Южный федеральный университет
Факультет математики, механики и компьютерных наук
РФФИ, проект № 14-07-06003 - г_2_2014
Учебный центр «Знание»

Международная конференция Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — IV

Тезисы докладов

27 апреля – 1 мая 2014 года
г. Ростов-на-Дону

www.karapetyants.sfedu.ru/conf/
E-mail: otha.conference@gmail.com

УДК 330.4+504+37 1Л4
Международная научная конференция « Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — IV» в г. Ростове-на-Дону. Тезисы докладов. Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, Ростов н/Д, 2014. — 146 с. ISBN 978-5-87872-758-7

Программный комитет: А. Н. Карапетянц, д.ф.-м.н., доцент — председатель; С. Г. Самко, д.ф.-м.н., профессор — сопредседатель (Россия, Португалия); О. Г. Авсянкин, д.ф.-м.н., доцент; А. Б. Антоневич, д.ф.-м.н., профессор (Белоруссия); В. А. Бабешко, д.ф.-м.н., академик РАН; В. И. Буренков, д.ф.-м.н., профессор (Великобритания, Казахстан); М. Л. Гольдман, д.ф.-м.н., профессор; Б. И. Голубов, д.ф.-м.н., профессор; Я. М. Ерусалимский, к.ф.-м.н., профессор; М. И. Карякин, к.ф.-м.н., доцент. В. И. Колесников, д.ф.-м.н., академик РАН; А. Г. Кусраев, д.ф.-м.н., профессор; И. Р. Лифлянд, к.ф.-м.н., профессор (Израиль); А. Б. Нерсесян, д.ф.-м.н., академик НАН Армении (Армения); В. С. Пилиди, д.ф.-м.н., профессор; В. С. Рабинович, д.ф.-м.н., профессор (Мексика); А. П. Солдатов, д.ф.-м.н., профессор; Р. М. Тригуб, д.ф.-м.н., профессор (Украина); А. А. Шкаликов, д.ф.-м.н., профессор; Б. Я. Штейнберг, д.ф.-м.н., ст. научн. сотр.;

Оргкомитет: А. Н. Карапетянц, д.ф.-м.н., доцент — председатель; О. Г. Авсянкин, д.ф.-м.н., доцент — сопредседатель; Б. Г. Вакулов, к.ф.-м.н., доцент; В. Б. Дыбин, к.ф.-м.н., доцент; Я. М. Ерусалимский, к.ф.-м.н., профессор; В. В. Шамраева, к.ф.-м.н., доцент.

Секретарь оргкомитета: Л. В. Новикова, к.ф.-м.н., доцент.

Помошники председателя программного и организационного комитета: Е. В. Бурцева, М. А. Карапетянц.

Тематика конференции связана с различными интеркоррелирующими областями математики, в первую очередь гармонического анализа, функционального анализа, теории операторов, теории функций, дифференциальных уравнений и дробного анализа, интенсивно развивающимися в последнее десятилетие. Актуальность этой тематики связана с исследованием сложных многопараметрических объектов, требующих, в частности, привлечения операторов с переменными параметрами и функциональных пространств с дробными и даже переменными размерностями.

Конференция проходит при поддержке РФФИ, проект № 14-07-06003 - г_2_2014 и факультета математики, механики и компьютерных наук ЮФУ.

Секция I
Функциональный анализ и теория операторов

А. В. Абанин (Ростов-на-Дону)
abanin@math.rsu.ru

СВОЙСТВА ИНДУКТИВНЫХ ПРЕДЕЛОВ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОЕКТИВНЫХ ОБОЛОЧЕК

Алгебраические и топологические свойства (LB)-пространств непрерывных функций и их проективных оболочек были практически полностью исследованы в 1980-х годах [1]. Дальнейшие исследования сконцентрировались на пространствах голоморфных функций. Но, несмотря на тридцатилетние усилия, было установлено не так много завершенных результатов, а многие важные проблемы остаются открытыми до сих пор (см. обзор [2]). Ряд новых результатов в данном направлении был недавно установлен в работах [3, 4] при жестких ограничениях на исследуемые пространства, часть из которых удается проверить только для областей типа шара и радиальных весов, а часть, вообще, составляет самостоятельные открытые проблемы.

В докладе будут представлены более сильные, чем прежде, результаты, полученные автором совместно с Фам Чонг Тиеном (Pham Trong Tien, Vietnam National University), в которых упомянутые ограничения либо снимаются вовсе, либо значительно ослабляются. При этом, применяемая нами техника позволяет вместо пространств голоморфных функций исследовать более общие пространства функций на локально компактных σ-компактных множествах.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Bierstedt K. D., Meise R., Summers W. H.* A projective description of weighted inductive limits // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 272. P. 107–160.

2. *Bierstedt K. D.* A survey on some results and open problems in weighted inductive limits and projective description for spaces of holomorphic functions // Bull. Soc. Roy. Sci. Liége. 2001. Vol. 70. P. 167–182.

3. *Bierstedt K. D., Bonet J.* Weighted (LB)-spaces of holomorphic functions: $\mathcal{V}H(G) = \mathcal{V}_0H(G)$ and completeness of $\mathcal{V}_0H(G)$ // J. Math. Anal. Appl. 2006. Vol. 323. P. 747–767.

4. *Bierstedt K. D., Bonet J., Taskinen J.* Weighted inductive limits of spaces of entire functions // Monatsh. Math. 2008. Vol. 154. P. 103–120.

О. Г. Авсянкин, Л. В. Ульянова (Ростов-на-Дону)
avsyanki@math.rsu.ru

О МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ В L_p-ПРОСТРАНСТВАХ

В пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

в предположении, что функция $k(x,y)$ является τ-периодической, т. е. существует такой вектор $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n$ с положительными координатами, что

$$k(x+\tau_j e_j, y+\tau_j e_j) = k(x,y), \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, j = 1,2,\ldots,n,$$

где $\{e_1,\ldots,e_n\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\Pi_\tau = \{x \in \mathbb{R}^n \colon 0 \leqslant x_j \leqslant \tau_j,\ j = 1,2,\ldots,n\}$. Показано, что если τ-периодическая функция $k(x,y)$ удовлетворяет условиям

$$\kappa_1 := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Pi_\tau} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)|\,dy < \infty,$$

$$\kappa_2 := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Pi_\tau} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)|\,dx < \infty,$$

то оператор K ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Также рассмотрен вопрос о компактности операторов вида (1) с коэффициентами из класса $B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, который представляет собой совокупность функций $a(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N} |a(x)| = 0.$$

Указаны достаточные условия на ядро $k(x,y)$ при выполнении которых оператор $a(x)K$, где $a(x) \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, компактен в $L_p(\mathbb{R}^n)$.

А. Б. Антоневич (Минск / Белосток),
Е. В. Пантлеева (Минск, Беларусь)
antonevich@bsu.by

ОПЕРАТОРЫ ВЗВЕШЕННОГО СДВИГА В ПРОСТРАНСТВАХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Пусть X — компактное метрическое пространство и $\alpha : X \to X$ — непрерывное обратимое отображение. В пространстве вектор-функций $L_2(X, \mathbb{C}^m, \mu)$ рассматриваются операторы взвешенного сдвига, записанные в виде $B = AT_\alpha$, где $A = A(x)$ непрерывная матрица-функция, а оператор T_α действует по формуле $T_\alpha u(x) = \varrho(x)u(\alpha(x))$, где ϱ есть такая скалярная функция ϱ, что оператор T_α является унитарным.

Правосторонней резольвентой для ограниченного линейного оператора B называется семейство $R(\lambda; B)$ правых обратных к $B - \lambda I$, аналитически зависящее от λ. В работе получены условия правосторонней обратимости рассматриваемого оператора $B - I$ и построена правосторонняя резольвента. Сформулируем основной результат.

Ограниченная измеримая матрично-значная функция p задает ограниченный оператор в пространстве $L_2(X, \mathbb{C}^m, \mu)$; если все значения $p(x)$ есть проекторы в $\mathbb{C}^m$, то соответствующий оператор P является проектором.

Теорема 1. *Оператор $B - I$ обратим справа тогда и только тогда, когда существует ограниченная измеримая проекторно-значная функция $p(x)$, такая, что операторный ряд Лорана*

$$R(\lambda; B) = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\lambda^k}B^kP + \frac{1}{\lambda}\sum_{k=-1}^{-\infty}\frac{1}{\lambda^k}B^k(I-P).$$

сходится в окрестности единичной окружности.

Сумма этого ряда есть одна из правосторонних резольвент.

Если матрица функция $p(x)$ непрерывна, то она задает векторное подрасслоение в расслоении-произведении $X \times \mathbb{C}^m$. Основное отличие от известного ранее аналогичного выражения для обычной резольвенты заключается в том, что здесь матрица-функция $p(x)$ разрывна и матрицы $p(x)$ имеют разный ранг в разных точках. Поэтому с такой матрицей-функцией связано не векторное подрасслоение, а т.н. *устойчивое векториальное подмножество* в $X \times \mathbb{C}^m$.

А. А. Атвиновский, А. Р. Миротин (Гомель, Беларусь)
aatvinovskiy@gmail.com, amirotin@yandex.ru

О $\mathcal{Q}_b$-ИСЧИСЛЕНИИ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ [1]

Определение 1 [1]. *Скажем, что замкнутый плотно определенный оператор A в банаховом пространстве X принадлежит классу $V_b(X)$, если $[0, b) \subset \rho(A)$, и для некоторой постоянной $M > 0$ выполняется неравенство $\|R(t, A)\| \leq M/(b-t), t \in [0, b)$.*

В [1] определено функциональное исчисление (Q_b-исчисление) операторов из $V_b(X)$ с символами некоторого класса Q_b. В докладе рассматривается расширение этого исчисления, для которого справедливо правило умножения.

Определение 2 *Обозначим через $\mathcal{Q}_b$ мультипликативную полугруппу, порожденную классом Q_b, т. е. состоящую из всевозможных функций вида $\Phi = \varphi_1 \dots \varphi_n$, где $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in Q_b$.*

Определение 3 *Для функции $\Phi = \varphi_1 \dots \varphi_n \in \mathcal{Q}_b$ и оператора $A \in V_b(X)$ положим*

$$\Phi(A) := \varphi_1(A) \dots \varphi_n(A).$$

Теорема 1. Пусть $\Phi = \varphi_1 \dots \varphi_n \in \mathcal{Q}_b$ и $A \in V_b(X)$. Тогда

1) оператор $\Phi(A)$ ограниченно обратим, и его обратный можно найти по формуле

$$\Phi(A)^{-1} = g_1(A) \dots g_n(A),$$

где $g_i = 1/\varphi_i$;

2) имеет место равенство ($\Psi \in \mathcal{Q}_b$)

$$(\Phi\Psi)(A) = \Phi(A)\Psi(A);$$

3) справедлива теорема об отображении спектров

$$\sigma(\Phi(A)) = \Phi(\sigma(A)).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Атвиновский А. А., Миротин А. Р.* Обращение одного класса операторов в банаховом пространстве и некоторые его применения// Проблемы физики, математики и техники. – 2013. — № 3 (16). — С. 55 – 60.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке первого из авторов (грант 14-53).

И. В. Барышева, А. С. Калитвин(Липецк)
barysheva_iv@mail.ru, kalitvinas@mail.ru

О МУЛЬТИСПЕКТРЕ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ [1]

Пусть $C(G)$ и $C(L^1(\Omega))$ — пространство непрерывных на $G = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ функций и пространство непрерывных на G вектор-функций со значениями в $L^1(\Omega)$, соответственно, где $\Omega \in \{[a,b],[a,b]\times[c,d],G\}$, $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, $(t,s,r) \in G$, интегралы понимаются в смысле Лебега и

$$A(\lambda)x(t,s,r) = c(t,s,r)x(t,s,r) - \lambda_1 \int_a^b l(t,s,r,\tau)x(\tau,s,r)d\tau -$$
$$-\lambda_2 \int_a^b \int_c^d m(t,s,r,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma,r)d\tau d\sigma -$$
$$-\lambda_3 \int_a^b \int_c^d \int_e^f n(t,s,r,\tau,\sigma,\xi)x(\tau,\sigma,\xi)d\tau d\sigma d\xi. \tag{1}$$

Теорема. *Пусть функция $c \in C(G)$, функции l,m,n принадлежат пространствам $C(L^1([a,b])), C(L^1([a,b]\times[c,d])), C(L^1(G))$ соответственно. Тогда существенные мультиспектры оператора (1) в смысле Густавссона-Вайдмана, Като, Вольфа и Шехтера совпадают и справедливы следующие утверждения:*

1. Если $c(t,s,r) \neq 0$ на G, то n-нормальность, d-нормальность, фредгольмовость и нетеровость оператора (1) в $C(G)$ равносильны обратимости в $C([a,b])$ и в $C([a,b]\times[c,d])$ соответственно операторов следующих двух семейств операторов:

$$A_{\lambda_1}(s,r)x(t) = x(t) - \lambda_1 \int_a^b \frac{l(t,s,r,\tau)}{c(t,s,r)} x(\tau)d\tau \ \ ((s,r) \in [c,d]\times[e,f]),$$

$$A_{\lambda_2}(r)y(t,s) = y(t,s) - \lambda_2 \int_a^b \int_c^d \frac{m(t,s,r,\tau,\sigma)}{c(t,s,r)} y(\tau,\sigma)d\sigma d\tau \ \ (r \in [e,f]).$$

2. Если $c(t_0,s_0,r_0) = 0$, где $(t_0,s_0,r_0) \in G$, то оператор (1) не является ни фредгольмовым, ни нетеровым, ни n и ни d-нормальным в $C(G)$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (проект 1.4407.2011).

Батальщиков А. А., Грудский С. М., Стукопин В. А.
(Ростов-на-Дону, Мехико)
stukopin@mail.ru

Асимптотика собственных векторов больших симметрических ленточных тёплицевых матриц

Важной для приложений является задача нахождения асимптотики собственных векторов тёплицевых матриц. В работе [1] такая задача решена для самосопряжённых ленточных тёплицевых матриц. Мы исследуем асимптотическое поведение всех собственных векторов ленточных тёплицевых, вообще говоря неэрмитовых, матриц, когда их размерность стремится к бесконечности. Главный результат работы описывает структуру собственных векторов в терминах полинома Лорана $a(z)$, определяющего тёплицеву матрицу, с точностью до экспоненциально убывающего остаточного члена.

