозначим $j_{ГН}(S)$. Доказана следующая

Теорема. *Пусть средняя кривизна стационарна вдоль края ∂S при бесконечно малой MG-деформации поверхности S. Тогда*

1) Если $j_{ГН}(S) > 0$, то

-при $\sigma \equiv 0$ существует только тривиальная бесконечно малая MG-деформация;

-при $\sigma \not\equiv 0$ нетривиальная бесконечно малая MG-деформация существует и единственна тогда и только тогда, когда функция σ удовлетворяет $(2j_{ГН}(S) - 1)$ условиям разрешимости.

2) Если $j_{ГН}(S) \leqslant 0$, то

-при $\sigma \equiv 0$ существует $(-2j_{ГН}(S) + 1)$ нетривиальных бесконечно малых MG-деформаций;

-при $\sigma \not\equiv 0$ нетривиальные бесконечно малые MG-деформации существуют и зависят от $(-2j_{ГН}(S) + 1)$ произвольных вещественных постоянных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фоменко В. Т.* Об изгибании и однозначной определенности поверхности положительной кривизны с краем. Таганрог: Изд-во ТГПИ, 2011. 74 с.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства образования и науки РФ ФГБОУ ВПО «ТГПИ имени А.П. Чехова» (проект № 1.423.2011), «Реализация метрик положительной кривизны в виде поверхностей с заданной опорой», научный руководитель — Фоменко В.Т.

С. В. Исраилов (Грозный)
kafmathchgpi@yandex.ru

ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНОСТЯМИ В УРАВНЕНИИ И ИНТЕГРАЛЬНОМ УСЛОВИИ

Рассматривается краевая задача

$$y'' = f(x, y, y'); \quad y(a) = y'(a) = y'(b) = 0, \quad \int_a^b a(s)y'(s)ds = l. \qquad (1)$$

Правая часть $f(x, y, y')$ определена в области $D := \{|y^{(i)}| \le d_i, x \in (a, b), \quad i = \overline{1, n}\}$ и непрерывна по всем аргументам, но при $x = a$ и $x = b$ имеет сингулярности [1]. Существует частная производная $f'_{y'}(x, y, y')$ с такими же свойствами в D. Предполагается, что

$$|f(x, y, 0)| \le \psi(x), \ -\psi_2(x) \le f'_{y'}(x, y, y')\mathrm{sign}(x - c) \le \psi_1(x), \ c \in [a, b], \qquad (2)$$

где функция $\psi(x)$ интегрируема в смысле Римана на $[a, b]$, а функции ψ_1, ψ_2 – на отрезках $[a + \delta, c]$, $[c, b - \delta]$ для любого $\delta > 0$, но

$$\int_a^{a+\delta} \psi_i(t)dt = \int_{b-\delta}^b \psi_i(t)dt = +\infty, \quad i = 1, 2. \qquad (3)$$

Здесь функция $a(x)$ непрерывна на (a, b), знакопостоянна, например, $a(x) > 0$, l – данное число и $\int\limits_a^c a(s)ds = \int\limits_c^b a(s)ds = +\infty$,

$$(\alpha^{-1}\beta + \gamma)(b - a) \le d_i, \ i = 0, 1, \qquad (4)$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \int\limits_a^b a(s)e^{-\int\limits_s^c \psi_2(\tau)\mathrm{sign}(\tau - s)d\tau} ds \ne 0, \quad \beta = |l| + \int\limits_a^b a(s)\varphi(s)ds, \\
\gamma &= \max\left\{\int\limits_a^c \psi(t)dt, \int\limits_c^b \psi(t)dt\right\}, \\
\varphi(x) &= \int\limits_c^x e^{-\int\limits_t^x \psi_1(s)\,\mathrm{sign}(s - t)ds} \psi(t)\,\mathrm{sign}(t - c)dt.
\end{aligned}$$

При выполнении условий (2), (3), (4) задача (1) имеет по крайней мере одно решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Исраилов С. В., Юшаев С. С.* Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Нальчик: «Эль-фа», 2004. 445 с.

С. Б. Климентов
(Ростов-на-Дону, ЮФУ, ЮМИ ВНЦ РАН)
sklimentov@pochta.ru

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА В КЛАССАХ СМИРНОВА ДЛЯ ОБОБЩЁННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В докладе излагаются в известной мере законченные результаты автора по краевой задаче Римана-Гильберта (Гильберта) для обобщённых аналитических функций в односвязной ограниченной области с границей Ляпунова либо с границей Радона без точек заострения [1]. Коэффициент краевого условия предполагается либо непрерывным с возмущением измеримой ограниченной функцией, либо непрерывным с возмущением функцией ограниченной вариации, правая часть краевого условия — суммируемой с некоторым показателем $p > 1$.

Настоящая работа обобщает соответствующие результаты из статей автора [2–4]. Основная трудность состоит в невозможности, в случае негладкой границы, сведения задачи посредством конформного отображения к задаче для классов Харди обобщённых аналитических функций. Эта трудность преодолевается посредством построения специальных представлений второго рода для обобщённых аналитических функций класса Смирнова.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Klimentov S. B.* Riemann-Hilbert Boundary Value Problem for Generalized Analytic Functions in Smirnov Classes // Global and Stochastic Analysis, December 2011. V. 1, № 2, C. 217–240.

2. *Климентов С. Б.* Задача Гильберта для голоморфных функций в классах Смирнова // В кн. «Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию. Итоги науки. Юг России. Математический форум. Т. 4.». Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2010, С. 252–263.

3. *Климентов С. Б.* Задача Гильберта для голоморфных функций в

классах Смирнова в области с радоновской границей // Изв. Вузов, Северо-Кавказский регион. Серия «Естественные науки». 2011. № 3, С. 14–18.

4. *Климентов С. Б.* Краевая задача Римана-Гильберта в классах Харди обобщенных аналитических функций // Известия ВУЗов. Сев.- Кав. регион, серия «Естественные науки». 2004, № 4, С. 3–5.

А. А. Королева, С. В. Рогозин (Минск),
J. J. Trujillo (La Laguna, Spain)
ankakoroleva@gmail.com, rogosinsv@gmail.com

УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА [1]

В докладе дается обзор исследований, посвященный устойчивости и управлению систем дробного порядка. Основное внимание уделяется системам вида

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + \ldots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) + \ldots + b_0 D^{\beta_0} u(t), \qquad (1)$$

где $D^\gamma = D^\gamma_{0+,t}$ означает дробную производную Римана-Лиувилля

$$D^\gamma_{a+}\,\phi(t) := D^m\, I^{m-\gamma}_{a+}\,\phi(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\gamma)}\,\frac{d^m}{dt^m}\int\limits_0^t \frac{\phi(\tau)}{(t-\tau)^{\gamma+1-m}}\,d\tau,$$

или дробную производную Капуто

$$D^\gamma_*\,\phi(t) \;:=\; \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\gamma)}\int\limits_0^t \frac{\phi^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\gamma+1-m}}\,d\tau\,, & m-1<\gamma<m\,, \\ \frac{d^m}{dt^m}\phi(t)\,, & \gamma = m\,, \end{cases}$$

или дробную производную Грюнвальда-Летникова

$${}_L D^\gamma \phi(t) := \sum_{k=0}^{m} \frac{\phi^{(k)}(0+)\cdot t^{k-\gamma}}{\Gamma(k+1-\gamma)} + \frac{1}{\Gamma(m+1-\gamma)}\int\limits_0^t \frac{\phi^{(m+1)}(\tau)}{(t-\tau)^{\gamma-m}}\,d\tau.$$

Системе (1) с нулевыми начальными условиями в случае несоизмеримых показателей соответствует следующая передаточная функция,

[1]Работа выполнена при частичной поддержке государственной программы научных исследований «Конвергенция-15».

в терминах которой исследуются вопросы устойчивости, управляемости и наблюдаемости (1):

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{n-1} s^{\beta_{m-1}} + \ldots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \ldots + a_0 s^{\alpha_0}} = \frac{Q(s)}{P(s)}. \qquad (2)$$

П. В. Николенко (Ростов-на-Дону)
ppdominikl@mail.ru

ОБ АППРОКСИМАЦИИ КРИВОЙ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ЛОМАНОЙ

Рассмотрим задачу быстродействия $\dot{x} = f(x,u)$, $x \to 0$, $u \in M$, M — заданный компакт и задача такова, что оптимальные управления непрерывны.

Если из точки x^0 в 0 ведет два оптимальных пути, то точку x^0 называют точкой неоднозначности. Множество всех указанных точек образует множество неоднозначности N. Если траектория ПМ пересекает N, то точка пересечения отделяет от траектории неоптимальную часть.

Множество N изучалось в [1], [2] для задачи о наискорейших перемещениях в поле скоростей $\dot{x} = v(x) + u$, $x \to 0$, где v — плоскопараллельное поле на плоскости, $v(x_1, x_2) = (v(x_2), 0)$, $\|u(t)\| \leq 1$, где v — выпуклая функция и $v(0) = 0$, $v'(0) = 0$, $v''(0) = a > 0$. Показано, что N является фазовой кривой при $t \geq 0$ некоторой задачи Коши, которая исходит из точки с координатами $(-\pi/\sqrt{a}, 0)$.

Численное решение данной задачи представляется затруднительным. Предлагается отыскивать точки множества N как особые точки сферы достижимости S^{t_0}. Для этого рассматривается задача Коши

$$\dot{x_1} = v(x_2) + \frac{1}{\sqrt{1+x_3^2}}; \quad \dot{x_2} = \frac{x_3}{\sqrt{1+x_3^2}}; \quad \dot{x_3} = -v'(x_2);$$

$$\dot{y_1} = v'(x_2)y_2 - \frac{x_3}{\left(\sqrt{1+x_3^2}\right)^3} y_3; \quad \dot{y_2} = \frac{1}{\sqrt{1+x_3^2}} y_3; \quad \dot{y_3} = -v''(x_2)y_2,$$

финальные условия: $(x(0), y(0)) = (0, 0, s, 0, 0, 1)$ и определитель Δ матрицы

$$\begin{vmatrix} v(x_2) + \dfrac{1}{\sqrt{1+x_3^2}} & y_1 \\ \dfrac{x_3}{\sqrt{1+x_3^2}} & y_2 \end{vmatrix},$$

а также функции $\Phi_\pm(t,s) = (x_1(t,s), x_2(t,s))$ (+ при $t < 0$, $s < 0$, − при $t < 0, s < 0$).