Мы будем предполагать, что $a(z) = \sum_{k=-r}^{r} a_k z^k$, $a_k = a_{-k}$, а образ единичной окружности под действием символа $a(z)$ – простая разомкнутая кривая; производная $a'(z)$ обращается в ноль только в точках ± 1, $a''(\pm 1) \neq 0$, а уравнение $a(z) - \lambda = 0$ не имеет кратных корней при любом значении λ.

Теорема 1. Пусть $n \geq n_0$, где n_0 достаточно большое натуральное число, δ – достаточно малое положительное числа, $\lambda_{j,n} \in \mathcal{R}_\delta(a)(j \in \{1, 2, \ldots, n\})$ – собственное значение, $\lambda := \lambda_{j,n}$; $w_{j,m}$ – m-я компонента j-го собственного вектора. Тогда имеет место следующее, равномерное по λ, асимптотическое равенство

$$w_{j,m}(\lambda) = a_{j,m}(\lambda) + b_{j,m}(\lambda) + c_{j,m}(\lambda) + O(e^{-\delta_1 n}), \quad m = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$a_{j,m}(\lambda) = \frac{(-1)^j e^{-\mathrm{i}m\varphi(\lambda)}}{h_\lambda(e^{\mathrm{i}\varphi(\lambda)})} - \frac{(-1)^j e^{\mathrm{i}m\varphi(\lambda)}}{h_\lambda(e^{-\mathrm{i}\varphi(\lambda)})},$$

$$b_{j,m}(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{r-1} \left[\frac{2\mathrm{i}\sin(\varphi(\lambda))}{u_\nu^m(\lambda)} \cdot \frac{(-1)^j}{(u_\nu(\lambda) - e^{\mathrm{i}\varphi(\lambda)})(u_\nu(\lambda) - e^{-\mathrm{i}\varphi(\lambda)})h'_\lambda(u_\nu(\lambda))} \right],$$

$$c_{j,m}(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{r-1} \left[\frac{2\mathrm{i}\sin(\varphi(\lambda))}{u_\nu^{n-m+1}(\lambda)} \cdot \frac{-1}{(u_\nu(\lambda) - e^{\mathrm{i}\varphi(\lambda)})(u_\nu(\lambda) - e^{-\mathrm{i}\varphi(\lambda)})h'_\lambda(u_\nu(\lambda))} \right].$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Böttcher A., Grudsky S., Maksimenko E.* Of the structure of the eigenvectors of large Hermitian Töplitz band matrices. //*Operator Theory:Advances and Applications* – **210**(2010). 15 – 36.

Отметим, что описание собственных значений таких матриц получено в работе [2].

Э. Г. Бахтигареева (Москва)
salykai@yandex.ru

ОПТИМАЛЬНОЕ ОБФП ДЛЯ КОНУСА УБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрена проблема построения оптимального (т.е. минимального) обобщенного банахова функционального пространства (кратко: ОБФП) (см. определения в [1; 2]), содержащего заданный конус

$$K_0 = \{h \in L_p(0,T;u), 0 \le h \downarrow\}, \tag{1}$$

снабженный функционалом

$$\rho_{K_0}(h) = \|h\|_{L_p(u)} = \left(\int_0^T h^p u dt\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2}$$

$0 < T \le \infty, 0 < p < \infty$, u -положительная, измеримая функция.

Определение 1. Вложение конуса в ОБФП: $K \mapsto X$ означает, что $K \subset X$ и $\exists \quad c_K \in \mathbb{R}_+$, такая что $\|h\|_X \leqslant c_K \rho_K(h), \quad h \in K$.

Определение 2. ОБФП X_0 назовем оптимальным (минимальным) для вложения $K \mapsto X$, если $K \mapsto X_0$ и, если для некоторого ОБФП X справедливо вложение $K \mapsto X$, то $X_0 \subset X$.

Теорема. *Пусть дан конус K_0 (1), снабженный функционалом ρ_{K_0} (2). Обозначим $U(t) = \int_0^t u d\tau, \quad 0 < U(t) < \infty, \quad t \in (0,T)$. Тогда оптимальное ОБФП X_0, содержащее конус K_0 (1), имеет норму*

$$\|f\|_{X_0(0,T)} = \left(\int_0^T \|f\|^p_{L_\infty(t,T)} u(t) dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty.$$

$$\|f\|_{X_0(0,T)} = p^{-1} \int_0^T \|f\|_{L_\infty(t,T)} U(t)^{\frac{1}{p}-1} u(t) dt, \quad 0 < p < 1.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *C. Bennett and R. Sharpley.* Interpolation of Operators // Academic, New York, 1988. 469 c.

2. *Э. Г. Бахтигареева, М. Л. Гольдман, П. П. Забрейко* Оптимальное восстановление обобщенного банахова функционального пространства по конусу неотрицательных функций // Вестник Тамбовского университета. Серия «Естественные и технические науки», т.19, вып. 1, 2014 г.

Э. Г. Бахтигареева, М. Л. Гольдман (Москва)
salykai@yandex.ru, seulydia@yandex.ru

АССОЦИИРОВАННАЯ НОРМА ДЛЯ ОБФП[1]

Пусть $1 \le p \le \infty, 1 \le q \le \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1, \quad T \in (0, +\infty]$. Для данного обобщенного банахова функционального пространства (кратко: ОБФП) с нормой:

$$\rho_{pq}(f) = \left\{ \int_0^T \|f\|^p_{L_q(\tau,T)} \psi^p(\tau) d\tau \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty$$

$$\rho_{\infty q}(f) = \left\| \|f\|_{L_q(\cdot,T)} \psi(\cdot) \right\|_{L_\infty(0,T)}, \quad p = \infty,$$

где $\psi > 0$-непрерывная функция на $(0, T)$, найдено явное выражение для ассоциированной нормы (см. определения в [1; 2]). Пусть

$$\dot{\rho}'_{pq}(g) = \left\{ \int_0^T \left[\|g\|_{L_{q'}(0,t)} \Psi_p(t)^{-1} \right]^{p'} \Psi_p(t)^{-1} d\Psi_p(t) \right\}^{\frac{1}{p'}}, \quad 1 < p \le \infty;$$

$\Psi_p(t) = (\int\limits_0^t \psi^p d\tau)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 < p < \infty; \quad \Psi_\infty(t) = \sup\limits_{\tau \in (0,t]} \psi(\tau), \quad p = \infty;$

Теорема 1. *В приведенных обозначениях пусть* $\Psi_p(T) < \infty$. *Тогда* ρ_{pq} *есть обобщенная функциональная норма (ОФН) при* $1 \le p \le \infty$, *а для ассоциированной ОФН* $\rho'_{pq}(g)$ *справедливы соотношения:*
если $p = \infty$ *и* $\Psi_\infty(+0) = 0$ *или* $1 < p < \infty$, *то*

$$\rho'_{pq}(g) \cong \dot{\rho_{pq}}'(g) + \Psi_p(T)^{-1} \|g\|_{L_{q'}(T_1,T)}, \quad \Psi_p(T_1) = \frac{1}{2}\Psi_p(T) \qquad (1)$$

Постоянные в двусторонней оценке (1) *положительные, конечные, зависят только от* p *и* q.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *C. Bennett and R. Sharpley.* Interpolation of Operators // Academic, New York, 1988. 469 с.

2. *Э. Г. Бахтигареева, М. Л. Гольдман, П. П. Забрейко* Оптимальное восстановление обобщенного банахова функционального пространства по конусу неотрицательных функций // Вестник Тамбовского университета. Серия "Естественные и технические науки", т.19, вып.1, 2014 г.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00684, № 12-01-00554).

V. I. Burenkov (Great Britain; Kazakhstan)

A NEW APPROACH TO PROVING INTERPOLATION THEOREMS FOR VARIOUS FUNCTION SPACES

For the real interpolation method a general interpolation theorem will be presented for a wide class of function spaces defined with the help of operators acting from some function spaces to the cone of non-negative non-decreasing functions on $(0,\infty)$. In this theorem assumptions on generating operators are stated under which the scale of such spaces is closed under the procedure of interpolation.

The classical interpolation theorems due to Stein, Weiss, Peetre, Calderón, Gilbert, Lizorkin, Freitag and some of their new variants can be derived from this theorem by appropriately choosing generating operators.

As a corollary it is also proved that for general local Morrey-type spaces (in contrast to global Morrey-type spaces), in the case in which they have the same integrability parameter, the interpolation spaces are again general local Morrey-type spaces.

Список литературы

[1] V.İ. Burenkov, E. D. Nursultanov, *Description of interpolation spaces for local Morrey-type spaces.* Trudy Math. Inst. Steklov **269** (2010), 52-62 (in Russian). English transl. in Proceedings Steklov Inst. Math. **269** (2010), 46–56.

[2] V. I. Burenkov, D. K. Darbayeva, E. D. Nursultanov, *Description of interpolation spaces for general local Morrey-type spaces.* Eurasian Mathematical Journal **4** (2013), no. 1, 46–53.

[3] Burenkov V. I., Nursultanov E. D., Chigambaeva D. K. *Description of interpolation spaces for a pair of local Morrey-type spaces and their generalizations.* Trudy Math. Inst. Steklov **284** (2014), 105-137 (in Russian). English transl. in Proceedings Steklov Inst. Math. **284** (2014), 97–128.

Е. В. Бурцева (Ростов-на-Дону)
evg-burceva@yandex.ru

ЗАДАЧА РИМАНА НА ПЛОСКОСТИ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ «ДЫР»

Составной контур Γ является объединением n простых замкнутых гладких непересекающихся кривых, ориентированных таким образом, что сингулярный интегральный оператор Коши S_Γ является инволюцией.

На контуре Γ в пространстве $L_p(\Gamma)$ изучается оператор краевой задачи Римана

$$R(a) = P_\Gamma^+ + aP_\Gamma^-, \text{ где } P_\Gamma^\pm = \frac{1}{2}(I \pm S_\Gamma),$$

с символом

$$a(z) = (a_1(z_1), a_2(z_2), ..., a_n(z_n)),$$

где $a_i(z_i)$ принадлежит распадающейся подалгебре алгебры непрерывных функций на контуре Γ_i, $i \in \overline{1,n}$. Факторизация символа $a(z)$ проводится на основе факторизации функции на простом замкнутом контуре [4].

На основе матричного операторного исчисления порядка n построена конструктивная теория односторонней обратимости оператора $R(a)$, включающая его факторизацию,описание конструкций обратных операторов и его дефектных подпространств, вычисление их размерностей и индекса оператора.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Дыбин В. Б., Бурцева Е. В.* Оператор краевой задачи Римана на кольце и его приложение к одному классу систем уравнений в дискретных свёртках. // Труды научной школы И.Б. Симоненко. Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ. 2010. С. 79–92.

2. *Дыбин В. Б., Бурцева Е. В.* Оператор краевой задачи Римана на системе концентрических окружностей и его приложения к одному классу систем уравнений в дискретных свёртках // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2012. № 2. С. 109–117.

3. *Дыбин В.Б., Бурцева Е.В.* Несколько замечаний о сингулярных интегральных операторах на контуре, состоящем из конечного числа окружностей // Международный конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-III», г. Ростов-на-Дону, 2–6 июня 2013 г., тезисы докладов, С. 19.

4. *Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных операторов. Кишинев: Штиинца, 1973, 426 с.

Б. Г.Вакулов (Ростов-на-Дону)
bvak1961@bk.ru

ПОТЕНЦИАЛЫ РИССА ПО $\mathbb{R}^n$ КОМПЛЕКСНОГО ПОРЯДКА В ОБОБЩЁННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА С ВЕСАМИ ИЗ КЛАССОВ ТИПА ЗИГМУНДА–БАРИ–СТЕЧКИНА

Для риссова потенциала по $\mathbb{R}^n$

$$K^\alpha f = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi)d\xi}{|\xi-\eta|^{n-\alpha}},\ \eta \in \mathbb{R}^n,\ 0 < \Re\alpha < n,$$

получены следующие изоморфизмы

I. Оператор K^α изоморфно отображает пространство $H_0^\omega(\mathbb{R}^n, \rho_1)$ на пространство $H_0^{\omega_\alpha}(\mathbb{R}^n, \rho_2)$, где $\rho_1(\xi) = \phi\left(\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)$,
$\rho_2(\xi) = \phi\left(\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)(1+|\xi|^2)^{-\alpha}$, а пространство $H_\infty^\omega(\mathbb{R}^n, \rho_3)$ на пространство $H_\infty^{\omega_\alpha}(\mathbb{R}^n, \rho_4)$, где $\rho_3(\xi) = \phi\left(\frac{1}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)$,
$\rho_4(\xi) = \phi\left(\frac{1}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)(1+|\xi|^2)^{-\alpha}$, где $\omega_\alpha(t) = t^{\Re\alpha}\omega_(t)$.

II. Оператор K^α изоморфно отображает пространство $H_{0,\infty}^\omega(\mathbb{R}^n, \rho_5)$ на пространство $H_{0,\infty}^{\omega_\alpha}(\mathbb{R}^n, \rho_6)$, где $\rho_5(\xi) = \phi_1\left(\frac{1}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)\phi_2\left(\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)$,
$\rho_6(\xi) = \phi_1\left(\frac{1}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)\phi_2\left(\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)(1+|\xi|^2)^{-\alpha}$.

Здесь весовые функции ϕ, ϕ_1, ϕ_2 и характеристики обобщённых пространств Гёльдера ω удовлетворяют некоторым услвиям типа Зигмунда–Бари–Стечкина, естественным образом обобщающим условия на показатели степенных весов, привязанных к нулю и бесконечности, которые были получены автором ранее в [1].

Доказательство этих изоморфизмов основано на изоморфизмах, построенных для сферических аналогов потенциалов Рисса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вакулов Б. Г.* О действии оператора Риссова потенциала комплексного порядка по $\mathbb{R}^n$ в обобщённых пространствах Гёльдера со степеными весами. Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2001. № 4, 47–49

А. Ф. Воронин (Новосибирск)
voronin@math.nsc.su

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ ПО ПРАВОЙ ЧАСТИ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПОЛУОСИ[1]

В работе будет рассмотрено следующее неоднородное интегральное уравнение Вольтерра первого рода в свертках на полубесконечном интервале,

$$\int\limits_0^t k(t-s)u(s)\,ds = f(t), \quad t \in (0,\infty), \tag{0.1}$$

где

$$k, k' \in L_1(0,b),\ k(t) = 0,\ t > b > 0,\ k(b-0) := c_0 \neq 0,\ k(0) = 0, \tag{0.2}$$

$$f, f' \in L_1\Big(e^{-a_0 t};(0,\infty)\Big),\ f'' \in L_1(0,b),\ f'' \in L_1\Big(e^{-a_0 t};(b,\infty)\Big),$$

$f(0) = f'(0) = 0$,

$$f'(b+0) - f'(b-0) = c_1 \neq 0, \tag{0.3}$$

$L_1\Big(e^{-a_0 t};(d,\infty)\Big)$ — пространство с нормой

$$||g||_{a_0} = \int\limits_d^\infty e^{-a_0 s}|g(s)|\,ds,\ d, a_0 \in R.$$

Решается следующая задача (A): из уравнения (0.1) требуется найти две функции $u \in L_1\Big(e^{-at};(0,\infty)\Big)$, где $a \geq a_0$, и $k \in C(0,b)$, по заданным значениям $f(t),\ t \in (0,\infty)$ при условиях (0.2)–(0.3).