Если $\Phi_\pm(t_0, s)$ — граничная точка сферы S^{-t_0}, то Δ не меняет знак вдоль траектории. Точка неоднозначности является точкой пересечения той части кривых $\Phi_+(t_0,\cdot)$ и $\Phi_-(t_0,\cdot)$, для которых Δ не меняет знак; при этом $(x_1(t,s), x_2(t,s))$ дает точку кривой, а (y_1, y_2) определяет касательную к ней. Поэтому для определения точки пересечения пользуемся методом касательных, а само множество N аппроксимируем соответствующей ломаной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Николенко П. В.* О наискорейших перемещениях в поле скоростей // Диф. уравнения. 2011. № 5.

2. *Николенко П. В.* Множество неоднозначности и задача о наискорейших перемещениях в поле скоростей // Диф. уравнения. 2012. (принята к печати).

В. А. Попов (Москва)

vlapopov@gmail.com

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ РИМАНОВОЙ МЕТРИКИ, ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ И ИЗОМЕТРИЙ

Рассмотрим риманову метрику на малом шаре U, заданную аналитическими функциями g_{ij}, и класс римановых аналитических многообразий, содержащих U в качестве открытого подмногообразия. Назовём эти многообразия аналитическими продолжениями римановой метрики g_{ij}. Инфинитезимальные изометрии на римановом многообразии – это векторные поля $\xi_{ij}(x)$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \xi^k - g_{kj} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} - g_{ik} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} \right) = 0.$$

Такие векторные поля называются векторными полями Киллинга.

Лемма. Векторное поле Киллинга, заданное на открытом подмножестве U однозначно аналитически продолжается на всё многообразие M.

Теорема. Пусть ζ — алгебра Ли всех векторных полей Киллинга на римановом многообразии M, $\eta \subset \zeta$ — стационарная подалгебра, G — односвязная группа Ли с алгеброй Ли ζ и $H \subset G$ — подгруппа с алгеброй Ли η. Тогда, если алгебра ζ не имеет центра, то подгруппа H замкнута в G. и таким образом, определено однородное риманово пространство G/H. Для метрик, алгебра Ли векторных полей которых не имеет центра. определим квазиполное продолжение, как непродолжаемое многообразие M, которое не допускает нетождественных сохраняющих векторные поля Киллинга изометрий между своими открытыми подмножествами. Такое продолжение единственно, и каждая изометрия между открытыми подмножествами продолжается до изометрии всего M.

С. В. Ревина (Ростов-на-Дону)
revina@math.rsu.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Рассматривается двумерное движение вязкой несжимаемой жидкости под действием поля внешних сил $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$, периодического по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами L_1 и L_2 соответственно, описываемое системой уравнений Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}, \nabla)\boldsymbol{v} - \nu\Delta\boldsymbol{v} = -\nabla p + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t), \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0.$$

Средняя по пространству скорость считается заданной. Предполагается, что один из пространственных периодов $L_2 = 2\pi/\alpha$, волновое число $\alpha \to 0$.

Строится длинноволновая асимптотика задачи устойчивости стационарного течения, когда основное поле скорости принадлежит классу параллельных (сдвиговых) течений. Дан алгоритм нахождения k-го члена асимптотики. Показано, что критические собственные значения линейной спектральной задачи являются нечетными функциями волнового числа, а критические значения вязкости — четными функциями. Даны достаточные условия и обоснована монотонная потеря устойчивости для класса течений, обобщающих течение Колмогорова.

Найдены главные члены длинноволновой асимптотики задачи устойчивости периодических по времени течений — критического значения вязкости, нормальных возмущений основного решения, и соответствующих показателей Флоке. Показано, что в нерезонансном случае, когда отношение среднего продольной компоненты скорости к характерной скорости течения иррационально, происходит колебательная потеря устойчивости, для сдвигового периодического по времени основного течения получены условия монотонной потери устойчивости и бифуркации удвоения периода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мелехов А. П., Ревина С. В.* Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических двумерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 2. С. 41–56.

С. В. Рогозин (Минск), G. Mishuris (Aberystwyth, UK), Е. В. Песецкая (Тбилиси)
rogosinsv@gmail.com, rogosin@bsu.by

ПРОВОДИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ[1]

В работе предложено аналитическое решение задачи о проводимости двумерных неограниченных композиционных материалов с двояко-периодической структурой в случае, когда проводимости компонент (матрицы и включений) зависят от температуры (см., например, [1], [2]).

С помощью преобразования Байокки [3] линейная краевая задача для квази-линейного дифференциального уравнения сводится к нелинейной краевой задаче для уравнения Лапласа.

Последняя равносильным образом преобразуется в нелинейную краевую задачу для квази-периодических аналитических функций (комплексных потенциалов, см. [4]). Данная задача исследуется на основе комбинации метода функциональных уравнений ([5]) и метода последовательных приближений.

В работе дается детальное описание нового конструктивного алгоритма построения решения задачи. Результаты иллюстрируются численными примерами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Galka, A., Telega, J.J., Tokarzewski, S.* Heat equation with temperature-dependent conductivity coefficients and macroscopic properties of microheterogeneous media // Math. and Comp. Modelling. 2001. Vol. 33. P. 927–942.

2. *Manevitch, L.I., Andrianov, I.V., Oshmyan, V.G.* Mechanics of periodically heteregeneous structures. Foundations of Engineering Mechanics. Berlin: Springer, 2002. x + 264 p.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке FP7-PEOPLE-IAPP grant PIAP-GA-2009-251475 HYDROFRAC.

3. *Baiocchi, C., Capelo, A.* Variational and quasivariational inequalities. Applications to free boundary problems. Chichester etc.: John Wiley and Sons., 1984. ix + 452 p.

4. *Mityushev, V.V., Pesetskaya, E.V., Rogosin, S.V.* Analytical Methods for Heat Conduction in Composites and Porous Media. In: Thermal Properties of Cellular and Porous Materials. Amsterdam: Wiley-VCH, 2007, P. 124–167.

5. *Mityushev, V.V., Rogosin, S.V.* Constructive Methods for Linear and Nonlinear Boundary Value Problems for Analytic Functions. Theory and Applications. Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, **108**. Boca Raton etc.: Chapman & Hall / CRC: , 1999. xii + 284 p.

Л. И. Сазонов
(Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ)
sazonov@math.rsu.ru

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ОЗЕЕНА

Нестационарное движение несжимаемой вязкой жидкости при обтекании тела описывается следующей начально-краевой задачей для системы Навье-Стокса

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu\triangle u - (u,\nabla)u - \nabla p + f, \\ div\ u = 0,\ u|_{t=0} = a,\ u|_{\partial\Omega} = 0,\ u|_\infty = u_\infty \end{cases} \tag{1}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — внешность обтекаемого тела, u — поле скорости жидкости, p — функция давления, f — поле внешних сил, ν – коэффициент вязкости.

В исследованиях системы (1) важную роль играют различные ее линеаризации. В частности, возмущенная система Озеена получается при линеаризации на стационарном решении, имеющем ненулевой предел на бесконечности. При определенных условиях для стационарного решения эволюционный оператор $T(t)$ этой системы определен в подходящей шкале банаховых пространств и образует аналитическую полугруппу, называемую возмущенной полугруппой Озеена.

В докладе будут изложены результаты работ автора [1]–[3], в которых для этой полугруппы установлены степенные $L_p - L_q$ - оценки, выполнено обоснование метода линеаризации, включающее, в частности, результаты об устойчивости и неустойчивости стационарных течений трехмерной задачи обтекания, исследованы вопросы сходимости нестационарных течений к устойчивым стационарным, рассмотрен вопрос о существовании переходов между стационарными режимами задачи обтекания.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Сазонов Л. И.* Оценки возмущенной полугруппы Озеена // Владикавказский математический журнал. 2009. Т. 11, вып. 3. С. 50–61.

2. *Сазонов Л. И.* Оценки возмущенной полугруппы Озеена в $\mathbb{R}^n$ и устойчивость стационарных решений системы Навье – Стокса // Владикавказский математический журнал. 2010. Т. 12, вып. 3. С. 71–82.

3. *Сазонов Л. И.* О существовании переходов между стационарными режимами задачи обтекания// Владикавказский математический журнал. 2011. Т. 13, вып. 4. С. 60–69.