Цель работы — получить необходимые и достаточные (эффективно проверяемые) условия разрешимости и единственности задачи (A), построить явные формулы для ее решения.

Заметим, что данная работа близка к работе [1] как по постановке задачи, так и по методу ее исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воронин А. Ф.* Восстановление решения уравнения Вольтерра 1-го рода на полупрямой по неполным данным // СЭМИ, 2012, Т. 9, С. 464–471. http://semr.math.nsc.ru/v9/p464-471.pdf

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00275).

А. Н. Глаз (Беларусь, Минск)
anna-glaz@yandex.ru

ПРОСТРАНСТВО МАКСИМАЛЬНЫХ ИДЕАЛОВ АЛГЕБРЫ ФУНКЦИЙ С РАЗРЫВАМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА[1]

Пусть A — подалгебра алгебры ограниченных функций на $[0,1]$, содержащая
1) функции, обладающие конечными односторонними пределами в каждой точке;
2) функции $e^{\pm\frac{i}{t-\alpha}}, \alpha \in [0,1]$, с разрывами экспоненциального типа.

Основным результатом является определение пространства максимальных идеалов алгебры A, которое нужно (см., например, [1]) для определения свойств некоторых операторов с коэффициентами из A. Случай алгебры, содержащей только функции вида 1), был рассмотрен в [2].

Теорема 1. *Максимальными идеалами алгебры A являются множества вида*

$$M_{\{\tau-,\lambda\}} := \{x \in A : x(\tau-0,\lambda) = 0\},$$
$$M_{\{\tau+,\lambda\}} := \{x \in A : x(\tau+0,\lambda) = 0\},$$
$$M_{\tau} := \{x \in A : x(\tau) = 0\},$$

где

$$x(\tau \pm 0, \lambda) := \lim_{k\to\pm\infty} x(\frac{1}{2\pi k+\lambda} + \tau),\ \tau \in (0,1], \lambda \in \mathbb{R}.$$

Топология задается множествами

$$D^{-}_{\tau_0;\lambda_1,\lambda_2} = \{M_{\{\tau_0-,\lambda\}} : \lambda \in [\lambda_1,\lambda_2)\},$$

$$D^{+}_{\tau_0;\lambda_1,\lambda_2} = \{M_{\{\tau_0+,\lambda\}} : \lambda \in [\lambda_1,\lambda_2)\},$$
$$D^{*}_{\tau_1,\tau_2} = \left\{M_{\tau}, M_{\{\tau+,\lambda\}}, M_{\{\tau-,\lambda\}} : \lambda \in [0,1), \tau \in [\tau_1,\tau_2)\right\}.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения: операторный подход // Минск: Университетское, 1988.

2. *Глаз А. Н.* Общий вид линейного непрерывного функционала на пространстве кусочно-непрерывных функций // Изв. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2012. №2. С. 29–34

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект Ф13М-036).

С. В. Горин (Ростов-на-Дону)
sg@aaanet.ru

ФРЕДГОЛЬМОВОСТЬ ОПЕРАТОРОВ ТИПА СИНГУЛЯРНЫХ В ПРОСТРАНСТВАХ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

В работе рассматривается пространство всех функций, определенных на единичной окружности Γ в комплексной плоскости, принимающих значения в бесконечномерном гильбертовом пространстве H и являющихся бесконечно дифференцируемыми в смысле сильной топологии пространства H . Исследование является обобщением результатов работ [1–2], где в качестве пространства H рассматривались простраства C и C^n соответственно.

Пусть u — произвольный элемент пространства H с нормой, равной единице. Будем пользоваться следующими обозначениями:

I — тождественный оператор в H, $Q_u x = (x, u)u$, $P_u = I - Q_u$,

$(R_{t_0}\varphi)(t) = \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}, t_0 \in \Gamma$,

$R_{t_0,u} = P_u + Q_u R_{t_0}$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — алгебра операторов, порожденная

- всеми операторами умножения на бесконечно дифференцируемые на Γ оператор-функциями вида $A(t) = I + K(t)$, где для любой точки $t \in \Gamma$ $K(t)$ - компактный в H оператор.

- оператором сингулярного интегрирования,

- всеми операторами $R_{t_0,u}$.

Для операторов из $\mathfrak{B}$ определяется символ и доказывается, что

1) фредгольмовость оператора из $\mathfrak{B}$ эквивалентна обратимости его символа;

2) регуляризаторы фредгольмовых операторов из $\mathfrak{B}$ также принадлежат $\mathfrak{B}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Горин С. В.* Фредгольмовость операторов типа сингулярных в пространствах гладких функций //Деп. В ВИНИТИ №206-В2005, 2005 г.

2. *Горин С. В.* Фредгольмовость операторов типа сингулярных с матричными коэффициентами в пространствах гладких вектор-функций //Деп. в ВИНИТИ №1607-В2005, 2005 г.

В. М. Деундяк (Ростов-на-Дону)
vlade@math.rsu.ru

ДВУМЕРНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ОПЕРАТОРЫ SQC–ТИПА

Ранее в двумерном случае изучались однородные операторы SC–типа [1]: после расслаивания $\mathbb{R}^2$ на семейство концентрических окружностей такие операторы представляются в слоях сингулярными операторами с непрерывными коэффициентами, и для их исследования приходится применять теорию операторов билокального типа.

Сарасоновская алгебра $QC(\mathbb{T})$ квазинепрерывных функций на единичной окружности $\mathbb{T}(\subset \mathbb{R}^2)$ является максимальной из всех замкнутых подалгебр C^*–алгебры $L_\infty(\mathbb{T})$, функции из которых коммутируют с сингулярным оператором Коши $S_\mathbb{T}$ с точностью до компактного слагаемого. Интерес к этой алгебре проявляется в самых разнообразных задачах теории функций и функционального анализа (см. [2], [3]). Цель настоящей работы — описание и исследование нового класса однородных операторов SQC–типа, которые в слоях представляются сингулярными интегральными операторами с квазинепрерывными коэффициентами. Для C^*–алгебры, порожденной введенными операторами и операторами умножения на мультипликативно слабо осциллирующие функции [4], построено символическое исчисление и получен критерий фредгольмовости.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Деундяк В. М., Степанюченко Е. А.* Об интегральных операторах с однородными ядрами послойно сингулярного типа в пространстве $L_p(\mathbb{R}^2)$ // Вестник ДГТУ. 2007. Т. 7, № 2. С. 161–168.

2. *Гарнет Дж.* Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984. 469 с.

3. *Георгиев К. А., Деундяк В. М.* Идеалы Никольского и их применение к исследованию алгебр сингулярных интегральных операторов // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 2. С. 88–108.

2. *Деундяк В. М.* Многомерные интегральные операторы с однородными ядрами компактного типа и мультипликативно слабо осциллирующими коэффициентами // Математические заметки. 2010. Т. 87, № 6. С. 704–720.

Д. Т. Дзадзаева, Плиев М.А. (Владикавказ)
dinadzadzaeva@mail.ru, maratpliev@gmail.com

ПОРЯДКОВО ПО НОРМЕ σ-НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ КОНЕЧНОГО РАНГА [1]

Настоящая работа связана с теорией узких операторов в упорядоченных пространствах. В настоящее время наблюдается интерес к данной темеатике со стороны различных групп российских и зарубежных математиков, что нашло отражение в монографической литературе [3]. В работе [2] был предложен более общий подход к изучению узости операторов, связанный с концепцией решеточно-нормированного пространства. Настоящая заметка продолжает эти исследования. Предварительные сведения об узких и мажорируемых операторах можно найти в монографиях [1, 3].

Введем некоторые определения. Пусть (V, E) — решеточно-нормированное пространство над безатомной векторной решеткой E, X – векторное пространство. Линейный оператор $T : V \to X$ называется *строго узким*, если для любого $v \in V$ существует разбиение на дизъюнктные осколки $v = v_1 \sqcup v_2$ такое, что $Tv_1 = Tv_2$. Пусть теперь X – нормированное пространство. Линейный оператор $T : V \to X$ называется *порядково по норме σ-непрерывным*, если для любой последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset V$, порядково сходящейся к x следует, что последовательность Tx_n сходится к Tx по норме.

Теорема. *Пусть (V, E) — пространство Банаха-Канторовича над порядково полной, безатомной векторной решеткой E, X – конечномерное банахово пространство. Тогда, каждый порядково по норме σ-непрерывный, линейный оператор $T : V \to X$ является строго узким.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003. 624 с.

2. *M. Pliev*, Narrow operators on lattice-normed spaces, Cent. Eur. J. Math. 2011, 9, № 6, pp. 1276–1287.

3. *M. Popov,B. Randrianantoanina*, Narrow Operators on Function Spaces and Vector Lattices, De Gruyter Studies in Mathematics 45, De Gruyter (2013). 309 p.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российкого Научного фонда (проект 14-11-00208).

А. К. Дронов (Ростов-на-Дону)
dronov88ak@mail.ru

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ОПЕРАТОРОВ, ОГРАНИЧЕННЫХ НА КОНУСАХ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ К НЕКОТОРЫМ ВОПРОСАМ ТЕОРИИ БАЗИСОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ

Обобщается классическая задача интерполяции линейных операторов, ограниченных на парах банаховых пространств, на случай линейных операторов, ограниченных на парах конусов. Вводится понятие интерполяционного свойства тройки конусов и равномерного интерполяционного свойства семейства троек конусов по отношению к тройке банаховых пространств. Получен результат о равномерном интерполяционном свойстве семейства конусов в пространствах весовых числовых последовательностей.

Теорема. *Пусть* $E_i = c_0(a_i), F = c_0(b_i) (i = 0, 1), E = c_0(a), F = c_0(b)$, *причем* $E_1 \subset E \subset E_0, F_1 \subset F \subset F_0$ *и банахова тройка* (E_0, E_1, E) *обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке* (F_0, F_1, F). *Пусть* $\mathcal{A}$ — *множество конусов в* ω^+ *такое, что для каждого конуса* $Q \in \mathcal{A}$ *выполняются условия:*

1) Q — *нижняя полурешетка в* ω*;*

2) $Q \cap E_1^+$ — *тотальный конус в пространстве* E_1*;*

3) $Q \cap E_1^{++} \neq \{\emptyset\}$.

Тогда семейство троек конусов

$$\mathcal{M} = \{(E_0^+, Q \cap E_1^+, Q \cap E^+) : Q \in \mathcal{A}\}$$

обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F).

Данный результат позволяет исследовать вопрос о существовании базиса в дополняемых подпространствах пространств Драгилева.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Каплицкий В. М., Дронов А. К.* Применение интерполяционных свойств операторов, ограниченных на конусах, к некоторым вопросам теории базисов в пространствах Фреше// Математический форум. 2014. Т. 7. С. 88–103.

2. *Cerda J., Coll H.* Function cones and interpolation // Math. Nachr. 278(2005), p. 227–239.

R. V. Dyba, A. R. Mirotin (Gomel, Belarus)
rdybabox@yandex.by, amirotin@yandex.ru

ON THE GENERAL FORM OF BOUNDED LINEAR FUNCTIONALS ON THE HARDY SPACE H^1 OVER COMPACT ABELIAN GROUPS [1]

Let G be a nontrivial compact and connected abelian group with Haar measure m, and assume that the dual group X is linearly ordered by means of the positive cone X_+. The space $BMOA(G)$ of functions of bounded mean oscillation of analytic type on G was defined in [1] (see also [2]). For the Hardy spaces $H^p(G)$ we refer to [3]. The following result generalizes the Fefferman Duality Theorem.

Theorem 1. 1) To each bounded linear functional F on $H^1(G)$ there corresponds a unique $\varphi \in BMOA(G)$ such that

$$F(f) = \int_G f\overline{\varphi}dm \qquad (f \in H^1(G)).$$

2) The map $F \mapsto \varphi$ is a topological isomorphism between the dual of $H^1(G)$ and $BMOA(G)$.

Definition 1. *The subset $E \subset X_+$ is called lacunary in the sense of Rudin, if for some $M > 0$ the inequality*

$$\mathrm{Card}\{\chi \in E : \gamma \le \chi \le \gamma^2\} < M$$

holds for every $\gamma \in X_+$.

Theorem 2. Let the support of the Fourier transform of a function $\varphi \in L^1(G)$ is lacunary in the sense of Rudin. Then $\varphi \in BMOA(G)$ if and only if $\varphi \in H^2(G)$.

BIBLIOGRAPHY

1. *Дыба Р. В., Миротин А. Р.* Свойства операторов Ганкеля над положительным конусом линейно упорядоченных абелевых групп // XI Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. конф. (Минск, 5–9 ноября 2012 г.) — Ч. 1. — Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 2012. – С. 37–38.

2. *Дыба Р. В., Миротин А. Р.* Функции ограниченной средней осцилляции и ганкелевы операторы на компактных абелевых группах // Труды института математики и механики УрО РАН — 2014 (в печати).

3. *Rudin W.* Fourier analysis on groups – New York and London: Intersciense Publishers, 1962. — 285 p.

[1]This work is suppoeted by the State Program of Scientific Research of Republic of Belarus (the grant № 20111164).

В. Б. Дыбин, С. В. Козинкова (Ростов-на-Дону)
vladimir-dybin@yandex.ru

ОПЕРАТОР КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА НА ПАРЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

На контуре $\Gamma = \mathbb{R}_1 \bigcup \mathbb{R}_2$, состоящем из пары разнонаправленных параллельных прямых в весовом пространстве Лебега рассматривается нетеров сингулярный интегральный оператор Римана $R\,(a) = P_{\Gamma}^{+} + aP_{\Gamma}^{-}$ в случае, когда его символ $a = (a_1, a_2) \in W\left(\dot{R}_1\right) \times W\left(\dot{R}_2\right)$, где $W\left(\dot{R}_k\right), k = 1, 2$ — алгебры Винера.

Факторизация символа строится на основе факторизации его элементов a_k в алгебрах $W\left(\dot{R}_k,\right) k = 1, 2$. Сингулярный интегральный оператор Коши S_{Γ} является инволюцией. Это позволяет построить матричное операторное исчисление второго порядка, продуктом которого является конструктивная теория обратимости оператора $R\,(a)$, включающая предъявление конструкций его обратных операторов и дефектных подпространств, вычисление d-характеристики и индекса $R\,(a)$.

Эта работа идет в кильватере исследований В. Б. Дыбина и Е. В. Бурцевой оператора Римана на плоских контурах, состоящих из конечного числа непересекающихся окружностей [1, 2]. Тем не менее, изучаемая здесь ситуация обладает нетривиальными особенностями. Во-первых, она позволяет рассмотреть оператор Римана на «цветке», состоящем из конечного числа плоских окружностей, имеющих общую касательную в фиксированной точке, а во-вторых, прокладывает путь в «царство Ю.И. Черского» – общую теорию уравнений типа свертки в пространствах функций показательного роста и убывания [3].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Дыбин В. Б., Бурцева Е. В.* Оператор краевой задачи Римана на системе концентрических окружностей и его приложения к одному классу уравнений в дискретных свертках // Вестник ВГУ. Серия: Физика, Математика. 2012. №2. с. 109-117.

2. *Дыбин В. Б., Бурцева Е. В.* Несколько замечаний о сингулярных интегральных операторах на контуре, состоящем из конечного числа окружностей // III Международная конференция. Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения. Тез. докл. Изд. СКНЦ ЮФУ, Ростов-на-Дону, 2013, с. 19-20.

3. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978, 296 с.

4. *Козинкова С. В.* Сингулярный интегральный оператор на паре параллельных прямых. Магистерская диссертация, ЮФУ, Ростов-на-Дону, 2013, 61 с.

В. С. Ермаков (Ростов-на-Дону)
Imir1989@yandex.ru

УРАВНЕНИЕ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ В ВЕСОВОМ СЧЁТНО-НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматриваются уравнение в конечных разностях с комплексными коэффициентами и порождаемый им операторный полином

$$\sum_{n=1}^{m} a_n f\,(x-nh) = g(x),$$

$$A(V_h) = \sum_{n=1}^{m} a_n V_h^n,$$

где $a_n \in \mathbb{C}$, V_h – оператор сдвига функции вправо на величину $h > 0$.

Построены классы $\{a,b\}_2^k, k \in \mathbb{Z}$, функций суммируемых в квадрате на $\mathbb{R}$ с весами — степенными и экспоненциальными. Операторный полином изучен в счётно-нормированном пространстве $\{a,b\}_2^{-\infty}$, являющемся пересечением всех указанных классов.

Найдены достаточные условия обратимости, либо обратимости слева оператора $A(V_h)$ для случаев обращения его символа в нуль: вне области определения, внутри данной области и на её границе. Для каждого случая построен вид обратного оператора, доказана его ограниченность по произвольной норме пространства $\{a,b\}_2^{-\infty}$. Проведены оценки норм операторов $V_{\pm h}$ на вещественной оси и полуосях.

Результаты, полученные для оператора $A(V_h)$, переносятся на случай сопряжённого оператора $A^*(V_h)$, действующего в пространстве, сопряжённом к счётно-нормированному. Приводятся достаточные условия его обратимости, либо обратимости справа. Дано описание образа оператора $A(V_h)$ в случае его обратимости слева.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнение в свёртках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971. 352 с.

2. *Дыбин В. Б.* Интегральные уравнения типа свертки в классах функций со степенным характером поведения на бесконечности: диссертация 517.948.32/33 канд. физ.-мат. наук/В. Б. Дыбин; Южный Федеральный Университет. Ростов-на-Дону, 1967. 112 с.

3. *Дыбин В. Б, Бредихин И. Н.* Об одном разностном уравнении в пространствах $\{a;b\}_p, 1 \le p \le \infty$ / Южный федеральный университет. Ростов-на-Дону, 2010. 17 с. – Деп в ВИНИТИ РАН 10.06.2010 № 357-В2010

С. В. Ефимов (Ростов-на-Дону)

НЁТЕРОВОСТЬ И ИНДЕКС ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО БИСИНГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА СО СДВИГАМИ

Пусть Γ_1, Γ_2 — простые замкнутые контуры типа Ляпунова в комплексной плоскости, ориентированные против часовой стрелки, $1 < p < +\infty$, S — оператор сингулярного интегрирования Коши в пространствах $L_p(\Gamma_1)$ и $L_p(\Gamma_2)$, $P_{\pm+} = \frac{1}{4}(S\pm I)\otimes(S+I)$ и $P_{\pm-} = \frac{1}{4}(S\pm I)\otimes(S-I)$ — проекторы в пространстве $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, $a_{\pm+}$ и $a_{\pm-}$ — непрерывные комплексные функции на $\Gamma_1\times\Gamma_2$.

Всякий диффеоморфизм $\Gamma_i \to \Gamma_j$ $(i, j = 1, 2)$ с гёльдеровской производной, сохраняющий (меняющий) ориентацию, назовём одномерным сдвигом типа $(+)$ (типа $(-)$). Двумерным сдвигом будем называть всякое отображение тора $\Gamma_1\times\Gamma_2$ на себя либо по правилу $(t_1, t_2) \mapsto (\alpha_1(t_1), \alpha_2(t_2))$, либо по правилу $(t_1, t_2) \mapsto (\alpha_1(t_2), \alpha_2(t_1))$ $(t_1 \in \Gamma_1,\ t_2 \in \Gamma_2)$, где α_1, α_2 — одномерные сдвиги; в первом случае двумерный сдвиг называется покоординатным, а во втором случае — перекрёстным; при этом если α_1 типа (ε), а α_2 типа (δ) $(\varepsilon, \delta = \pm)$, то будем говорить, что двумерный сдвиг типа (ε, δ). Введём четыре двумерных сдвига $\alpha_{\pm+}$, $\alpha_{\pm-}$ и четыре оператора $W_{\pm+}$, $W_{\pm-}$ в пространстве $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$: $W_{xy}f = f\circ\alpha_{xy}$ $(x, y = \pm,\ f \in L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2))$.

Наша задача — свести вопросы нётеровости и индекса оператора $M = \sum\limits_{x,y=\pm} a_{xy}W_{xy}P_{xy}$ в $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ к характеристическому бисингулярному оператору без сдвигов [1]. Для этого зафиксируем две точки z_1^o, z_2^o в ограниченных областях с границами Γ_1, Γ_2 соответственно и рассмотрим две функции $e_i(t_i) = t_i - z_i^o$ $(t_i \in \Gamma_i,\ i = 1, 2)$. Для $x = \pm$ обозначим $\bar{x} = \mp$. Наконец, введём функции e_{xy} на $\Gamma_1\times\Gamma_2$ и проекторы P'_{xy} в $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ $(x, y = \pm)$ по следующим правилам: пусть двумерный сдвиг α_{xy} покоординатный (перекрёстный), тогда

1) если α_{xy} типа $(+,+)$, то $e_{xy} = 1$ и $P'_{xy} = P_{xy}$ $(P'_{xy} = P_{yx})$,
2) если α_{xy} типа $(+,-)$, то $e_{xy} = 1\otimes e_2$ и $P'_{xy} = P_{x\bar{y}}$ $(P'_{xy} = P_{\bar{y}x})$,
3) если α_{xy} типа $(-,+)$, то $e_{xy} = e_1\otimes 1$ и $P'_{xy} = P_{\bar{x}y}$ $(P'_{xy} = P_{y\bar{x}})$,
4) если α_{xy} типа $(-,-)$, то $e_{xy} = e_1\otimes e_2$ и $P'_{xy} = P_{\bar{x}\bar{y}}$ $(P'_{xy} = P_{\bar{y}\bar{x}})$.

Теорема. *Оператор M нётеров или нет одновременно с оператором $A = \sum\limits_{x,y=\pm} \frac{a_{xy}}{e_{xy}\circ\alpha_{xy}} P'_{xy}$. При этом $\mathrm{Ind}M = \mathrm{Ind}A$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пилиди В. С.* К вопросу об индексе бисингулярных интегральных операторов // Мат. анализ и его прил. Ростов н/Д. 1975. Т. 7. С. 123–136.

С. А. Золотых, В. А. Стукопин (Ростов-на-Дону)
stukopin@mail.ru

Об алгоритмическом описании предельного спектра несамосопряженных ленточных тёплицевых матриц

Описание предельного спектра ленточных тёплицевых матриц является важной задачей спектральной теории тёплицевых матриц (см.[1]). В работе [2] найдено полуалгебраическое описание предельного спектра, основанное на конструкции многомерного результанта, именно описание его как подмножества множества решений системы алгебраических уравнений и неравенств. Проблема состоит в том, что мы не всегда можем выделить предельный спектр, используя явную алгоритмическую процедуру или получить его явное описание, использующее алгебраические функции. Но в случае, когда символ тёплицевой матрицы обладает некоторой симметричностью, это сделать можно. В данной работе мы рассматриваем два простых примера такого рода символов и находим для них явное алгебраическое описание предельного спектра. Мы надеемся, что отталкиваясь от такого рода примеров, можно построить общую теорию, позволяющую получать явное алгебраическое описание предельного спектра для несамосопряженных тёплицевых матриц специального вида и выделить явно классы таких матриц, для которых возможно указанное выше алгоритмическое описание.

Рассмотрим следующие символы

$$a^1(z) = z^3 + z^{-1}, \tag{1}$$

$$a^2(z) = z^4 + z^{-1}, \tag{2}$$

и определяемые ими теплицевы матрицы $T_n(a^i) = ((a^i)_{kl})_{k,l=1}^n$, $i = 1, 2$, $(a^i)_{kl} = (a^i)_{k-l}$, где $(a^i)_j$ – коэффициент при z^j в символе a^i. Предельные спектры в этом случае являются объединением 3 и, соответственно 4, отрезков с одной общей концевой точкой, таким, что соседние отрезки образуют между собой одинаковые углы (соответственно $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{4}$).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Bottcher A. C, Grudsky S. M.* Spectral properties of banded Toeplitz matrices. SIAM, 2005, 411.

2. *Золотых С. А., Стукопин В. А.* Об описании предельного спектра ленточных тёплицевых матриц. — Вестник ДГТУ. — 2012. — Т.13, №8. – С. 5–11.

О. А. Иванова (Ростов-на-Дону), С. Н. Мелихов (Ростов-на-Дону, Владикавказ),
neo_ivolga@mail.ru, *melih@math.rsu.ru*

ОБ ИНТЕРПОЛИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ А. Ф. ЛЕОНТЬЕВА

Пусть E — счетный индуктивный предел весовых пространств Фреше целых (в $\mathbb{C}$) функций, задаваемый весовыми функциями, удовлетворяющими стандартным ограничениям. Возьмем функцию $g_0 \in E$ такую, что $g_0(0) = 1$. Для $z \in \mathbb{C}$ оператор Поммье D_z на E определяется следующим образом: $D_z(f)(t) := \frac{f(t)-g_0(t-z)f(z)}{t-z}$, $t \neq z$, и $D_z(f)(z) := f'(z) - g_0'(0)f(z)$, $f \in E$. Предположим, что F — некоторое комплексное локально выпуклое пространство, обладающее следующими свойствами: (F1) (F, E) — дуальная пара относительно билинейной формы $\langle x, f\rangle$, $x \in F$, $f \in E$; (F2) топологии F и E мажорируют слабые топологии $\sigma(F, E)$ и $\sigma(E, F)$ соответственно; (F3) существуют элементы $e_\lambda \in F$, $\lambda \in \mathbb{C}$, такие, что $\langle e_\lambda, g\rangle = g(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Определение. *Пусть Q — целая в $\mathbb{C}^2$ функция такая, что $Q(\cdot, z) \in E$ для любого $z \in \mathbb{C}$. Q-интерполирующим функционалом назовем отображение $\Omega_Q : \mathbb{C}^2 \times F \to \mathbb{C}$, задаваемое равенством*

$$\Omega_Q(\mu, z, x) := \langle x, D_\mu(Q(\cdot, z))\rangle,\ \mu, z \in \mathbb{C},\ x \in F.$$

Изучены свойства Q-интерполирующего функционала. Частными случаями Ω_Q являются интерполирующ$\mathbb{C}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976. 536 с.

2. *Мелихов С. Н.* Продолжение целых функций вполне регулярного роста и правый обратный для оператора представления аналитических функций рядами квазиполиномов // Матем. сб. 2000. Т. 191, № 7. С. 105–128.

А. И. Иноземцев (Липецк)
inozemcev.a.i@gmail.com

КРИТЕРИЙ ДЕЙСТВИЯ ОПЕРАТОРОВ ВОЛЬТЕРРА С МНОГОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ $C(D)$ [1]

Работа содержит критерий действия оператора Вольтерра с многомерными частными интегралами $(Kx)(t)=\sum\limits_{\alpha}\int\limits_{\Omega_\alpha} k_\alpha(t,S_\alpha)x(s_\alpha)\,dS_\alpha$ в пространстве $C(D)$, где
$D=[a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]$, α — мультииндекс $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\neq(0,0,\dots,0)$, $\alpha_j\in\{0;1\}$ $(j=1,\dots,n)$, $\Omega_\alpha=\prod\limits_{\alpha}[a_j,t_j]^{\alpha_j}$, $a_j\le t_j\le b_j$, $\Omega_\alpha\subset D_\alpha=\prod\limits_{\alpha}[a_j,b_j]^{\alpha_j}$, $S_\alpha\subset\{\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_n\}$ и $dS_\alpha\subset\{d\tau_1,d\tau_2,\dots,d\tau_n\}$. Вектор s_α получается заменой компонент вектора t соответствующими элементами из S_α, $k_\alpha(t,S_\alpha)$ — измеримые по совокупности переменных функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Условия действия операторов Вольтерра в случае $n=2$ содержатся в работах [1,2].