Л. В. Сахарова (Ростов-на-Дону)
L.Sakharova@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ЖЕСТКОЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ИЭФ МЕТОДОМ ПЕРЕВАЛА

Рассмотрена жесткая интегро-дифференциальная задача, возникающая при моделировании «аномальных» режимов изоэлектрического фокусирования (ИЭФ), соответствующих высоким плотностям электрического тока J:

$$\frac{dc_k}{dx}\frac{1}{c_k} = \frac{\varphi_k'(\psi)}{\varphi_k(\psi)}\,\frac{\lambda J}{\sigma}, \qquad \varphi_k(\psi) = \delta_k + ch(\psi - \psi_k),$$

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \mu_k c_k \left(\varphi_k''(\psi) - \frac{(\varphi_k'(\psi))^2}{\varphi_k(\psi)}\right) + 2k_w \mu\, ch(\psi - \psi_0),$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\, \varphi_k'(\psi) + 2k_w sh\psi = 0, \qquad \int_0^l c_k(x)\,\varphi_k(\psi)\,dx = M_k(2\pi r^2)^{-1}.$$

Здесь $c_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, N$ – неизвестные функции, подлежащие отысканию; λ – большой параметр; l– длина электрофоретической камеры, r – ее радиус; ψ_k, μ_k, μ, ψ_0, k_w, m_k – известные константы, определяемые электрохимическими параметрами системы ИЭФ. Исследование задачи методом перевала показало, что функции c_k, являющиеся асимптотическим решением интегро-дифференциальной задачи в случае равномерного распределения ($\psi_{k+1} - \psi_{k-1} = \triangle\psi$), в окрестностях изоточек $\psi = \psi_k$ имеют вид экспоненциальных функций с рядом по четным степеням в показателе: для $J_{2n-2} < J < J_{2n}$

$$c_k(x) = \frac{a_0}{\varphi_k(\psi_k)}\,\exp\left(-\frac{(x - x_k)^2}{2\sigma^2} - \sum_{l=2}^{n-1}\frac{(x - x_k)^{2l}}{\sigma_{2l}^{2l}}\right)\Phi_k(J, x),$$

$$\Phi_k(J,x) = \exp\left(-\sum_{l=n}^{\infty} (\lambda J)^{2l-2}\,\frac{k_{2l}}{(2l)!}\,(x-x_k)^{2l}\right),\;\; a_0 = l^{-1}\sum_{k=1}^{N} m_k,$$

где

$$\sigma = m_k(a_0)^{-1}(2\pi)^{-0.5}, \qquad \sigma_{2l} = 0.5 m_k (a_0\Gamma(1+1/2l))^{-1},$$

$$k_{2l} = 2\pi R_k (m_k)^{-2}(1+\delta_k)^{2l-2}\mu_k^{2-2l} a_0^{4-2l},\; R_k = sh\Delta\psi(\delta_k + ch\Delta\psi_k)^{-1},$$

$$J_{2n} = (\lambda m_k(1+\delta_k))^{-1} a_0^2 \mu_k \left(2^{2n}(2n)!\Gamma^{2n}(1+1/2n)(2\pi R_k^2)^{-1}\right)^{1/(2n-2)}.$$

Л. И. Сербина (Нальчик)
lserbina@mail.ru

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Качественные свойства решений начальных и краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных составляют теоретическую основу, большинства известных в настоящее время, конструктивных подходов и методов решения проблем нелинейных динамических процессов и систем. Постоянно увеличивающийся круг решаемых задач нелинейной динамики приводит к пересмотру старых, существующих алгоритмов, уточнения области их применимости и в случае необходимости замены их новыми, более эффективными. Одно из альтернативных направлений, существенно расширяющим возможности математических методов анализа нелинейных процессов самой различной природы, связано с постановкой качественно новых задач, называемых нелокальными. Особый интерес среди нелокальных задач представляют нелокальные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных с интегральными краевыми условиями. Это объяснимо тем, что имея важное прикладное значение, они вместе с тем порождают большое количество разнообразных теоретических вопросов, связанных с их разрешимостью.

Представленная работа служит продолжением исследований, начатых в этом направлении. В ней особое внимание обращено на то, что нелокальные краевые задачи с интегральными краевыми условиями совершенно естественно возникают при математическом моделировании нелинейных особенностей фильтрации, учитывающих фрактальность пространственных и временных характеристик процесса. В качестве математической модели нелинейного процесса фильтрации, описывающей нелинейные эффекты и явления в более широком диапазоне изменения физических характеристик, предлагается нелокальная задача для линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа с интегральными краевыми условиями. Установлено существование и получены формулы общего интегрального представления решения поставленной нелокальной краевой задачи.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Сербина Л. И.* Нелокальные математические модели процессов переноса в системах с фрактальной структурой//Изд-во КБНЦ РАН,2002.144 с.

С. М. Ситник (Воронеж)
box2008in@gmail.com

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Методы теории операторов преобразования давно оформились в самостоятельный раздел математики и широко применяются в различных теоретических и прикладных вопросах [1-2]. Перечислим некоторые задачи, которые активно рассматриваются в последнее время и при решении которых существенно используются операторы преобразования различных типов.

1. Теория операторов преобразования Бушмана–Эрдейи. Эти операторы имеют многочисленные приложения в теории уравнений с частными производными, при изучении преобразования Радона и других вопросов.

2. Теория операторных свёрток и коммутирующих операторов. При помощи операторов преобразования можно строить соответствующие коммутанты, при этом в пространствах аналитических функций коммутанты производных в основном полностью описываются в рамках созданной И. Димовски теории операторных свёрток, намного более сложные рассмотрения требуются в пространствах типа C^k, тут результаты получены только в последнее время.

3. Операторы преобразования Сонина–Димовски и Пуассона –Димовски в рамках теории гипербесселевых функций и уравнений.

4. Операторы преобразования типа Сонина и Пуассона для дифференциально–разностных операторов Дункла.

5. Применения операторов преобразования в теории обобщённых аналитических функций. Например, этот метод активно применяется в работах В.В.Кравченко и его соавторов.

6. Теория дробного интегродифференцирования и метод интегральных преобразований со специальными функциями в ядрах, в том числе композиционный метод построения операторов преобразования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sitnik S. M.* Transmutations and Applications: a survey// arXiv: 1012.3741. 2010. 141 P.

2. *Ситник С. М.* Операторы преобразования и их приложения// Исследования по современному анализу и математическому моделированию. Отв. ред. Коробейник Ю. Ф., Кусраев А. Г. Владикавказ: Владикавказский научный центр РАН и РСО–А. 2008.—С. 226–293.

А. П. Солдатов (Белгород)
soldatov48@gmail.com

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛАМЕ НА ПЛОСКОСТИ [1]

Рассмотрим в области $D \subseteq \mathbb{R}^2$, ограниченной ляпуновским контуром Γ, сильно эллиптическую систему Ламе

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a_{12} + a_{21})\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

для вектора смещений $u = (u_1, u_2)$ с матричными коэффициентами

$$a_{11} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_6 \\ \alpha_6 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \qquad a_{12} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_4 \\ \alpha_3 & \alpha_5 \end{pmatrix},$$

$$a_{21} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}, \qquad a_{22} = \begin{pmatrix} \alpha_3 & \alpha_5 \\ \alpha_5 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение $\det[a_{11} + (a_{12} + a_{21})z + a_{22}z^2] = 0$ этой системы в верхней полуплоскости имеет два корня ν_1, ν_2. В зависимости от двух возможных случаев $\nu_1 \neq \nu_2$ и $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ положим, соответственно,

$$J = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \nu & 1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

[1] Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 - 2013 годы (госконтракты № П693 и № 02.740.11.0613).

Как установлено в [1], найдется такая обратимая матрица $b \in \mathbb{C}^{l\times l}$, что $a_0 b + a_1 bJ + a_2 bJ^2 = 0$ и блочная матрица B с элементами $B_{11} = \overline{B_{12}} = b$, $B_{21} = \overline{B_{22}} = bJ$ обратима. При этом любая другая матрица b_1 с теми же свойствами связана с b соотношением $b_1 = bd$ с некоторой обратимой матрицей d, коммутирующей с J. В частности, однородная степени нуль матрица -функция

$$H(\xi) = \mathrm{Im}\,[b(-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1} b^{-1}]$$

не зависит от выбора b.

Классические потенциалы двойного слоя, как известно [2], строятся по фундаментальной матрице системы (1). Введем обобщенный потенциал двойного слоя, который представляет собой интеграл

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\Gamma} Q(t, t-z)\varphi(t)|dt|, \quad z \in D, \tag{2}$$

с ядром $Q(t,\xi) = |\xi|^{-2}[n(t)\xi]H(\xi)$, где $n(t)\xi = n_1(t)\xi_1 + n_2(t)\xi_2$ и n означает единичную внешнюю нормаль. Для любой вектор- функции $\varphi \in C(\Gamma)$ он определяет функцию $u \in C(\overline{D})$, удовлетворяющей системе Ламе в области D.

С помощью этого потенциала в работе установлена редукция задачи Дирихле в классе $C(\overline{D})$ к эквивалентной системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода на Γ. В частности, задача Дирихле является фредгольмовой и в этом классе. Аналогичные результат справедлив по отношению к задаче Неймана, краевое условие которой можно проинтегрировать и записать в форме задачи Дирихле для сопряженной вектор- функции v. Эта функция связана с решением u системы Ламе соотношениями

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\left(a_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Заметим, что частные производные этой функции служат столбцами тензора напряжений σ.

Для функции v потенциал двойного слоя определяется аналогично (2) с той разницей, что матрица b заменяется на $c = a_{21}b + a_{22}bJ$. Матрицы b, c вычисляются явно[3], так что соответствующие явные выражения можно дать (после достаточно кропотливых вычислений) и для ядер Q.

Особенно простые выражения получаются в случае орттропной среды, которая определяется условием $\alpha_5 = \alpha_6 = 0$. В этом случае потенциал (2) и аналогичный потенциал для v можно записать в форме

$$
\begin{aligned}
u(z) &= \frac{\rho_0 k}{\pi}\int_\Gamma \frac{n(t)\xi}{|\omega(\xi)|^2} G_1(\xi)\varphi(t)|dt|,\\
v(z) &= \frac{\rho_0}{\pi}\int_\Gamma \frac{n(t)\xi}{|\omega(\xi)|^2} G_2(\xi)\varphi(t)|dt|,
\end{aligned}
$$

где следует положить $\xi = t - z$ и приняты обозначения $\omega(\xi) = (\xi_1 + \nu_1\xi_2)(\xi_1 + \nu_2\xi_2)$,

$$
\begin{aligned}
G_1(\xi) &= \begin{pmatrix} \rho^2(\alpha_2\xi_1^2 + \alpha_3\xi_2^2) & (\alpha_3+\alpha_4)\xi_1\xi_2 \\ \rho^2(\alpha_3+\alpha_4)\xi_1\xi_2 & \alpha_3\xi_1^2 + \alpha_1\xi_2^2 \end{pmatrix},\\
G_2(\xi) &= \begin{pmatrix} \xi_1^2 & \rho^2\xi_1\xi_2 \\ \xi_1\xi_2 & \rho^2\xi_2^2 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
k = \frac{1}{\alpha_3 + \sqrt{\alpha_1\alpha_2}}, \quad \rho^2 = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \quad \rho_0^2 = \frac{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_4^2 + 2\alpha_3(\sqrt{\alpha_1\alpha_2} - \alpha_4)}{\alpha_2\alpha_3}.
$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Солдатов А.П.* О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости // Дифференциальные уравнения, 2003, Т. 39, No 5, С. 674–686.

2. *Купрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963.

3. *Soldatov A.P.* To the theory of anisotropic plane elasticity // Analysis by Oldenbourg Wissenschaftsverlags, 2010, V. 30(2) P. 107–117

С. А. Соловьева, З. Х. Галимова (Набережные Челны)
solovjeva_sa@mail.ru, galimova_zh@mail.ru

К ВОПРОСУ О СХОДИМОСТИ ОДНОГО ВАРИАНТА МЕТОДА СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ [1]

Рассматривается интегральное уравнение вида

$$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 K(t,s)u^{-1}(s)x(s)ds = y(t) \ (x, y \in X), \qquad (1)$$

где $t \in [0,1]$, ядро $K(t,s)$ удовлетворяет некоторым условиям "гладкости" точечного характера, $u(t) \equiv \prod_{j=1}^{p}(t-t_j)^{m_j}$, $t_j \in (0,1)$, $m_j \in$ N; $X \equiv C\{\overline{m};\overline{\tau}\}$ – пространство основных функций (см., напр., [1, с. 22]).

Приближенное решение уравнения (1) ищем в виде элемента $x_n \in X_n \equiv U(S_n^1) \bigoplus H_{m-1} \subset X$, где U – оператор умножения на функцию $u(t)$, S_n^1 и H_{m-1} – соответственно классы сплайнов по n равноотстоящим узлам и полиномов степени не выше $m-1$. Согласно рассматриваемому методу, неизвестные параметры находим из системы уравнений вида (4.3.5) ([1, с. 123]).

Для данной вычислительной схемы справедлива

Теорема. *Пусть уравнение (1) имеет единственное решение в X при любой правой части. Тогда при всех достаточно больших n приближенные решения $x_n^*(t)$ существуют, единственны и сходятся к точному решению $x^*(t)$ по норме пространства X со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\| = O\left\{\omega_t\left(h;\, n^{-1}\right) + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=0}^{m_j-1}\omega\left(g_{ji};\, n^{-1}\right) + \omega\left(Ty;\, n^{-1}\right)\right\},$$

где $\omega(\varphi;\,\Delta)$ – модуль непрерывности функции $\varphi \in C$ с шагом $\Delta\, (0 < \Delta \leq 1)$, $\omega_t(f;\,\Delta)$ – частный модуль непрерывности функции $f(t,\,s)$ по аргументу t; $h(t,\,s) \equiv (T_tT_sK)(t,\,s)$, $g_{ji}(t) \equiv T(K_s^{\{i\}}(t,t_j))$ $(i = \overline{1, m_j - 1},\ j = \overline{1,p})$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (госконтракт № 02.740.11.0193).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Габбасов Н. С.* Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщенных функций. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2006. 176 с.

С. А. Соловьева (Набережные Челны)
solovjeva_sa@mail.ru

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО РОДА [1]

Рассматривается линейное интегральное уравнение третьего рода (УТР)

$$(Ax)(t) = \prod_{j=1}^{p}(t-t_j)^{m_j}x(t) + \int_0^1 K(t,s)x(s)ds = y(t) \ (x \in X,\, y \in Y), \tag{1}$$

где $t \in I \equiv [0,1]$, $m_j \in \mathrm{N}$; $Y \equiv L_2^{\tau}$, $X \equiv V_2$ – пространства основных и обобщенных функций соответственно (см. [1]).

Фредгольмовость оператора $A : X \to Y$ и условия разрешимости уравнения (1) в виде ортогональности правой части всем элементам базиса пространства решений союзного однородного уравнения полу-чены в работе [1].

В данной заметке на основе идей и методов [2] получен явный вид решения УТР (1) в пространстве X.

Имеют место утверждения, аналогичные теореме 2.5.2 [2] и следствию из него, при этом роль тейлоровских производных играют производные в среднем (см., напр., [3, с.260]), а вместо (2.2.6) следует брать

$$K(t,s) \in Y(I^2),\ K_t^{[i]}(t_j,s),\ K_s^{[i]}(t,t_j) \in Y\ (i = \overline{0, m_j-1},\ j = \overline{1,p}),$$

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 [(N_tK)(t,s)]^2 dsdt < \infty,\ \int\limits_0^1\int\limits_0^1 [(N_tK)(s,t)]^2 dsdt < \infty.$$

Здесь $\varphi^{[i]}(t)$ означает производные в среднем соответствующих порядков, а N – "характеристический" оператор класса Y (см., напр., [2, с. 22], [1]).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (госконтракт № 02.740.11.0193).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Рогожин В. С., Расламбеков С. Н.* К теории интегральных уравнений третьего рода // Изв. вузов. Математика. 1984. № 4. С. 77–79.

2. *Габбасов Н. С.* Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщенных функций. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2006. 176 с.

3. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 688 с.

М. А. Сумбатян (Ростов-на-Дону)
sumbat@math.rsu.ru

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ С ОСТРОЙ ЗАДНЕЙ КРОМКОЙ В РАМКАХ ГИПОТЕЗЫ КУТТА-ЖУКОВСКОГО [1]

Двумерная задача безвихревого обтекания идеальной несжимаемой жидкостью со скоростью v_0 на бесконечности твердого профиля с граничным контуром l сводится к интегральному уравнению

$$\frac{\varphi(x)}{2} - \int\limits_l \varphi(y) \frac{\partial G(y,x)}{\partial n_y} dl_y = f(x) = v_0 (x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha), \quad x \in l \quad (1)$$

для потенциала скорости: $\bar{v} = \mathrm{grad}\varphi$. Здесь $G(y,x) = -\ln r/(2\pi)$, $r = |y-x| = [(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2]^{1/2}$, $\bar{n}_y$ – внешняя единичная нормаль к контуру l, α — угол набегающего потока с осью x_1.

В классе гладких контуров ядро уравнения (1) – гладкое, и оно имеет единственное решение $\varphi(y) \in C_1(l)$. Однако аэродинамический профиль обладает острой задней кромкой, в окрестности которой $\varphi(y) \notin C_1(l)$ и скорость $v = \partial\varphi/\partial\tau_y$ (где $\bar{\tau}_y$ — вектор единичной касательной к контуру в точке $y \in l$) имеет особенность, что противоречит известной гипотезе Кутта-Жуковского. В связи с этим в правую часть вводится дополнительное слагаемое с неизвестной циркуляцией Γ вида $F(x) \cdot \Gamma$, где $F(x), x \in l$ – некоторая известная функция. При этом неизвестная циркуляция Γ находится из условия $\varphi(y) \in C_1(l)$.

С использованием функции тока та же задача может быть сведена к другому интегральному уравнению относительно скорости

[1]Работа выполнена при поддержке ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007-2013 годы», Госконтракт №16.516.11.6106.

потока на контуре:

$$\frac{v(x)}{2}+\int\limits_{l} v(y)\frac{\partial G(y,x)}{\partial n_x}dl_y = g(x) = -\,\bar{v}_0\cdot\bar{\tau}_x, \quad x\in l, \tag{2}$$

где $\bar{\tau}_x$ — вектор единичной касательной к контуру в точке $x \in l$. Для профиля с острой задней кромкой решение этого уравнения неединственно, и выбор единственного решения здесь связан с удовлетворением условию Кутта-Жуковского, т.е. принадлежности решения классу $v(y)\in C(l)$.

Е. В. Тюриков (Ростов-на-Дону)
etyurikov@pochta.ru

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБОБЩЕННОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ МЕМБРАННОЙ ТЕОРИИ ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК

В рамках мембранной теории выпуклых оболочек [1] изучается задача (*задача* R) о реализации безмоментного напряженного состояния равновесия тонкой упругой оболочки, серединная поверхность S которой есть строго внутренняя часть замкнутой выпуклой поверхности S_0 класса регулярности $W^{3,p}$, $p > 2$, с кусочно-гладким краем $L = \bigcup\limits_{j=1}^{n} L_j$, состоящим из конечного числа дуг L_j класса регулярности $C^{1,\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$. Предполагается, что в каждой точке дуги L_j $(j = 1,\ldots,n)$ задана проекция $u(s)$ *вектора усилий* на направление $\boldsymbol{r}$ принадлежащего поверхности s вектора $\vec{r}(s) = \{\alpha(s),\beta(s)\}$ с касательной и нормальной составляющими α, β соответственно, где s — натуральный параметр, $\alpha^2+\beta^2 = 1$, функции $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $u(s)$ — гельдеровы на каждой из дуг L_j, векторное поле $\vec{r}$ как вектор-функция $\vec{r}(c)$ точки c контура L имеет разрывы 1-го рода в угловых точках, c_j $(j = 1,\ldots,n)$, $\beta(s)$ — знакопостоянная функция.