Рассмотрим функции

$$B(t)=k_1(t)+\sum_{i=2}^{2^n}\int\limits_{\Omega_i}k_i(t,S_i)\,dS_i,$$

$B_\alpha(t)=\int\limits_{\Omega}x_\alpha\,dg(t,\tau)$, $\gamma(t)=|k_1(t)|+\sum\limits_{i=2}^{2^n}\int\limits_{D_i}|k_i(t,S_i)|\,dS_i$. Из критерия действия оператора $(Kx)(t)=\sum\limits_{\alpha}\int_{D_\alpha}k_\alpha(t,S_\alpha)x(s_\alpha)\,dS_\alpha$ с многомерными частными интегралами в $C(D)$ следует

Теорема. *Оператор Вольтерра $(Kx)(t)$ с $\Omega_\alpha\subset D_\alpha$ действует в пространстве $C(D)$ тогда и только тогда, когда при каждом фиксированном $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in D$ функции $B(t)$, $B_\alpha(t)$ непрерывны, а функция $\gamma(t)$ ограничена. При выполнении этих условий оператор $(Kx)(t)$ непрерывен и его норма определяется равенством $\|K\|=\sup\limits_{D}\gamma(t)$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами. – Липецк: ЛГПУ, 2006. – 177 с.

2. *Калитвин А. С., Фролова Е. В.* Линейные уравнения с частными интегралами. C-теория – Липецк: ЛГПУ, 2004. – 195 с.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (проект 1.4407.2011).

В. В. Казак, Н. Н. Солохин (Ростов-на-Дону)
vkazak@pochta.ru

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В теории бесконечно малых изгибаний поверхностей с краем важное место занимают вопросы, связанные с изучением характера внешних связей поверхности. Наибольший интерес представлюят связи, которые легко поддаются возмущениям, приводящим к связям, совместимым с изгибаниями. Аналитически такие связи можно представить в виде:

$$R\left(\bar{U}\right) = c, \tag{1}$$

где R — однородный аддитивный оператор, сопоставляющий каждому полю смещений $\vec{U}$ заданную на некотором множестве функцию c.

Характер внешней связи (1) определяется следующим образом. Если поверхность допускает бесконечно малые изгибания, зависящие от p параметров, совместимые с условием (1) для любой функции c, то внешняя связь (1) называется квазикорректной, почти жёсткой с p степенями свободы.

Связи (1) могут быть осуществлены различными способами (склеивание поверхностей, втулочные связи и т. д.). К числу общих связей вида (1) относится краевое условие обобщённого скольжения:

$$R\left(\bar{U}\right) = \bar{U}\bar{l} = c, \tag{2}$$

где $\vec{l}$ – заданное вдоль края поверхности векторное поле.

Наиболее общими являются связи вида:

$$R\left(\bar{U}, \bar{V}\right) = c, \tag{3}$$

где $\vec{V}$ — векторное поле вращения бесконечно малого изгибания поверхности.

Решение этих задач для семейства векторных полей $\bar{\ell}_{\varepsilon}$, $\varepsilon \in (-\infty; \infty)$, сводится к краевой задаче Пуанкаре:

$$\left\{ \begin{array}{ll} w_{\bar{z}} + B\bar{w} = 0, & z \in D, \\ \mathrm{Re}\{\overline{a(t)}w_t + \varepsilon bw\} = \mathrm{c}, & t \in \partial D \end{array} \right. \tag{4}$$

которая в свою очередь приводит к исследованию интегрального уравнения с параметром ε.

В. М. Каплицкий (Ростов-на-Дону)
kaplitsky@donpac.ru

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

В работе получены результаты об асимтотических свойствах соб- ственых функций широкого класса многомерных интегральных опе-раторов, действующих в пространствах вектор-функций, например, таких как $L_p^{(m)}(\Omega)(1 < p < \infty)$, где Ω— неограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Этот класс включает в себя интегральные операторы для которых ядро допускает представление:

$$k(x,y) = a(x)k_0(x,y)b(y)$$

в котором все матричные элементы главной части ядра $k_0(x,y)$ имеют разностную мажоранту с определенными свойствами, а коэффиценты $a(x)$ и $b(y)$ являются либо ограниченными матриц-функциями, либо матриц-функциями, принадлежащими некоторым пространствам $L_r^{(m\times m)}(\Omega\times\Omega)$. На основе результатов статей [1] и [2] развит общий метод получения асимтотических оценок всех собственных функций, соответствующих собственному значению λ, не принадлежащему су- щественному спектру $\sigma_{ess}(K)$ оператора K с ядром $k(x,y)$. В случае компактности всех операторов из некоторого семейства мажорантных для оператора K положительных операторов $M_\theta(0 < \theta < 1)$, введен- ных в [2], предложенный метод в ряде случаев, важных для математи- ческой физики, даёт возможность получить точные по порядку оценки всех собственных функций оператора K, соответствующих некоторому ненулевому собственному значению λ.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов // Успехи математических наук.—1967.—Т.12, вып.2(74).—С.43-118.

2. *Каплицкий В. М.* Метод оценки собственных функций некоторых классов интегральных операторов в неограниченных областях // Изв. РАН. Сер.матем.—2011.—Т.75, вып.5—С.65-92.

Alexey N. Karapetyants (Rostov-on-Don)
karapetyants@gmail.com

ON CHARACTERIZATION OF ANALYTIC WEIGHTED BESOV SPACES BY MEANS OF FRACTIONAL DIFFERENTIATION

Let D stands for unit disc in complex plane, $0 < p < \infty$, $-1 < \lambda < \infty$. the analytic weighted Besov space $B_p^\lambda(D)$ is defined as a set of analytic in D functions such that $\int_D (1-|z|^2)^{Np-2}|f^{(N)}(z)|^p d\mu_\lambda(z) < \infty$, where $d\mu_\lambda(z) = (\lambda+1)(1-|z|^2)^\lambda d\mu(z)$, $d\mu(z) = \frac{1}{\pi}dxdy$, and N is arbitrary fixed natural number $N > \frac{1-\lambda}{p}$. The definition of $B_p^\lambda(D)$ does not depend on $N > \frac{1-\lambda}{p}$.

Bergman, Hardy, Besov, Lipshitz, Bloch and BMOA spaces are widely studied among other spaces of analytic functions of one or several variables. Without claiming completeness mention monographs by M. Dzjrbashian, K. Zhu, B. Korenblum, H. Hedenmalm, S. Axler (see books [1], [2] and references therein). Wide range of problems are common for these spaces: integral representations, atomic decomposition, duality, interpolation, etc. The solutions of these problems deal with Bergman projection, fractional integro-differentiation, Berezin transform and mean oscillation techniques. These spaces, except BMOA, are naturally considered as part of more general family of analytic Sobolev spaces, though detailed study of each specific class is of independent interest. In particular, analytic Besov spaces on the unit disk (and over more general domains), as well as the so-called Q_p – spaces, defined without use of derivatives, have been intensively studied within the mainstream of the study of functional spaces on the unit disk which are invariant under Mobius transform.

Here we study weighted analytic Besov spaces $B_p^\lambda(D)$, describing these spaces in terms of weighted differential operators of fractional order $R^{\alpha,t}$. The result also generalizes some statements, previously obtained in [3].

REFERENCES

1. *Djrbashian A.E., Shamoian F.A.* Topics in the theory of A_α^p spaces. Teubner-Texte zur Mathematik, 105. – Leipzig: BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1988.

2.*Zhu K.* Spaces of holomorphic functions in the unit ball. Graduate texts in Mathematics. Springer. 2004.

3. *Karapetyants A.N, Kodzoeva F.D.* Analytic weighted Besov spaces on the unit ball. Proc. A.Razmadze Math. Inst. 2005. Vol.139, P. 125–127.

Д. С. Климентов (Ростов-на-Дону)
dklimentov75@gmail.com

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ ДВУМЯ СЛУЧАЙНЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Пусть S — регулярная поверхность класса C^3 в E^3 с квадратичными формами $I = g_{ij}dx^i dx^j$, $II = b_{ij}dx^i dx^j$, $III = f_{ij}dx^i dx^j$. Не ограничивая общности, можно считать, что метрика поверхности приведена к изотермическому виду $I = \lambda(dx^2 + dy^2)$. Кроме того, будем считать, что средняя кривизна поверхности S не равна нулю. Обозначим через $p_t(x, y)$ переходную плотность процесса X_t, построенного с помощью формы I, а через $P(t, x, \Gamma)$— переходную функцию процесса Y_t, построенного с помощью формы III, Kи H — гауссова и средняя кривизны соответственно.

Имеет место следующая **Теорема 1.** *Для того, чтобы два случайных процесса X_t и Y_t однозначно, с точностью до движения, определяли поверхность S необходимо и достаточно выполнение системы уравнений*

$$\left(\frac{\Delta p_t}{\partial_t p_t}\right)^{-2} \cdot \left[\frac{1}{4H^2}\left(K\frac{\Delta p_t}{\partial_t p_t} + \left(\frac{\Delta p_t}{\partial_t p_t}\right)^2 \int P(t,x,dy)\frac{y_1^2}{2}\right)\right.$$

$$\left(K\frac{\Delta p_t}{\partial_t p_t} + \left(\frac{\Delta p_t}{\partial_t p_t}\right)^2 \int P(t,x,dy)\frac{y_2^2}{2}\right) -$$

$$\left. - \left(K\frac{\Delta p_t}{\partial_t p_t} + \left(\frac{\Delta p_t}{\partial_t p_t}\right)^2 \int P(t,x,dy)\frac{y_1^2}{2}\right)^2\right] = \frac{\partial_t p_t}{2\Delta p_t}\Delta \ln \frac{\partial_t p_t}{\Delta p_t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\left(\frac{\Delta p_t}{\partial_t p_t}\right)^2 \left(K\frac{\Delta p_t}{\partial_t p_t} + \int P(t,x,dy)\frac{y_i y_j}{1+\delta_{ij}}\right)\frac{1}{2H}\right] -$$

$$-\Gamma_{ik}^{\alpha}\left(\frac{\Delta p_t}{\partial_t p_t}\right)^2 \left(K\frac{\Delta p_t}{\partial_t p_t} + \int P(t,x,dy)\frac{y_\alpha y_j}{1+\delta_{\alpha j}}\frac{1}{2H}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\left(\frac{\Delta p_t}{\partial_t p_t}\right)^2 \left(K\frac{\Delta p_t}{\partial_t p_t} + \int P(t,x,dy)\frac{y_i y_k}{1+\delta_{ik}}\right)\frac{1}{2H}\right] -$$

$$-\Gamma_{ij}^{\alpha}\left(\frac{\Delta p_t}{\partial_t p_t}\right)^2 \left(K\frac{\Delta p_t}{\partial_t p_t} + \int P(t,x,dy)\frac{y_\alpha y_k}{1+\delta_{\alpha k}}\frac{1}{2H}\right),$$

А. В. Козак, Д. И. Ханин (Ростов-на-Дону)
avkozak@bmail.ru, dihan@mail.ru

Приближённое решение больших систем уравнений с многомерными теплицевыми матрицами

В работе предлагается приближённый метод решения двумерных дискретных уравнений свёртки на многоугольниках. Приближённое решение в точках многоугольника, удалённых от границы, предлагается искать с помощью оператора свёртки по всему пространству. В точках границы, удалённых от углов, решение ищется с помощью операторов свёртки в полупространствах. Вблизи угловых точек решение можно приблизить с помощью операторов свёртки в углах. Но так как последние мало изучены и в настоящее время неизвестны эффективные методы их обращения, то в работе предлагается искать решения в указанных точках численно с помощью систем уравнений сравнительно небольшой размерности. Для всех приближённых решений получены оценки погрешности. Кроме этого, для прямоугольника доказано, что вместо оператора свёртки по всему пространству можно использовать двумерную циклическую матрицу.

Полученные результаты без существенных изменений переносятся на многомерные дискретные уравнения свёртки в многогранниках.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козак А. В.* Локальный принцип в теории проекционных методов.// Докл. АН СССР. 1973. Т. 212. № 6. С. 1287–1289.

2. *Симоненко И. Б.* О многомерных дискретных свёртках.// Матем. исслед. Кишинёв. 1978. 3: 1(7). С. 108–122.

3. *Козак А. В., Симоненко И. Б.* Проекционные методы решения многомерных дискретных уравнений в свёртках.// Сибирский математический журнал, 1980. Т. XXI, № 2, С. 119–127.

Е. В. Комарчук (Ростов-на-Дону)
mexanic.87@mail.ru

О ВЕСОВЫХ (LF)-ПРОСТРАНСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В докладе идет речь о проблеме алгебраического и топологического проективного описания счетных индуктивных пределов весовых пространств Фреше непрерывных функций.

Пусть $h_n : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, - положительно однородные степени 1 непрерывные функции такие, что $h_n \leq h_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\omega :\ [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ - непрерывная функция, для которой $\lim\limits_{t\to+\infty} \omega(t) = +\infty$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\omega(t)}{t} = 0$.

Положим $\omega(z) := \omega(|z|)$, $z \in \mathbb{C}^N$. Определим весовые функции

$$w_{nk}(z) := \exp\left(-h_n(z) + k\omega(z)\right), \quad z \in \mathbb{C}^N, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Введем весовые банаховы пространства непрерывных функций

$$C(w_{nk}, \mathbb{C}^N) := \{f \in C(\mathbb{C}^N) | \ \ \|f\|_{nk} := \sup_{z \in \mathbb{C}^N} |f(z)| w_{nk}(z) < +\infty\},$$

$$n, k \in \mathbb{N}; \ \ WC(\mathbb{C}^N) := \mathrm{ind}_n \mathrm{proj}_k C(w_{nk}, \mathbb{C}^N).$$

Ассоциированное с (w_{nk}) семейство весов $\overline{W}$ состоит из всех полунепрерывных сверху функций $\overline{w} : \mathbb{C}^N \to [0, +\infty)$ таких, что для любого n существуют $\alpha_n > 0$ и $k = k(n)$, для которых $\overline{w} \leq \alpha_n w_{nk}$ на $\mathbb{C}^N$. Проективная оболочка индуктивного предела $WC(\mathbb{C}^N)$ определяется следующим образом:

$$C\overline{W}(\mathbb{C}^N) := \{f \in C(\mathbb{C}^N) | \ \ \|f\|_{\overline{w}} := \sup_{z \in \mathbb{C}^N} |f(z)| \overline{w}(z) < +\infty, \ \ \forall \overline{w} \in \overline{W}\}.$$

Пространство $WC(\mathbb{C}^N)$ непрерывно вложено в $C\overline{W}(\mathbb{C}^N)$.

Из [1] следует, что пространство $WC(\mathbb{C}^N)$ является топологическим подпространством $C\overline{W}(\mathbb{C}^N)$, т. е топология $WC(\mathbb{C}^N)$ совпадает с топологией, индуцированной в $WC(\mathbb{C}^N)$ из $C\overline{W}(\mathbb{C}^N)$.