Подробно изучен частный случай непрерывного на L поля направлений $\boldsymbol{r}$. Для формулировки результатов введены следующие понятия. Непрерывное на L поле направлений назовем *входящим* в точке c_j, если оно задано непрерывным в точке c_j векторным полем $\vec{r}$. Если же предельные значения векторного поля $\vec{r}$ слева и справа в точке c_j — разнонаправленные векторы, то поле направлений назовем *выходящим* в точке c_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Для любой поверхности S и непрерывного поля направлений, *входящего* (*выходящего*) в произвольно отмеченных точках $c_{i_1}, \ldots, c_{i_k}$ из числа $c_1, \ldots, c_n$ $(1 \leqslant i_k \leqslant n;\ 1 \leqslant k \leqslant n)$ и *выходящего* (*входящего*) в остальных угловых точках, найден алгоритм, позволяющий вычислить индекс граничного условия соответствующей задачи Римана–Гильберта для уравнения равновесия [1]. Другой частный случай задачи R известен как *смешанная* граничная задача [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Векуа И. Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 288 с.

2. *Тюриков Е. В.* Геометрический аналог задачи Векуа–Гольденвейзера // ДАН. 2009. Т. 424, № 4. С. 455–458.

Ш. Р. Фармонов (Фергана, Узбекистан)
farmonovsh@mail.ru

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ЗАДАЧИ ФРАНКЛЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

Пусть Ω - конечная односвязная область плоскости xOy, ограниченная отрезками $\overline{AB} = \{(x,y) : x+y=1, x \geq 0,\ y \geq 0\}$, $\overline{B^*O} = \{(x,\,y) : y=0, -1 \leq x \leq 0\}$, $\overline{A^*O} = \{(x,\,y) : x=0,\ -1 \leq y \leq 0\}$ и дугами $B^*B = \{(x,y) : \sqrt{-x}+\sqrt{y}=1, x<0, y>0\}$, $A^*A = \{(x,y) : \sqrt{x}+\sqrt{-y}=1, x>0, y<0\}$, а $\Omega_0 = \Omega \cap \{(x,y) : x>0, y>0\}$, $\Omega_{1j} = \Omega \cap \{(x,y) : (-1)^j\,(x+y)<0, y<0\}$, $\Omega_{2j} = \Omega \cap \{(x,y) : (-1)^j\,(x+y)<0, x<0\}$, $j=\overline{1,2}$, где $A(1,0), B(0,1), A^*(0,-1), B^*(-1,0)$.

Задача $F^{(2)}$. Найти функцию $u(x,y) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, удовлетворяющую следующим условиям: 1) в Ω_0 есть регулярное решение уравнения

$$xu_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_x + \alpha u_y = 0, \qquad 0 < \alpha = const < (1/2)\,; \qquad (1)$$

2) в областях $\Omega_{11}, \Omega_{12}, \Omega_{21}, \Omega_{22}$ есть обобщенное решение уравнения (1) из класса R_2[1]; 3) выполняются условия склеивания

$$\lim_{y\to -0}\,(-y)^{\alpha}\,u_y(x,y) = -\lim_{y\to +0} y^{\alpha} u_y(x,y), \qquad 0<x<1;$$

$$\lim_{x\to -0}\,(-x)^{\alpha}\,u_x(x,y) = -\lim_{x\to +0} x^{\alpha} u_x(x,y), \qquad 0<y<1;$$

4) удовлетворяет краевым условиям $u(x,y) = \varphi(x,y),\ (0,y) \in \overline{AB}$;

$$u(0,y) = f_1(y),\ (0,y) \in \overline{OA^*}; \qquad u(x,0) = f_2(x),\ (x,0) \in \overline{OB^*};$$

$$\lim_{x\to +0} x^{\alpha} u_x(x,y) = m \lim_{x\to +0} x^{\alpha} u_x(x,-y) + g_1(y), \qquad (0,y) \in OA^*;$$

$$\lim_{y\to +0} y^{\alpha} u_y(x,y) = m \lim_{y\to +0} y^{\alpha} u_y(-x,y) + g_2(x), \qquad (x,0) \in OB^*,$$

где $m = \pm 1$, а $\varphi(x,y),\ f_j(t),\ g_j(t)$ - заданные функции, $f_1(0) = f_2(0)$.

Отметим, что уравнение (1) в области Ω_0 принадлежит эллиптическому типу, а в областях Ω_{kj} $(k,j=\overline{1,2})$ — гиперболическому типу, причем отрезки OA и OB являются линиями изменения типа.

Теорема. Пусть заданные функции удовлетворяют следующим условиям: $\varphi(x,y) = [x(1-x)]^{\varepsilon}\,\tilde{\varphi}(x),\ \tilde{\varphi}(x) \in C[0,1],\ \varepsilon > 1+\alpha;$

$f_j(t) = A\left[1-(-t)^{-2\beta}\right]+\tilde{f}_j(t),\ \tilde{f}_j(0) = -A,\ \tilde{f}_j(t) \in C^{(2,\gamma)}[-1,0],\ \gamma > 0;\ g_j(t) = |t|^{\delta}\,\tilde{g}_j(t),\ \tilde{g}_j(t) \in C[-1,0] \cap C^1(-1,0),\ \tilde{g}'_j(t) = |t|^{-\varepsilon_1}\,O(1), \delta \geq 1+\alpha,$

$0 \leq \varepsilon_1 < 1,\ j = \overline{1,2}$, где $A = \dfrac{4^{2\beta}\beta\Gamma^2(\beta)}{2\pi\Gamma(2\beta)} \displaystyle\int_0^1 \tilde{\varphi}(t)[t(1-t)]^{\beta+\varepsilon-(1/2)}dt.$

Тогда задача $F^{(2)}$ имеет единственное решение.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 256 с.

В. Т. Фоменко (Таганрог)
V.T.Fomenko@rambler.ru

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ [1]

Пусть в плоской области D параметров x, y задана функция $z = f(x,y)$, порождающая метрику

$$ds^2 = (1+f_x^2)dx^2 + 2f_xf_ydxdy + (1+f_y^2)dy^2, (x,y) \in D.$$

При реализации метрики ds^2 в трехмерном пространстве R^3 в виде поверхности, край которой лежит на заданной опоре, возникает следующая краевая задача относительно искомых функций λ, μ, ζ:

$$\begin{gathered}\lambda_x = (a_{11}+f_{xx})\zeta + b_{11},\\ \mu_y = (a_{22}+f_{yy})\zeta + b_{22},\\ \lambda_y + \mu_x = 2(a_{12}+f_{xy})\zeta + 2b_{12} \text{ в } D;\\ \zeta = \sigma \text{ на } \partial D,\end{gathered} \tag{1}$$

где $a_{ij}, b_{ij}, \sigma-$ заданные функции.

Доказана следующая

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства образования и науки РФ ФГБОУ ВПО "ТГПИ имени А.П. Чехова"(проект № 1.423.2011), «Реализация метрик положительной кривизны в виде поверхностей с заданной опорой», научный руководитель - Фоменко В.Т.

Теорема. *Пусть выполнены условия:*

1)$f \in C^{4,\alpha}, 0 < \alpha < 1; f_{xx} > 0; f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \geqslant f_0 > 0; f_0 = const;$

2)$a_{ij}, b_{ij} \in C^{2,\alpha}; a_{11} > 0; a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geqslant a_0 > 0; a_0 = const;$

3)$(a_{11yy} - 2a_{12xy} + a_{22xx}) \in C^{1,\alpha};$

4)$(b_{11yy} - 2b_{12xy} + b_{22xx}) \in C^{1,\alpha};$ 5)$\sigma \in C^{2,\alpha}$.

Тогда краевая задача (1) безусловно разрешима.

Решение принадлежит классу $C^{3,\alpha}$ и непрерывно зависит от трех параметров c_1, c_2, c_3. Кроме того, имеет место априорная оценка

$$max\{||\lambda||_{3,\alpha}, ||\mu||_{3,\alpha}, ||\zeta||_{3,\alpha}\} \leqslant C(||B||_{2,\alpha} + ||\sigma||_{2,\alpha} + \sum_{i=1}^{3} |c_i|),$$

где $C = const > 0$; $||B||_{2,\alpha} = max\{||b_{11}||_{2,\alpha}; ||b_{12}||_{2,\alpha}; ||b_{22}||_{2,\alpha}\}$.

В. Я. Ярославцева (Липецк)
aleks49@lipetsk.su

ОПЕРАТОРЫ ДРОБНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Рассматриваются производные и интегралы дробного порядка по гиперболическим синусам, которые возникают при построении операторов преобразования для дифференциального оператора типа Лежандра-Гегенбауэра $P_x = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^{2\nu} x} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{sh}^{2\nu} x \cdot \dfrac{\partial}{\partial x}\right) + \nu^2$, где ν - действительный параметр.

При построении операторов дробного интегродифференцирования используется подход Л. Шварца. Вводятся пространство основных функций и топологически сопряженное ему пространство обобщенных функций. Через $C^{\infty}_{чет,0}(-r, r)$ будем обозначать класс четных, бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в $(-r, r)$, а через $C^{\infty}_{чет,0}[0, r)$ — сужение этого функционального класса на $[0, r)$. Множество $C^{\infty}_{чет,0}[0, r)$ является подпространством обычного пространства основных функций, последнее индуцирует в $C^{\infty}_{чет,0}[0, r)$ естественную топологию. Через $\left[C^{\infty}_{чет,0}[0, r)\right]'$ будем обозначать пространство линейных непрерывных функционалов над $C^{\infty}_{чет,0}[0, r)$. В случае локально суммируемой функции с весом $\operatorname{sh} x$ функционал класса $\left[C^{\infty}_{\text{чет},0}[0,r)\right]'$ определим по формуле

$$(f,v)=\frac{1}{2}\int\limits_0^r f\Big(2Arsh\sqrt{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}\Big)v\Big(2Arsh\sqrt{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}\Big)\operatorname{sh} x\,dx,$$

$v(x)\in C^{\infty}_{\text{чет},0}[0,r)$.

Интегродифференциальный оператор порядка λ от функции $v(x)$ определяется как свертка основной функции $v(x)$ с функционалом $\left(\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}\right)^{\lambda-1}$ и в случае $\lambda>0$ записывается в виде интеграла Римана-Лиувилля. В работе показывается, что операторы образуют коммутативную группу по суперпозиции и изучается их действие в весовых функциональных пространствах, при определении которых используется L_2 - норма.