Теорема. *Алгебраическое равенство* $WC(\mathbb{C}^N) = C\overline{W}(\mathbb{C}^N)$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $\forall n \exists m \forall \mu \exists C > 0$:

$$h_\mu(z) - h_m(z) \leq C(h_m(z) - h_n(z)), \ \ z \in \mathbb{C}^N.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Bierstedt K. D., Bonet J.* Weighted (LF)-spaces of continuous functions // Math. Nachr—1994.—Vol. 165.—P. 25–48.

В. Д. Кряквин (Ростов-на-Дону)
vadkr@math.rsu.ru

ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА ГЕЛЬДЕРА-ЗИГМУНДА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ [1]

В докладе рассматриваются пространства $Z^{s(\cdot),\omega}(\mathbb{R}^n)$, состоящие из распределений $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, для которых конечна норма

$$\|u\|_{s(\cdot),\omega} = \sup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \|2^{ks(\cdot)} \lambda_k(D)(\omega^{-1}u)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Здесь функции $\lambda_k(\xi)$ образуют разбиение единицы Литтлвуда-Пэли. Предполагается, что непрерывная вещественнозначная функция s удовлетворяет условиям: для любого $x \in \mathbb{R}^n$

$$-\infty < s_- \leq s(x) \leq s_+ < \infty;$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке внутреннего гранта Южного федерального университета.

существовует константа $B > 0$ такая, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и любого $0 < |y| < 1$

$$|s(x+y) - s(x)| \le \frac{B}{\left|\log_2 |y|\right|}.$$

На весовую функцию $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ накладываются следующие условия: существуют постоянные $c > 0$, $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$c^{-1}(1+|x|)^{l_1} \le \omega(x) \le c(1+|x|)^{l_2},\ x \in \mathbb{R}^n;$$

для некоторого $\delta_0 > 0$ и для любого мультииндекса β существует постоянная $c_\beta > 0$ такая, что

$$\left|\frac{\partial^\beta \omega(x)}{\partial x^\beta}\right| \le c_\beta \omega(x)(1+|x|)^{-\delta_0|\beta|},\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема. *Пусть $0 \le \delta < 1$, $m \in \mathbb{R}$ и символ $a(x,\xi)$ принадлежит классу Л.Хермандера $S^m_{1,\delta}$. Тогда псевдодифференциальный оператор $a(x,D)$ является непрерывным из $Z^{s(\cdot),\omega}(\mathbb{R}^n)$ в $Z^{s(\cdot)-m,\omega}(\mathbb{R}^n)$, и для него имеется стандартная оценка нормы.*

Л. П. Кувардина (Саратов)
KuvardinaLP@info.sgu.ru

О СХОДИМОСТИ СРЕДНИХ РИССА РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Рассмотрим интегральный оператор

$$Af(x) = \int_0^{\theta(x)} A(\theta(x),t) f(t) dt,$$

где $\theta(x) = \frac{1-x}{ax+1}$, $\quad a > -1$. Предполагается, что функции $A(x,t)$, $A_x(x,t)$, $A_t(x,t)$, $A_{xt}(x,t)$ непрерывны при $0 \le t \le x \le 1$, кроме того,

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} A(x,t)\Big|_{t=x} = \delta_{0,j} \quad (j = 0,\ 1),$$

$\delta_{i,j}$ - символ Кронекера.

Обозначим обобщенные средние Рисса разложений по собственным и присоединенным функциям оператора A через

$$\sigma_r(x,f,g) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r) R_\lambda f \, d\lambda,$$

где $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1} A$ - резольвета Фредгольма оператора A, функция $g(\lambda, r)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $g(\lambda, r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \le r$ и аналитична по λ в круге $|\lambda| < r$ при любом $r > 0$; 2) существует такая константа $C > 0$, что $|g(\lambda, r)| \le C$ при всех $r > 0$ и $|\lambda| \le r$; 3) существуют положительные β и h, такие что $g\left(re^{i\theta}, r\right) = O\left(|\theta|^{\beta}\right)$ при $|\theta| \le h$, $g\left(re^{i\theta}, r\right) = O\left(|\theta - \pi|^{\beta}\right)$ при $|\theta - \pi| \le h$; 4) $g(\lambda, r) \to 1$ при $r \to \infty$ и фиксированном λ.

Теорема. *Для того, что бы выполнялось*

$$\lim_{r \to \infty} \left\| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda| = r} g(\lambda, r) R_\lambda f \, d\lambda \right\| = 0$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x) \in C[0, 1]$ *и удовлетворяла условию* $f(1) = 0$.

А. В. Лукин (Ростов-на-Дону)
alexanderlukin9@gmail.com

ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СВЕРТКИ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В работе [1] А. В. Козак на основе модификации локального метода И. Б. Симоненко [2] получил обоснование проекционного метода для многомерных матричных уравнений свертки. В докладе представлено распространение результатов А. В. Козака на случай операторов многомерной свертки с операторными коэффициентами. Эти результаты применяются к теории многомерных уравнений с анизотропно однородными ядрами компактного типа. Полученные результаты усиливают результаты из [3].

Работа выполнена под руководством В. М. Деундяка.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Козак А. В.* Локальный принцип в теории проекционных методов // Элиста: Интегральные и дифференциальные уравнения и их приложения. 1983. С. 58–73.

2. *Симоненко И. Б.* Локальный метод в теории инвариантных относительно сдвига операторов и их огибающих // Ростов-на-Дону: Изд-во ЦВВР. 2007. 120 с.

3. *Деундяк В. М., Лукин А. В.* Приближенный метод решения операторных уравнений свертки на группе $\mathbb{R}^n$ с компактными коэффициентами и приложения // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2013. Вып. 6. С. 5–8.

А. Э. Пасенчук
pasenchuk@mail.ru

К ТЕОРИИ СИМВОЛА ОПЕРАТОРОВ ТЕПЛИЦА В СЧЕТНО-НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Будем пользоваться определениями и обозначениями из книги [1].

Пусть B - банахово пространство, $S\{B\}$ линейное пространство всевозможных последовательностей, составленных из элементов B. Через P_+ обозначим оператор проектирования в $S\{B\}$, сохраняющий члены последовательности с неотрицательными номерами и аннулирующий остальные. Положим $P_- = I - P_+$, $S_\pm(B) = P_\pm(S(B))$.

В линеале $S\{B\}$ определим счетно-нормированную топологию, порождаемой набором норм $\|\phi\|_m = \sum (|j|+1)^m \|\phi_j\|$, $m = 0, 1, ...$ Замыкание $S\{B\}$ в этой топологии обозначим через $l\{B\}$, а преобразование Лорана $l\{B\}$обозначим через $W_\infty(B)$. В счетно-нормированном пространстве $W_\infty(B)$ выделим подпространство

$$W_\infty^+(B) = \left\{ \sum_j \phi_j z^j : \phi_j = 0, \;\; j = -1, -2, ... \right\}$$

и через P^+ обозначим соответствующий оператор проектирования.

В $S\{EndB\}$ выделим топологическую алгебру с единицей $\pi(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{A} \subseteq EndB$ с операцией свертки в качестве умножения, состоящую из последовательностей операторов $a_j \in \mathfrak{A}$, $j \in Z$, нормы которых убывают быстрее любой степени при $j \to +\infty$ и растут не быстрее фиксированной степени при $j \to -\infty$. Через $\Pi(\mathfrak{A})$ обозначим топологическую алгебру преобразований Лорана элементов из $\pi(\mathfrak{A})$.

Теорема. Пусть подалгебра $\mathfrak{A} \subseteq EndB$ наполнена в $EndB$ и такова, что коммутатор двух любых ее элементов компактен. Тогда оператор $T_A = P^+A(z) \circ I : W_\infty^+(B) \to W_\infty^+(B)$ с символом $A(z) \in \Pi(\mathfrak{A})$ нетеров тогда и только тогда, когда его символ обратим в алгебре $\Pi(\mathfrak{A})$.

Литература

1. Пасенчук А.Э. Дискретные операторы типа свертки в пространствах последовательностей со степенным характером поведения на бесконечности. ЮФУ, Ростов-на-Дону, 2013, 280 с.

В. С. Пилиди (Ростов-на-Дону)
pilidi@sfedu.ru

О МЕТОДЕ СГЛАЖИВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть Γ — контур, состоящий из конечного числа простых замкнутых кривых типа Ляпунова, $A = aI + bS + T$ — действующий в пространстве $L_p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ полный сингулярный интегральный оператор, где a, b — определенные на Γ кусочно-непрерывные функции, S — оператор сингулярного интегрирования, T — компактный оператор в этом пространстве. Предположим, что оператор A обратим. Рассматривается следующая задача: найти такую последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ полных сингулярных интегральных операторов с *непрерывными* коэффициентами, чтобы к оператору A был примени́м приближенный метод по системе этих операторов при $n \to \infty$. Последнее равносильно тому, что существует такое число n_0, что все операторы A_n, $n \geq n_0$, обратимы, и нормы обратных к ним операторов равномерно ограничены. В работе найдены последовательности указанного вида. В качестве метода исследования использованы подходы работ [1–3] и локальный принцип Гохберга-Крупника. Полученные результаты могут быть перенесены на случай полных сингулярных интегральных операторов на вещественной оси и на случай пространств функций, суммируемых с переменной степенью.

Один частный случай подобной аппроксимации рассмотрен в работе [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козак А. В.* Локальный принцип в теории проекционных методов // Докл. АН СССР. 1973. Т. 212, № 6. С. 1287–1289.

2. *Silbermann B.* Lokale Theorie des Reduktionsverfahrens für Toeplitzoperatoren // Math. Nachr. 1981. B. 104. S. 137–146.

3. *Пилиди В.,С.* Критерии равномерной обратимости регулярных аппроксимаций одномерных сингулярных интегральных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 66, № 6. С. 1270–1294.

4. *Пилиди В.,С.* Обоснование метода сглаживания коэффициентов для сингулярных интегральных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами // Известия вузов. Северо-Кавказский регион 2004. Т. 128, № 4. С. 9–12.

Stefan Samko (Faro & Rostov-on-Don)
ssamko@ualg.pt

VARIABLE EXPONENR HARDY AND CARLEMAN-KNOPP INEQUALITIES

The well known $L^p(\mathbb{R}_+) \to L^q(\mathbb{R}_+)$-Hardy inequalities with power weights are known to be extended to the case of variable exponent setting $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}_+) \to L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}_+)$.

In the case $p(0) = p(\infty)$ and $q(0) = q(\infty)$ we give an estimation of the constants arising in this extension in dependence on the values of $p(\infty)$, $\inf p(x)$ and the values of the exponents A_p, A_q from the decay conditions at the origin and infinity. The obtained estimate enables us to use dilation arguments to derive the variable exponent Carleman-Knopp inequality from the variable exponent Hardy inequality.

А. Г. Сергеев (Москва)
sergeev@mi.ras.ru

УНИВЕРСАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО ТЕЙХМЮЛЛЕРА И ЕГО КВАНТОВАНИЕ

Универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ является фактором группы $\mathrm{QS}(S^1)$ квазисимметричных гомеоморфизмов окружности S^1 по модулю преобразований Мебиуса. В частности, оно содержит фактор $\mathcal{S}$ группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ диффеоморфизмов окружности S^1 по модулю преобразований Мебиуса. Обе группы действуют естественным образом на пространстве Соболева $H := H_0^{1/2}(S^1, \mathbb{R})$, состоящем из полудифференцируемых функций.

Задача квантования пространств $\mathcal{T}$ и $\mathcal{S}$ возникает в теории струн, где указанные пространства играют роль фазовых многообразий. Для того, чтобы решить задачу квантования для заданного фазового многообразия, необходимо фиксировать алгебру Ли функций (наблюдаемых) на этом многообразии и построить ее неприводимое представление в гильбертовом пространстве квантования.

В случае пространства $\mathcal{S}$ алгебра наблюдаемых совпадает с алгеброй Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$ группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$. В этом случае в качестве пространства квантования берется пространство Фока $F(H)$, ассоциированное с соболевским пространством $H = H_0^{1/2}(S^1, \mathbb{R})$. Неприводимое представление алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$ в фоковском пространстве $F(H)$, определяющее квантование $\mathcal{S}$, задается инфинитезимальной версией действия группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ на H.

В случае пространства $\mathcal{T}$ ситуация усложняется из-за того, что действие группы $\mathrm{QS}(S^1)$ на $\mathcal{T}$ не является гладким. Поэтому не существует классической алгебры Ли, ассоциированной с группой $\mathrm{QS}(S^1)$. Однако, можно определить квантовую алгебру наблюдаемых $\mathrm{Der}^q(\mathrm{QS})$, порождаемую квантовыми дифференциалами, действующими на $F(H)$. Эти дифференциалы задаются интегральными операторами $d^q h$ на H с ядрами, задаваемыми по существу конечно-разностными производными гомеоморфизмов $h \in \mathrm{QS}(S^1)$.

Н. И. Трусова (Липецк)
trusova.nat@gmail.com

РАЗРЕШИМОСТЬ СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ УРЫСОНА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ $C^{(1),n}(D)$ [1]

Пусть дана система интегральных уравнений Урысона с частными интегралами

$$x_i(t,s) = \sum_{j=1}^{n} \Big[\int_a^t l_{1,ij}(t,s,\tau,x_j(\tau,s))d\tau + \int_c^s m_{1,ij}(t,s,\sigma,x_j(t,\sigma))d\sigma + \\ + \int_a^t \int_c^s n_{1,ij}(t,s,\tau,\sigma,x_j(\tau,\sigma))d\tau d\sigma \Big], i = 1,...,n, \quad (1)$$

где $t \in [a,b]$, $\tau \in [a,t]$, $s \in [c,d]$, $\sigma \in [c,s]$, $u \in R$, $l_{1,ij}(t,s,\tau,u)$, $m_{1,ij}(t,s,\sigma,u)$ и $n_{1,ij}(t,s,\tau,\sigma,u)$ — вещественные функции. Через $C^{(1)}(D)$ обозначим пространство функций со значениями в R, частные производные которых по t и s непрерывны, а через $C^{(1),n}(D)$ - пространство вектор-функций $x(t,s) = (x_1(t,s), ..., x_n(t,s))$.

Теорема 1. *Пусть функции $l_{1,ij}(t,s,\tau,u)$, $m_{1,ij}(t,s,\sigma,u)$, $n_{1,ij}(t,s,\tau,\sigma,u)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка по t и s и удовлетворяют условию Липшица по последней переменной. Тогда система (1) имеет в $C^{(1),n}(D)$ единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений.*

Отметим, что свойства линейных и нелинейных операторов и уравнений с частными интегралами в различных функциональных пространствах исследовались в [1-5].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. – 560 p.