Секция IV
Математика в естествознании, интеллектуальные системы и компьютерные науки

Е. В. Алымова (Ростов-на-Дону)
langnbsp@gmail.com

ЯЗЫК ОПИСАНИЯ КОНФИГУРАЦИЙ ГЕНЕРАТОРА ТЕСТОВ ДЛЯ ОПТИМИЗИРУЮЩИХ И РАСПАРАЛЛЕЛИВАЮЩИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРОГРАММ

Генератор тестов [1] разработан для тестирования оптимизирующих и распараллеливающих преобразований программ в компиляторе. На вход генератор получает формальную грамматику языка программирования, на котором генерируются тестовые программы, и конфигурационный файл в формате XML, хранящий формальное описание содержимого этих программ.

Для описания конфигураций разработан язык, задаваемый контекстно-свободной формальной грамматикой. Грамматика языка конфигураций задается четверкой $Config = (N, T, P, S)$, где

- N – множество нетерминальных символов, в котором $S \in N$ и S – стартовый символ;
- P – множество правил, записанных в расширенной форме Бэкуса – Наура;
- T – множество терминальных символов.

Во множестве T выделяются следующие подмножества:

1. Символы, используемые в качестве названий операторов, общих для множества структурных языков программирования, работа с которыми поддерживается генератором.
2. Символы, используемые для разделения генерируемой программы на блоки операторов.
3. Символы, используемые для задания видов информационных зависимостей в блоках.

Язык $L(Config)$ является множеством правильных XML-документов. Генератор может принять на вход правила грамматики $Config$ в текстовом файле и сгенерировать новую конфигурацию.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Алымова Е. В.* Автоматическая генерация тестов на основе конфигурационных файлов для оптимизирующих преобразований компилятора // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2010. № 6. С. 5–8.

В. Н. Беркович (Ростов-на-Дону)
bvn119@rambler.ru

ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В ОБЛАСТЯХ КЛИНОВИДНОГО ТИПА

В настоящем докладе представлены результаты исследования особенностей процесса распространения волн в упругой клиновидной среде. Математическая постановка проблемы сводится к изучению вопроса о существовании ненулевых решений краевой задачи динамики клиновидной среды с однородными граничными условиями на ее гранях. На основе применения метода функционально-инвариантных решений Смирнова-Соболева [1], вариационного принципа Гамильтона-Остроградского и принципа предельной амплитуды [2] дан способ построения этих решений, которые оказываются локализованными как в окрестности свободных граней клина, так и в окрестности ребра и экспоненциально затухают при удалении от границ внутрь клиновидной области. Показано, что в случае плоских колебаний полученные решения порождают на гранях клиновидной среды поверхностные волны Релея, распространяющиеся без затухания вдоль граней, а в пространственном случае — клиновые волны, распространяющиеся без затухания вдоль ребра [3].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Поручиков В. Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука. 1986. 328 с. 2. *Бабич В. М., Капилевич М. Б. и др.* Линейные уравнения математической физики. Серия СМБ. М.: Наука. 1964. 368 с.

3. *Ватульян А. О., Паринова Л. И.* // Исследование клиновых мод ортотропной среде. Вестник ДГТУ. 2005. Т. 3. № 4. С. 491–499.

Н. В. Боев, С. В. Ивченко (Ростов-на-Дону)
boyev@math.rsu.ru

ДИФРАКЦИЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТЯХ ИЗОЛИРОВАННЫХ ДЕФЕКТОВ В УПРУГИХ ТЕЛАХ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ [1]

Распространение ультразвуковых волн в трехмерном упругом теле конечных размеров, содержащем изолированные полостные дефекты, исследуется в рамках геометрической теории дифракции. Явные аналитические выражения перемещений в волновых полях

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00557а).

получены асимптотической оценкой дифракционных интегралов модифицированной физической теории дифракции Кирхгофа [1].

В ультразвуковом неразрушающем контроле упругих материалов используются как продольные, так и поперечные высокочастотные волны [2]. В предположении тонального заполнения сигнала ультразвукового (УЗ) датчика несколькими периодами монохроматической волны проблема исследуется в режиме гармонических колебаний. В рамках лучевых представлений распространение УЗ волны геометрическими методами осуществляется расчет траектории многократно переотраженной волны от поверхностей дефектов и от граничной поверхности упругого тела. Эта траектория представляет собой пространственную ломаную линию. После определения траектории луча становятся известными все необходимые геометрические параметры задачи. Для распространяющейся продольной УЗ волны в рамках геометрической теории дифракции получен явный вид перемещений в продольной волне, многократно переотраженной как от граничной поверхности упругого тела, так и от поверхностей дефектов, находящихся в нем. Аналитическое решение задачи получено на основе асимптотической оценки [3] дифракционных интегралов модифицированной, для случая высокочастотных колебаний, физической теории дифракции Кирхгофа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шендеров Е. Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.

2. *Ермолов И. Н.* Теория и практика ультразвукового контроля. М.: Машиностроение, 1981. 240 с.

3. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

В. С. Брызгалина А.В. Гусаков С.В. Мермельштейн Г.Г.
(Ростов-на-Дону)
0_slastenka_0@mail.ru

ЭФФЕКТИВНЫЕ РЕШЕНИЯ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассмотрим задачу многокритериального линейного программирования.

$$f_t(x) = c_i x \to max, i = 1, ..., k,$$

$$x \in S = \{Ax = b, x \geq 0, b \in R^m\}$$

Пусть S непустое ограниченное множество.

При k=2 решается задача параметрического линейного программирования с целевой функцией

$$F = \lambda \cdot f_1 + (1 - \lambda) \cdot f_2 \to max, \lambda \in [0, 1]$$

В этом случае удается построить все множество эффективных решений.

В общем случае, все эффективные вершины множества S могут быть найдены с помощью следующего алгоритма:

1. Найти исходную эффективную вершину и соответствующий ей эффективный базис B^0, взяв в качестве целевой функции задачи линейную свертку критериев $f_i(x)$ с положительными коэффициентами λ, такими что $\sum \lambda_i = 1$. Организовать список эффективных базисов включив в него B^0.

2. Исследовать базис B^0 на наличие смежных эффективных базисов. Для этого можно использовать подзадачи-тесты Эванса-Штойера [1]. Пополнить список эффективных базисов найденными смежными эффективными базисами B^j.

3. Осуществить переход к очередному не исследованному эффективному базису B^j. Найти отвечающую ему эффективную вершину. Исследовать базис B^j на наличие смежных эффективных базисов, пополнить список вновь найденными эффективными базисами и т.д. до тех пор, пока не будет просмотрен весь список эффективных базисов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Р. Штойер.* Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения. М., Радио и связь, 1992.

О. В. Жбанова (Ростов)
zhbanova@sfedu.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПЫТА МИКРОПИПЕТОЧНОЙ АСПИРАЦИИ [1]

Микропипеточная аспирация живых клеток может использоваться для определения механических свойств клеток. В докладе сообщается о решении уравнения равновесия оболочки. Оболочка в данном случае моделируется как нелинейно-упругая сферическая оболочка. Система нелинейных ОДУ решается численно. Численный метод реализован в математическом пакете Matlab. Результаты вычислений представлены графиками и поясняющими иллюстрациями. Каждый график соответствует различному давлению. Отмечается, что зона контакта между оболочкой и микропипеткой — точка или область с занее неизвестными границами. Также представлены графики форм деформированных сечений и графики напряжений при разных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Evans E. A., Hochmuth R. M.* Mechanochemical Properties of Membrane // Current Topics in Membranes and Transport. Bronner F., Klienzeller A. (eds.) Academic Press. 1978. № 10. pp. 1–65.

2. *Fung Y. C.* Biomechanics.: 2en ed. Springer Science, 1993. 569 p.

3. *Зубов Л. М., Колесников А. М.* Большие деформации упругих безмоментных оболочек вращения // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2004. № 1. С. 33–37.

Р. И. Каримов (Ростов-на-Дону)
phantom_power@mail.ru

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ДИСКРЕТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ

Важное значение имеют быстрые алгоритмы ДПФ, в которых число необходимых операций уменьшено по сравнению с обычным бесхитростным вычислением за счёт изощрённой оптимизации порядка выполнения действий. Наиболее известны быстрые алгоритмы Гуда, Кули и Тьюки, Винограда, Рейдера. Фундаментальную роль ДПФ играет в современной криптографии.

Целью работы является изучение спектральных свойств указанных новых модифицированных преобразований Фурье. В частности,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Президента Российской Федерации (грант МК–439.2011.1)

представляют особый интерес преобразования при $n = 4m$ с симметричным спектром (а при $n = 4$ с простым), в котором все собственные значения имеют одинаковые кратности. Это не выполняется для обычных ДПФ ни при каких размерностях. Такие преобразования с симметричным спектром являются в определённом смысле более естественными, чем обычное ДПФ, так как они ближе к своему непрерывному аналогу в плане равноправности точек спектра. Такие МДПФ за счёт более простых спектральных свойств оказываются полезнее в различных вычислительных приложениях.

На основе результатов настоящей работы можно предложить следующий алгоритм шифрования информации. Отправитель и получатель заранее знают, какой из вариантов МДПФ данного порядка используется при обмене, а противнику это не известно. Ввиду огромности числа $n!$ подобный алгоритм может быть не менее стойким, чем стандартные алгоритмы с большой длиной ключа. Кроме того, при данном методе требуется минимальная модификация существующих алгоритмов и программ, сводящаяся к простой замене одной матрицы на другую.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ситник С. М., Телкова С. А.* Об одном варианте дискретного преобразования Фурье// Чернозёмный альманах научных исследований. Серия "Прикладная математика и информатика". 2006, № 1 (2). С. 154–159.

2. *Ситник С. М.* Модифицированное дискретное преобразование Фурье// Вестник Воронежского института МВД России. 2006. № 7. С. 196–201.

А. И. Недошивина (Воронеж)
vishechka87@mail.ru

О ЛОКАЛИЗАЦИИ ОБЛАСТЕЙ ПРИ ВИДЕОНАБЛЮДЕНИЯХ

Рассмотрим задачу о локализации точки относительно многоугольника на плоскости. Это известная задача вычислительной геометрии, имеющая много различных известных способов решения. Наряду с достоинствами, каждое такое решение имеет свои недостатки и ограничения. В работе предлагается новый метод решения этой задачи, который в некоторых отношениях превосходит известные на сегодняшний день алгоритмы. В основе метода лежит неожиданное применение теорем Коши о вычетах из теории функций комплексного переменного. Затем будут перечислены сильные и слабые стороны предложенного алгоритма. Рассматривается приложение к сжатию информации, получаемой в результате видеонаблюдений при помощи соответствующей спецтехники.

Предлагаемый метод основан на вычислении интеграла Коши по контуру многоугольника. Этот интеграл равен нулю, если точка находится вне многоугольника, и ненулевой постоянной, если точка внутри многоугольника. Основным результатом является получение явной формулы для указанного интеграла, на основании которой определяется решении задачи о локализации точки относительно многоугольника.

К числу достоинств предложенного метода по сравнению с другими известными можно отнести несколько его особенностей.

1. Метод выгодно применять, когда точка лежит вблизи границы области. Конкурирующие методы приводят к необходимости сравнивать практически равные числа, тогда как в данном методе сравнивать приходится существенно различающиеся по модулю величины.

2. Данный метод не требует выпуклости многоугольника в отличие от большинства других известных алгоритмов.

3. Метод полностью применим в том случае, когда контур области составлен не из прямых, а кривых линий.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Вышегородцева А. И., Ситник С. М.* О применении методов теории функций комплексного переменногок задаче о локализации точки относительно многоугольника,возникающей при сжатии данных видеонаблюдения// Чернозёмный альманах научных исследований. Серия «Фундаментальная математика». 2009, № 1 (8). С. 324–339.

И. В. Павлов, О. В. Назарько (Ростов-на-Дону)
pavloviv2005@mail.ru

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О ДЕФОРМИРОВАННЫХ ФИНАНСОВЫХ РЫНКАХ

Рассмотрим фильтрованное пространство $\big(\Omega, \mathbf{F}\big)$, где Ω — произвольное множество, а $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ — возрастающая последовательность σ-алгебр на нем (фильтрация). Пусть $Z = (Z_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ — адаптированный случайный процесс, мыслимый как эволюция дисконтированной цены акции на некотором финансовом рынке. В классической теории расчетов на финансовых рынках процесс Z рассматривается относительно некоторой (физической) вероятностной меры P, для которой определяется совокупность эквивалентных ей мартингальных (для процесса Z) вероятностных мер, играющих основную роль в вычислении цен различных платежных обязательств, а также в построении хеджирующих портфелей. Однако на неустойчивых финансовых рынках (например, в случае кризиса или в случае агрессивной скупки акций) развитие процесса Z при переходе от момента времени n к моменту $n+1$ при различных n может определяться различными вероятностными мерами. Для математического моделирования такой ситуации приходится заменять физическую меру P семейством $\mathbf{Q} = (Q^{(n)}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ вероятностных мер $Q^{(n)}$, определенных на $\mathcal{F}_n$. Семейство $\mathbf{Q}$ названо нами деформацией. При этом различаются деформации 1-го рода, удовлетворяющие при всех n свойству абсолютной непрерывности $Q^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} << Q^{(n)}$, и деформации 2-го рода, удовлетворяющие обратным соотношениям. Обобщением понятия мартингала становится понятие деформированного мартингала, а обобщением мартингальной меры — мартингальная деформация. В настоящем докладе будут представлены некоторые новые теоремы для деформированных мартингалов, имеющие важное значение для исследования «деформированных» финансовых рынков.

Теорема. *Пусть $\boldsymbol{Q}$ — деформация 2-го рода, удовлетворяющая некоторому дополнительному условию равномерной ограниченности, процесс Z — деформированный субмартингал, марковские моменты ν и τ ограничены, причем $\tau \leq \nu$. Тогда $Q^{(\tau)}$-п.в. выполняется неравенство $Z_\tau \leq E_\tau^{(\nu)} Z_\nu$*, где

$$Q^{(\tau)}(A) = \sum_{i=0}^{\infty} Q^{(i)}(A\{\tau = i\})$$

$\forall A \in \mathcal{F}_\tau$, $E_\tau^{(\nu)} f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} I_{\{\tau=k\}} \sum\limits_{i=0}^{\infty} E_k^{(k+i)}(f \cdot I_{\{\nu=k+i\}})$,

$$E_k^n f = E_k^{k+1} E_{k+1}^{k+2} \ldots E_{n-1}^n f, E_n^{n+1}(f) = E^{Q^{(n+1)}}[f|\mathcal{F}_n]$$

.

А. Ю. Пигарев (Воронеж)
pochtaname@gmail.com

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ АППРОКСИМАЦИИ СИГНАЛОВ

В конце 18 века Де Прони был предложен метод аппроксимации функций определённых классов при помощи суммы экспонент. Задача состоит в подборе оптимальных параметров аппроксимаций по заданным значениям функции Этот метод применяется с успехом и в настоящее время в теории сигналов, при обработке и сжатии информации и в других разнообразных прикладных задачах.

Следует отметить, что современный подход к использованию метода Де Прони отличается несколькими особенностями.

1.Значения сигналов рассматриваются на равномерной сетке, то есть с постоянным шагом по времени.

2. Задача является переопределённой. Ввиду этого разработаны специальные методы удаления менее значимых экспонент, например, представляющих шумовые помехи, а решение проводится методом наименьших квадратов.

В докладе рассмотрена задача, которая ранее обычно не рассматривалась ввиду своей сложности. Система для нахождения коэффициентов решается при минимальном наборе данных, а значения задаются на произвольной неравномерной сетке. Получены следующие основные результаты.

1. Проведено численное исследование системы при небольших размерностях методом Ньютона.

2. Рассмотрен метод решения системы, основанный на приближении экспонент рациональными аппроксимациями Паде, в том числе с фиксированными знаменателями.

3. Рассмотрен метод решения системы, основанный на использовании понятия псевдорешения.

4. Изучены численные характеристики матриц Вандермонда и их обратных, возникающих при решении системы методами наименьших квадратов или псевдорешений.

5. Рассмотрено применение дискретного преобразования Фурье для выделения значимых показателей экспонент в методе де Прони.

В. А. Родин (Воронеж)
rodin_v@mail.ru

ОСОБЕННОСТИ ЛОГНОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОДОХОДНЫЙ НАЛОГ

В НК РФ отмечено, что положения по введению и исполнению налогов должно сглаживать финансовые неравенства разных слоев населения. Президент США выступил в 2011 году с предложением довести высший процент прогрессивного подоходного налога США до 30–35. Многие прогрессивные страны Европы (Дания, Швеция и др.) давно и успешно используют прогрессивную шкалу налогов на доходы населения. При равномерном подоходном налоге в 13 в России положение о социальной направленности налогообложения остается пустым заклинанием. В докладе, опираясь на современные статистические исследования, приведена определенная модель прогрессивной шкалы налога на доходы физических лиц. С помощью компьютерной программы исследуется численная зависимость всей суммы сбора налога по данной шкале от параметров распределения легальных доходов населения в различных районах России. Аналитически вычислена относительная предельная возможность логнормального распределения. Данные можно использовать для косвенного определения возможных нетрудовых доходов отдельных физических лиц.

В. В. Сопин (Ростов-на-Дону)
vvs@myself.com

О РЕШЕНИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НАД ПОЛЯМИ ГАЛУА

Обзор известных алгоритмов решения полиномиальных уравнений можно найти в [1].

Рассмотрим поле $\mathbb{F}_{2^m}$ и линейный базис $[\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{m-1}]$, $\gamma_i \in \mathbb{F}_{2^m}$. Элемент ρ поля имеет представление $\rho = \sum\limits_{i=0}^{m-1} \rho_i\gamma_i$, $\rho_i \in \mathbb{F}_2$. Рассмотрим многочлен $\beta(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} \beta_i z^i, \beta_i \in \mathbb{F}_{2^m}$, тогда $\beta(z) = \sum\limits_{j=0}^{m-1} \gamma_j \widetilde{\beta}_j(z)$, где $\beta_i = \sum\limits_{j=0}^{m-1} \gamma_j \beta_{ij}$, $\beta_{ij} \in \mathbb{F}_2$, $\widetilde{\beta}_j(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} \beta_{ij} z^i$.

Предложим алгоритм решения уравнения $\beta(z) = 0$, основанный на вычислении значений многочленов $\widetilde{\beta}_j(z)$ в элементе циклотомического класса по схеме Лупанова-Сэвиджа ([2], с. 271) и вычислении оставшихся значений в циклотомическом классе на основании свойства многочленов над простым полем: $\widetilde{\beta}_j(z^2) = [\widetilde{\beta}_j(z)]^2,\ z \in \mathbb{F}_{2^m}$.

Теорема 1. *Для нахождения всех корней многочлена $\beta(z)$ степени n алгоритм требует не более следующего количества операций над элементами поля $\mathbb{F}_{2^m}$: $2(\frac{n}{k^2} + m + 1)\ 2^m$ умножений, $2(m-1)\ 2^m$ возведений в квадрат, $2(\frac{n}{k} + m + 1)\ 2^m + n$ сложений, где $k = \lfloor \log_2 n - 3\log_2 \log_2 n \rfloor$.*

Для применения схемы Горнера высшего порядка ([3], с. 530) к решению уравнения $\beta(z) = 0$ в полях Галуа характеристики $p > 2$ доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Множество $\Omega(p,m) = \bigcup\limits_{r=0}^{m-1} \{\underbrace{(i_0, i_1, ..., i_r, 0, ..., 0)}_{m}\}$, где $0 \le i_j \le p-1,\ j = 0, ..., r-1,\ 1 \le i_r \le \frac{p-1}{2}$, образует множество всех попарно непротивоположных элементов конечного поля $\mathbb{F}_{p^m}$.*

Произведено сравнение полученных алгоритмов с известными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоренко С. В.* Методы быстрого декодирования линейных блоковых кодов. Спб.: ГУАП, 2008. 199 с.