2. *Калитвин А. С.* Линейные операторы с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2000. – 252 с.

3. *Калитвин А. С.* Нелинейные операторы с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2002. – 208 с.

4. *Калитвин А. С., Фролова Е. В.* Линейные уравнения с частными интегралами. С – теория. Липецк: ЛГПУ, 2004. – 195 с.

[1]Работа поддержана Минобрнауки России (проект № 1.4407.2011).

5. *Калитвин А. С.,Калитвин В. А.* Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2006. – 177 с.

С. М. Умархаджиев (Грозный)
umsalaudin@gmail.com

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ОПЕРАТОРА РИССА В ОБОБЩЁННЫХ ГРАНД-ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

Обозначим через G_p класс положительных и ограниченных на интервале $(0, p-1)$ функций $\varphi(x)$, для которых $\lim_{x\to+0}\varphi(x) = 0$.

Определение. *Пусть* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $1 < p < \infty$, w *– вес на* Ω, φ *– ограниченная на интервале* $(0, p-1)$ *функция и* $\lim_{x\to+0}\varphi(x) = 0$, a *– произвольная неотрицательная функция из весового пространства Лебега* $L^p(\Omega, w)$. *Обобщённым гранд-пространством Лебега* $L_a^{p),\varphi}(\Omega, w)$ *будем называть пространство, определяемое нормой*

$$\|f\|_{L_a^{p),\varphi}(\Omega,w)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} [\varphi(\varepsilon)]^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega, wa^\varepsilon)}.$$

Пространство $L_a^{p),\varphi}(\Omega, w)$ является банаховым пространством и условие $a \in L^p(\Omega, w)$ необходимо и достаточно, чтобы оно являлось расширением весового пространства Лебега $L^p(\Omega, w)$.

Теорема 1. *Пусть сублинейный оператор* T *ограничен из пространства* $L^p(\Omega, w)$ *в пространство* $L^q(\Omega, v)$, $1 < p, q < \infty$, *и ограничен из пространства* $L^{p_0}(\Omega, w_0)$ *в пространство* $L^{q_0}(\Omega, v_0)$ *для некоторых двух чисел* $p_0 \in (1, p)$, $q_0 \in (1, q)$ *и весовые функции таковы, что имеют место вложения*

$$L^p(\Omega, w) \hookrightarrow L^{p_0}(\Omega, w_0) \text{ и } L^q(\Omega, v) \hookrightarrow L^{q_0}(\Omega, v_0).$$

Если $\varphi \in G_p$, $\psi \in G_q$ *и*

$$\sup_{0<t<1} \frac{[\psi(q-q_t)]^{1/q_t}}{[\varphi(p-p_t)]^{1/p_t}} < \infty,$$

где $1/p_t = (1-t)/p + t/p_0$ *и* $1/q_t = (1-t)/q + t/q_0$, *то оператор* T *ограничен из весового обобщённого гранд-пространства Лебега* $L^{p),\varphi}_{(w_0/w)^{1/(p-p_0)}}(\mathbb{R}^n, w)$ *в весовое обобщённое гранд-пространство Лебега* $L^{q),\psi}_{(v_0/v)^{1/(q-q_0)}}(\mathbb{R}^n, v)$.

Теорема 2. *Пусть* $0 < \alpha < n$, $1 < p < q < \infty$, *функции* φ *и* ψ *удовлетворяют условиям Теоремы 1. Если пара весовых функций* w *и* v *удовлетворяет условию Сойера-Уидена* $A_{p,q}$, *то риссов потенциал* I^α *ограничен из пространства* $L^{p),\varphi}_{w^{-1/p}}(\Omega, w)$ *в пространство* $L^{q),\psi}_{v^{-1/q}}(\Omega, v)$.

З. Ю. Фазуллин (Уфа)
fazullinzu@mail.ru

ФОРМУЛЫ СЛЕДОВ ВОЗМУЩЕНИЙ МОДЕЛЬНЫХ ДВУМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Пусть $L_0 = L_0^*$ – полуограниченный снизу оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, пусть, далее, V – самосопряженный, L_0 – компактный операторы и $L = L_0 + V$. Обозначим $\sigma(L_0) = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ – спектр оператора L_0, при этом $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, $\nu_k \leq \infty$ – кратность собственного значения λ_k, P_k – проектор на собственное подпространство, соответствующее λ_k, $\sigma(L) = \{\mu_i^{(k)}\}_{i=1}^{\nu_k}$, $k = 1, 2, \dots$ – спектр оператора L.

При каких условиях на операторы L_0 и V имеет место тождество

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\nu_k}(\lambda_k - \mu_i^{(k)}) + \operatorname{tr}(P_k V)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\lambda_n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{tr}[P_k V^2 - (P_k V)^2],$$

где tr – след ядерного оператора, причем правая часть приведенного тождества конечна и отлична от нуля.

В докладе мы проанализируем возмущения трех модельных двумерных операторов математической физики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фазуллин З. Ю.,Муртазин Х. Х.* Регуляризованный след двумерного гармонического осциллятора // Матем. сборник. 2001. Т. 192. № 5.С. 87–124.

2. *Муртазин Х. Х., Фазуллин З. Ю.* Спектр и формула следов двумерного оператора Шредингера в однородном магнитном поле // Дифф. уравнения. 2009. Т. 45. № 4. С. 1–15.

3. *Садовничий В. А., Фазуллин З. Ю., Атнагулов А. И.* Свойства резольвенты оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере и формула следов // Доклады РАН. 2011. Т. 441. № 2. С. 1–3.

А. П. Чеголин (Ростов-на-Дону)
apchegolin@mail.ru

ДВУМЕРНЫЕ ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ В КЛАССАХ ГЕЛЬДЕРА

Данная работа посвящена изучению дробных производных в классах непрерывных на прямоугольнике $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ функций, удовлетворяющих условию Гельдера порядка $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$:

$$|\varphi(t_1, t_2) - \varphi(\tau_1, \tau_2)| \leqslant A \left(|t_1 - \tau_1|^{\lambda_1} + |t_2 - \tau_2|^{\lambda_2} \right)$$

для любых $t = (t_1, t_2) \in \Omega$ и $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in \Omega$. Множество всех таких функций обозначим $H^\lambda(\Omega)$ и будем называть классом Гельдера в двумерном случае.

Дробным интегралом порядка $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, α_1, $\alpha_2 \geqslant 0$, функции $\varphi \in H^\lambda(\Omega)$ назовем следующую конструкцию

$$(I_a^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \iint\limits_{[a_1, x_1] \times [a_2, x_2]} \frac{\varphi(t)}{(x - t)^{(1-\alpha_1, 1-\alpha_2)}} \, dt, \quad x \in \Omega,$$

где $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)$.

Введем следующие дробные производные

$$(D_a^{\alpha_1, 0} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_1)} \frac{\partial}{\partial x_1} \int\limits_{a_1}^{x_1} \frac{f(t_1, x_2)\, dt_1}{(x_1 - t_1)^{\alpha_1}},$$

$$(D_a^{0, \alpha_2} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_2)} \frac{\partial}{\partial x_2} \int\limits_{a_2}^{x_2} \frac{f(x_1, t_2)\, dt_2}{(x_2 - t_2)^{\alpha_2}},$$

$0 < \alpha_1 < 1$, $0 < \alpha_2 < 1$, $x \in \Omega$. Эти производные обращают дробные интегралы соответствующих порядков на функциях $\varphi \in H^\lambda(\Omega)$. Справедлива

Теорема. *Пусть* $f \in H^\lambda(\Omega)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $0 < \alpha_1 < \lambda_1 \leqslant 1$, $0 < \alpha_2 < \lambda_2 \leqslant 1$. *Тогда*

$$(D_a^{\alpha_1, 0} f)(x) = \frac{f(a_1, x_2)}{\Gamma(1 - \alpha_1)(x_1 - a_1)^{\alpha_1}} + \omega_1(x),$$

$$(D_a^{0, \alpha_2} f)(x) = \frac{f(x_1, a_2)}{\Gamma(1 - \alpha_2)(x_2 - a_2)^{\alpha_2}} + \omega_2(x),$$

где $\omega_1 \in H^{(\lambda_1 - \alpha_1, \min\{\lambda_1, \lambda_2\} - \alpha_1)}(\Omega)$, $\omega_2 \in H^{(\min\{\lambda_1, \lambda_2\} - \alpha_2, \lambda_2 - \alpha_2)}(\Omega)$, $\omega_1(a_1, x_2) = \omega_2(x_1, a_2) = 0$.

А. А. Шкаликов (Москва)
ashkalikov@yahoo.com

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ПО КОНЕЧНОМУ НАБОРУ СПЕКТРАЛЬНЫХ ДАННЫХ

С оператором Штурма-Лиувилля мы ассоциируем специальные гильбертовы пространства, которые содержат спектральные данные этого оператора. Затем мы конструируем нелинейные отбражения, которые переводят потенциал оператора в его спектральные данные. Эти отображения оказываются аналитическими в окрестностях вещественных шаров, нам удается точно описать образы этих шаров. Это дает возможность установить равномерные априрные оценки и решить проблему Марченко об устойчивости. С помощью этих результатов мы даем точные оценки погрешности для задачи о восстановлении потенциала по конечному набору спектральных данных.

А. Я. Якубов (Грозный)
yakub@inbox.ru

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА КРИТЕРИЯ ЧЕБЫШЕВА О НЕРАВЕНСТВАХ

В работе получены необходимые и достаточные условия выполнения соотношений вида

$$|\Delta(f,g)| = \left| \int\limits_a^b p dt \int\limits_a^b pfg dt - \int\limits_a^b pf dt \int\limits_a^b pg dt \right| = |R_1| \leq$$

$$\leq \gamma \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \max_{a \leq x \leq b} |g'(x)|, \gamma > 0 \tag{1}$$

для произвольных измеримых на брусе $\Omega_{a,b} \subset \mathbb{R}^n$ функций с помощью алгебраической теории квадратичных форм.

Также получены дискретные аналоги этих соотношений и их приложения.

Секция II
Теория функций

Н. Ф. Абузярова (Уфа)
abnatf@gmail.com

СЛАБО ЛОКАЛИЗУЕМЫЕ ПОДМОДУЛИ И СПЕКТРАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ В ПРОСТРАНСТВЕ ШВАРЦА[1]

Пусть $\mathcal{E}$ – пространство Шварца бесконечно дифференцируемых функций на интервале (конечном или бесконечном) $(a;b) \subset \mathbb{R}$. Для замкнутых подпространств $W \subset \mathcal{E}(a;b)$, инвариантных относительно дифференцирования $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}$ (короче, D-*инвариантных*) получено необходимое и достаточное условие допустимости *слабого спектрального синтеза:* $W = \overline{W_{I_W} + \operatorname{span} \operatorname{Exp} W}$, где $I_W \subset (a;b)$ — наименьший относительно замкнутый в $(a;b)$ промежуток со свойством $W_{I_W} = \{f \in \mathcal{E}(a;b),\quad f^{(k)}(t) = 0,\ t \in I_W,\ k = 0,1,\dots\} \subset W$ (существование такого промежутка для произвольного D-инвариантного подпространства W доказано в [1, теорема 4.1]). $\operatorname{Exp} W$ обозначает совокупность всех экспоненциальных одночленов $t^j e^{-\mathrm{i}\lambda t}$, содержащихся в W.

Следствиями этого критерия являются утверждения о наличии слабого спектрального синтеза в D-инвариантном подпространстве W с дискретным спектром (для оператора $D : W \to W$) при выполнении одного из перечисленных ниже условий:

1) *радиус полноты ρ_W системы экспоненциальных одночленов* Exp W *меньше, чем* $(b-a)/2\pi$;

2) $\rho_W = (b-a)/2\pi$, *а среди преобразований Фурье-Лапласа распределений* $S \in \mathcal{E}'(a;b)$ *найдется функция, обратимая (см. [2]) в алгебре Шварца* $\mathcal{P}$ *(состоящей из всех целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси)* ;

3) $\rho_W = (b-a)/2\pi$, *а среди преобразований Фурье-Лапласа распределений* $S \in \mathcal{E}'(a;b)$, *аннулирующих* W, *найдется функция* $\varphi(z) = \int\limits_a^b s(t)e^{-itz}\mathrm{d}\,t$, $s \in C_0^\infty(a;b)$, *представимая также в виде* $\varphi = \Phi/\omega$, *где* ω *– целая функция минимального типа при порядке 1, а* Φ *– функция типа синуса с нулевым множеством* $\Lambda = \{(\lambda_j; n_j)\}$, *для которого* $\inf\{|\tilde{\lambda_j} - \tilde{\lambda_k}|,\quad j \neq k\} > 0$.

Возможность слабого спектрального синтеза в случае 1) является основным результатом анонсированной недавно работы [3]; методы, используемые в [3] отличаются от применяемых нами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aleman A., Korenblum B.* Derivation-Invariant Subspaces of C^∞ // Comp.Meth. and Function Theory. 2008. V. 8. № 2. P. 493-512.

[1]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (грант №01201456408).

2. *Berenstein C.A., Taylor B.A.* A new look at interpolation theory for entire functions of one variable // Adv. Math. 1980. V. 33. P. 109-143.