2. *Гашков С. Б., Чубариков В. Н.* Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. М.: Дрофа, 2005. 321 с.

3. *Кнут Д. Э.* Искусство программирования. Т. 2, М.: Вильямс, 2001. 788 с.

А. М. Столяр (Ростов-на-Дону)
ajoiner@mail.ru

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Рассматривается применение метода асимптотического интегрирования в сочетании с методом пограничного слоя Люстерника-Вишика к решению ряда сингулярно возмущённых краевых и начально-краевых линейных и нелинейных задач о поведении различных удлинённых пластинок и цилиндрических панелей в условиях статического и динамического воздействия. Малым параметром δ, который присутствует как в уравнениях, так и в граничных условиях, является отношение длин смежных сторон упругого элемента. Решение строится в виде суммы рядов по параметру δ. Коэффициенты первого ряда определяются в ходе первого итерационного процесса прямой подстановкой этого ряда в уравнения, краевые (и начальные) условия. Главные члены разложения удовлетворяют известным линейным и нелинейным начально-краевым задачам меньшей размерности. Последующие члены разложения удовлетворяют уравнениям математической физики того же типа. Однако для постановки задач недостаёт граничных условий. Невязки, которые появляются в ходе первого итерационного процесса при попытке удовлетворить граничные условия, компенсируются в ходе второго итерационного процесса функциями пограничного слоя. Последние являются решением соответствующих линейных задач для бигармонического оператора (и его обобщений) в прямоугольнике (в полуполосе). Функции пограничного слоя строятся в виде рядов по функциям П. Ф. Папковича $F_k(y)$. В этой связи рассматривается задача о возможности представления двух действительных функций в виде упомянутых рядов $f_1(y) = \sum a_k F_k(y)$, $f_2(y) = \sum a_k s_k^2 F_k(y)$, где s_k — корни соответствующего характеристического уравнения. Получены условия сходимости этих рядов, которые используются конструктивно — для вычисления граничных условий функций первого итерационного процесса.

Рассмотрены различные типы граничных условий, при которых проведение предельного перехода к задачам меньшей размерности оказывается возможным.

А. С. Тимашов (Воронеж)
loaderrus@gmail.com

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Рассмотрим задачу о приближении достаточно произвольной функции в виде ряда по системе целочисленных сдвигов функции Гаусса (квадратичной экспоненты с параметрами). Для численного анализа и приложений основную роль играют приближения данного типа конечными суммами, которые возникают при усечении соответствующих рядов. Исследованию таких конечных приближений в основном и посвящена данная работа. Историю вопроса см. в [1–3].

Перечислим основные результаты доклада [4].

1. Доказано, что при всех допустимых значениях параметров исследуемые конечномерные системы линейных уравнений имеют единственное решение.

2. Проведено компьютерное исследование решений исследуемых конечномерных систем линейных уравнений численными методами при помощи математического пакета MATHEMATICA при широком наборе управляющих параметров.

3. Численно показано, что при увеличении размерности приближающих систем их решения стремятся к предельным значениям, которые следует принять за решение исходной бесконечной системы уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Maz'ya V, Schmidt G.* Approximate approximations. University of Linköping, Sweden, 2007.

2. *Zhuravlev M. V. , Kiselev E. A., Minin L. A., Sitnik S. M.* Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions// Journal of Mathematical Sciences. Springer. 2011. V. 173. № 2. P. 231–241.

3. *Минин Л. А., Ситник С. М., Журавлев М. В.* О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций// Научные ведомости Белгородского государственного университета. 2009, № 13 (68). Вып. 17/2. С. 89–99.

4. *Тимашов А. С.* О решении систем уравнений, определяющих коэффициенты разложения по целочисленным сдвигам функций Гаусса// «Математическое моделирование и краевые задачи». 2011. Самара, С. 234–236.

Т. Е. Тышляр (Ставрополь)
t_e_t@inbox.ru

ПОСТРОЕНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ КЛАССИФИКАЦИИ ТОЧЕК ЛИНЕЙНЫХ КОМПЛЕКСОВ ПЛОСКОСТЕЙ КАТЕГОРИИ A

Целью работы является построение, обучение и тестирование искусственной нейронной сети (ИНС), предназначенной для определения принадлежности произвольной точки семимерного проективного комплексного пространства многообразию особых точек первого или второго рода для линейных комплексов плоскостей категории A. Выделяют шесть типов A_1-A_6 линейных комплексов плоскостей категории A[1], для каждого из которых разработана отдельная ИНС.

В качестве базовой сети была выбрана ИНС прямого распространения с двумя внутренними слоями, содержащими 15 и 8 узлов (скрытых нейронов), соответственно. Входной слой сети состоит из 8 нейронов, соответствующих координатам точек. Вы-ходной слой сети состоит из двух нейронов, соответствующих индексам: 00 (точка общего положения), 01 (особая точка первого рода) и 10 (особая точка второго рода). В качестве функции активации использовалась сигмоидальная функция в форме гиперболического тангенса, а обучение проводилось методом обратного распространения ошибки. Обучение сети происходит с учителем и выполняется с помощью алгоритма обратного распространения ошибки. Для получения обучающего и тестирующего множеств была создана программа в среде Lazarus, которая позволяет генерировать заданное количество точек пространства P_7 из указанного диапазона и типа координат этих точек (целые, вещественные, комплексные) выбранного вида [2].

При работе обученной таким образом сети достигалась точность результатов 98% и более в зависимости от количества случайным образом сгенерированных обучающих примеров, их диапазона и типа комплекса плоскостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Макоха А. Н.* Особые точки тривекторов восьмого ранга в P7 // Сб.: Геометрия погруженных многообразий. - М.: МОПИ им. Н.К.Крупской, 1972. – С. 69–97.

2. *Макоха А. Н., Тышляр Т. Е.* Генерация примеров для обучения нейронных сетей, классифицирующих многообразия особых точек линейных комплексов плоскостей // Материалы 56 научно-методической конференции преподавателей и студентов СГУ. Ч.II. – Ставрополь: ООО "Издательско - информационный центр "Фабула", 2011. – С. 26–29

В. В. Шамраева, И. В. Цветкова (Ростов-на-Дону)
shamraeva@mail.ru, pilipenkoiv@mail.ru

О МНОЖЕСТВАХ МАРТИНГАЛЬНЫХ МЕР, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ОСЛАБЛЕННОМУ УСЛОВИЮ НЕСОВПАДЕНИЯ БАРИЦЕНТРОВ (ОУНБ)

Рассмотрим фильтрованное пространство $(\Omega,\mathbf{F})$, где $\mathbf{F}=(\mathcal{F}_0,\mathcal{F}_1)$ — одношаговая фильтрация, причём $\mathcal{F}_0=\{\Omega,\oslash\}$, а $\mathcal{F}_1$ порождена разбиением Ω на счетное число атомов A_i, $i\in\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$. Если на $(\Omega,\mathcal{F}_1)$ рассматривается вероятность P, то мы обозначаем $p_i=P(A_i)$, $i\in\mathbb{N}$. Рассмотрим $\mathbf{F}$-адаптированный случайный процесс $Z=(Z_n,\mathcal{F}_n)_{n=0}^1$. Введем обозначения: $Z_0=a$, $Z_1|_{A_i}=b_i$. Через $\mathcal{P}$ обозначим множество всех невырожденных вероятностных мер на $(\Omega,\mathcal{F}_1)$, а через $\widetilde{\mathcal{P}}$ $(\subset\mathcal{P})$ — множество всех мартингальных мер процесса Z.

В теории хааровских интерполяций важное значение имеют мартингальные меры $P\in\widetilde{\mathcal{P}}$, удовлетворяющие ОУНБ. Говорят, что мера $P\in\widetilde{\mathcal{P}}$ удовлетворяет ОУНБ, если $\forall i\in\mathbb{N}$ и для любого набора индексов $J\subset\mathbb{N}\backslash\{i\}$ с конечным дополнением $\overline{J}=\mathbb{N}\backslash J$ выполняется неравенство $b_i\neq\frac{\sum\limits_{j\in J}b_jp_j}{\sum\limits_{j\in J}p_j}$.

В дальнейшем мы предполагаем, что $\widetilde{\mathcal{P}} \neq \oslash$ и $a \neq b_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$ (последнее условие является необходимым условием того, что ОУНБ$\neq \oslash$).

Предложение 1. *Пусть множество $\{b_i\}$ состоит из конечного числа различных чисел, имеющих конечную кратность, и одного числа, имеющего бесконечную кратность. Тогда ОУНБ$= \oslash$.*

Предложение 2. *Пусть множество $\{b_i\}$ состоит из одного числа, имеющего кратность 1, и двух чисел, имеющих бесконечную кратность, причём $b_1 < a < b_2 < b_3$, а бесконечную кратность имеют числа b_2 и b_3. Тогда ОУНБ$= \widetilde{\mathcal{P}}$.*

Предложение 3. *Пусть множество $\{b_i\}$ состоит из одного числа, имеющего кратность 1, и двух чисел, имеющих бесконечную кратность, причём $b_1 < b_2 < a < b_3$, а бесконечную кратность имеют числа b_2 и b_3. Тогда ОУНБ$\neq \oslash$ и ОУНБ$\subset \widetilde{P}$* строго.

Содержание

Секция III Дифференциальные уравнения и математическая физика 47