3. *Aleman A., Baranov A., Belov Yu.* Subspaces of C^∞ invariant under the differentiation. // arXiv:1309.6968v2 [math.CV]

Г. Акишев (Караганда, Казахстан)
akishev@ksu.kz

ОБ ОЦЕНКАХ ЛИНЕЙНЫХ ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ СИММЕТРИЧНОГО ПРОСТРАНСТВА [1]

Пусть $I^m = \{\bar{x} = (x_1, ...x_m) \in \mathbb{R}^m; \quad 0 \le x_j \le 1; \quad j = 1, ..., m\}$. $X(\varphi)-$ симметричное пространство функций на I^m, с фундаментальной функцией φ, $\|f\|_X$ - норма элемента $f \in X(\varphi)$ (см. [1], с. 123). Для функции φ, положим

$$\alpha_\varphi = \underline{\lim}_{t\to 0} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}, \qquad \beta_\varphi = \overline{\lim}_{t\to 0} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}.$$

Примерами сепарабельных симметричных пространств являются пространства Лебега $L_q(I^m)$, $1 \le q < +\infty$, Лоренца $L_{q\theta}(I^m)$

Пусть $a_{\bar{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(I^m)$ по системе $\{e^{i\langle\bar{n},2\pi\bar{x}\rangle}\}_{\mathbb{Z}^m}$. Положим $\langle\bar{y},\bar{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^m y_j x_j$, $s = 1, 2, ...$ $\delta_s(f, \overline{x}) = \sum\limits_{\bar{k}\in\rho(s)} a_{\bar{k}}(f) e^{i\langle\bar{k},2\pi\bar{x}\rangle}$, где

$$\rho(s) = \left\{\bar{k} = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z}^m : \quad 2^{s-1} \le |k_j| < 2^s, j = 1, ..., m\right\},$$

Пусть $1 < \alpha_\varphi \le \beta_\varphi < 2, \quad 1 \le \theta \le \infty$ и $r > 0$. Рассматриваются классы Никольского, Бесова

$$B^r_{X,\theta} = \Big\{f \in X(\varphi) : \Big(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} 2^{sr\theta} \|\delta_s(f)\|^\theta_X\Big)^{\frac{1}{\theta}} \le 1\Big\}.$$

В докладе на обсуждение предлагаются оценки линейного поперечника $\lambda_M(B^r_{X,\theta}, L_{q,\tau})$ (определение см. [2]). В частности

Теорема 1. *Пусть* $X(\varphi) - - -$ *симметричное пространство,* $0 < \frac{1}{q} < \frac{1}{2} \le \log_2 \alpha_\varphi \le \log_2 \beta_\varphi < 1$, $1 < \tau < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$.

Если $\frac{r}{m} > \log_2 \beta_\varphi$, *то*

$$\lambda_M\left(B^r_{X,\theta}, L_{q,\tau}\right) \le C \frac{M^{-(\frac{r}{m}+\frac{1}{2})}}{\varphi(M^{-1})}.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. — М.: Наука, 1978. 400 с.

[1] Работа выполнена при поддержке гранта 0740/ГФ МО и Н РК.

2. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений. // Успехи мат. н. — 1960 — Т. 145, №3 — С. 81—120.

A. V. Harutyunyan
Joint paper with W. Lusky (University of Paderborn)
anahit@ysu.am

TÖPLITZ OPERATORS ON WEIGHTED BESOV SPACES OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS ON THE POLYDISK

Let U^n be the unit polydisk in C^n and S be the space of functions of regular variation. Let $1 \le p < \infty$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $\omega_j \in S(1 \le j \le n)$ and $f \in H(U^n)$. The function f is said to be an element of the holomorphic Besov space $B_p(\omega)$ if

$$\|f\|^p_{B_p(\omega)} = \int_{U^n} |Df(z)|^p \prod_{j=1}^{n} \frac{\omega_j(1-|z_j|)}{(1-|z_j|^2)^{2-p}} dm_{2n}(z) < +\infty$$

where $dm_{2n}(z)$ is the $2n$-dimensional Lebesgue measure on U^n and D stands for a special fractional derivative of f defined in the paper. For example, if $n = 1$ then Df is the derivative of the function $zf(z)$.

We show that $B_p(\omega)$ is a Banach space with respect to $|| \cdot ||_{B_p(\omega)}$ and the set of polynomials is dense in $B_p(\omega)$. Then Töplitz' operators are considered in $B_p(\omega)$ for $1 \le p < \infty$, and the symbols $\{h\}$ for which the Toeplitz operators $\{T_h\}$ induce bounded operators $T_h : B_p(\alpha) \to B_p(\alpha)$ are described. As an application, a division theorem on «good inner» functions is obtained in $B_p(\alpha)$.

С.С. Волосивец[1] (Саратов), Б.И. Голубов[2] (Долгопрудный)
volosivetsss@mail.ru, golubov@mail.mipt.ru

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ИЗ КЛАССОВ $H^{\omega,m}$

Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ интегрируема по Лебегу на $\mathbb{R}$ ($f \in L(\mathbb{R})$). Тогда ее преобразование Фурье определяется равенством

$$\hat{f}(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itx} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Известно, что $\hat{f}(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \hat{f}(x) = 0$, т. е. $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$. Для $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим m-ю симметрическую разность $\Delta_h^m f(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} C_m^j f(x+$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00238).
[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00417).

$(2j-m)h/2)$. Если $\hat f \in C_0(\mathbb{R})$ и $\|f\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, то величина $\omega_m(f,\delta) := \sup\limits_{0\leqslant h\leqslant\delta} \|\Delta_h^m f(x)\|$, называемая модулем гладкости порядка m, конечна при всех $\delta > 0$ и $\lim\limits_{\delta\to+0} \omega_m(f,\delta) = 0$. Обозначим через Φ множество непрерывных на $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$ возрастающих функций ω таких, что $\omega(0) = 0$ и $\omega(2t) = O(\omega(t))$, $t \in \mathbb{R}_+$. Если $\omega \in \Phi$ и $\int_0^\delta t^{-1}\omega(t)\,dt = O(\delta)$, то будем говорить, что ω принадлежит классу Бари B. А если $\omega \in \Phi$ и $\delta^m \int_\delta^\infty t^{-m-1}\omega(t)\,dt = O(\omega(\delta))$, $m \in \mathbb{N}$, то будем говорить, что ω принадлежит классу Бари–Стечкина B_m (см. [1]). Определим классы функций $H^{\omega,m} = \{f \in C_0(\mathbb{R})\colon \omega_m(f,t) = O(\omega(t)),\ t \in \mathbb{R}_+\}$ и $h^{\omega,m} = \{f \in H^{\omega,m}\colon \omega_m(f,t) = o(\omega(t)),\ t \to +0\}$ для $\omega \in \Phi$.

Теорема 1. *1) Если $f \in L(\mathbb{R})$, $\omega \in B_m \cap B$, $m \in \mathbb{N}$, и выполнены условия*

$$\int_0^y t^m f(t) e^{-ixt} dt = O(y^m \omega(y^{-1})),$$

$$\int_{-y}^0 t^m f(t) e^{-ixt} dt = O(y^m \omega(y^{-1})), \quad y > 0, \tag{1}$$

равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$, то $\hat f \in H^{\omega,m}$. 2) Если в п. 1) в правых частях равенств (1) условие $O(y^m\omega(y^{-1}))$ заменить условием $o(y^m\omega(y^{-1}))$, $y \to +\infty$, то $\hat f \in h^{\omega,m}$.

Теорема 2. *1) Если $m \in \mathbb{N}$, $f \in L(\mathbb{R})$, $\omega \in B_m \cap B$, $\hat f \in H^{\omega,m}$, и $t^{m+1} f(t)$ сохраняет знак на $\mathbb{R}$, то $\int_{|t|<y} |t^m f(t)| dt = O(y^m\omega(y^{-1}))$, $y > 0$. 2) Если в п. 1) условие $\hat f \in H^{\omega,m}$ заменить на $\hat f \in h^{\omega,m}$, то $\int_{|t|<y} |t^m f(t)| dt = o(y^m\omega(y^{-1}))$, $y \to +\infty$.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. общества. 1956. Т. 5. С. 483–522.

Волчков В. В, Волчков Вит. В. (Донецк, Украина)
valeriyvolchkov@gmail.com

ТРАНСМУТАЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

Хорошо известными примерами трансмутационных операторов являются классическое преобразование Абеля $f \to F_f$ и его обобщения (см. [1]). Соответствующее свойство трасмутации выглядит в этом случае в виде равенства $F_{Lf}(t) = \frac{d^2}{dt^2} F_f(t)$, где L — оператор Лапласа на евклидовом пространстве. Отображения такого типа играют важную роль в различных вопросах анализа, интегральной геометрии, дифференциальных уравнений и других областях.

Мы рассматриваем операторы с подобным свойством на различных однородных пространствах X, включающих римановы симметрические пространства и некоторые группы. Изучается их связь с разложениями по собственным функциям лапласиана и устанавливаются следующие свойства: обобщенное свойство гомоморфизма относительно соответствующих сверточных алгебр, трансмутационное свойство относительно подходящих дифференциальных операторов, связь между носителями образа и прообраза, гомеоморфизм между соответствующими пространствами распределений, явные формулы обращения, образы определенных специальных функций, неравенства нормативного типа, а также связь с двойственным преобразованием Абеля. Обобщенное свойство гомоморфизма является решающим. Оно связывает подходящим образом уравнения свертки на X с уравнениями свертки на вещественной оси. Это позволяет получить для таких уравнений аналоги многих известных одномерных результатов (см. [2–4]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Askey R. A., Koornwinder T. H., and Schempp W.* Special Functions: Group Theoretical Aspects and Applications. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1984.

2. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.

3. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. London: Springer, 2009.

4. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. Basel: Birkhäuser, 2013.

А. В. Гиль, В. А. Ногин (Ростов-на-Дону)
gil@sfedu.ru

КОМПЛЕКСНЫЕ СТЕПЕНИ ОБОБЩЕННОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Пусть

$$S_{\overline{\lambda}} = \Delta + i\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} - \sum_{k=1}^{n} i\lambda_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad m > 0 \tag{1}$$

— обобщенный оператор Шредингера в $\mathbb{R}^{n+1}$, с комплексными коэффициентами в главной части, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — оператор Лапласа, $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_k > 0$, $1 \leq k \leq n$. Комплексные степени оператора $S_{\overline{\lambda}}$ с отрицательными вещественными частями на функциях $\varphi(x) \in \Phi$ определяются как мультипликаторные операторы, действие которых в образах Фурье сводится к умножению на соответствующую степень символа рассматриваемого оператора:

$$(\widehat{S_{\overline{\lambda}}^{-\alpha/2}\varphi})(\xi) = \left(\xi_{n+1} - |\xi|^2 + i\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k^2\right)^{-\alpha/2} \widehat{\varphi}(x), \tag{2}$$

где $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$.

Получены интегральные представления комплексных степеней (2) в виде интегралов типа потенциала $(H_{\overline{\lambda}}^{\alpha}\varphi)(x)$ с нестандартной метрикой.

$$(H_{\overline{\lambda}}^{\alpha}\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} h_{\overline{\lambda}}(y)\varphi(x-y)dy,$$

$$h_{\overline{\lambda}}(y) = \frac{\exp(\frac{\alpha-n}{4}\pi i)}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(\frac{\alpha}{2})\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1-i\lambda_k}}(y_{n+1})_+^{\frac{\alpha-n-2}{2}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k y_k^2}{4(1+\lambda_k^2)y_{n+1}} + i\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k^2}{4(1+\lambda_k^2)y_{n+1}}\right\},$$

На функциях $\varphi(x) \in L_p$ отрицательные степени оператора $S_{\overline{\lambda}}$ понимаются как потенциалы $(H_{\overline{\lambda}}^{\alpha}\varphi)(x)$.

Показана ограниченность оператора $H_{\overline{\lambda}}^{\alpha}$ из L_p в L_q при $0 < \operatorname{Re}\alpha < n+2$, $1 \le p < \frac{n+2}{\operatorname{Re}\alpha}$, $q = \frac{(n+2)p}{n+2-p\operatorname{Re}\alpha}$.

В рамках метода АОО построено обращение потенциалов $H_{\overline{\lambda}}\varphi$, $\varphi \in L_p$, и дано описание образа $H_{\overline{\lambda}}(L_p)$ в терминах обращающих конструкций.

Д. В. Горбачев (Тула)
dvgmail@mail.ru

ОЦЕНКА ОПТИМАЛЬНОГО АРГУМЕНТА В ТОЧНОМ $L_2(\mathbb{R}^N)$-НЕРАВЕНСТВЕ ДЖЕКСОНА–СТЕЧКИНА [1]

Пусть $E_\nu(f)_2$ — величина наилучшего приближения функции $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ целыми функциями экспоненциального сферического типа $\nu > 0$, $\omega_M(\delta, f)_2 = \sup_{|t|\le\delta}\|\Delta_t^M f\|_2$, $\delta > 0$, — модуль непрерывности f, определяемый обобщенным разностным оператором $\Delta_t^M f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\mu_k f(x+kt)$, где $M = \{\mu_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условиям $0 < \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}|\mu_k| < \infty$, $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\mu_k = 0$.

Классическому оператору $\Delta_t^r f$, $r \in \mathbb{N}$, отвечает последовательность $M_r = \left\{(-1)^{r-k}\binom{r}{k} \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Положим $s_l = \sum\limits_{k=1}^{l}\varphi_l$, где $\varphi_l = -2\operatorname{Re}\widehat{\varphi}_l$, $\widehat{\varphi}_l = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\mu_k\overline{\mu_{k+l}}$, $l \in \mathbb{N}$.

---

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00045) и Фонда Дмитрия Зимина «Династия».

Теорема 1. *Если* $s_l \geq 0 \ \forall\, l \in \mathbb{N}$ $(*)$, *то для* $\forall\, f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$, *и* $\nu > 0$ *справедливо точное неравенство Джексона–Стечкина*

$$E_\nu(f)_2 \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mu_k|^2\right)^{-1/2} \omega_M\Big(\frac{2q_{n/2}}{\nu}, f\Big)_2,$$

где $q_{n/2}$ *— первый положительный нуль функции Бесселя* $J_{n/2}(u)$.

Для последовательности M_r имеем $\varphi_l = 2(-1)^{l-1}\binom{2r}{r-l}$, $l \in \mathbb{N}$, и условие $(*)$ выполнено. Отметим, что при $n = 1$ имеем $q_{1/2} = \pi$ и $\widehat{\varphi}_0 = \binom{2r}{r}$. Отсюда получаем классический одномерный результат Н. И. Черных в варианте для оси $\mathbb{R}$. Если $r = 1$, то, как было установлено автором, оптимальный аргумент равен $2q_{n/2-1}/\nu$ [1].

Теорема усиливает результаты работы [2]. Отметим также статью [3], где утверждения из [2] доказаны для более общего случая гармонического анализа Данкля.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Горбачев Д. В.* Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа // Мат. заметки. 2000. Т. 68, вып. 2. С. 179–187.

2. *Васильев С. Н.* Неравенство Джексона в $L_2(\mathbb{R}^N)$ с обобщенным модулем непрерывности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 93–99.

3. *Иванов А. В.*, *Иванов В. И.*, *Хуе Ха Тхи Минь.* Обобщенная константа Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ с весом Данкля // Изв. ТулГУ. Сер. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 74–90.

А. П. Гринько (Брест, Беларусь)
agrinko_1999@yahoo.com

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕНУЛЕВЫХ ПРИРАЩЕНИЙ С ЛОКАЛЬНОЙ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В работе рассматривается неоднородное дифференциальное уравнение ненулевых приращений на отрезке $[a+\varepsilon, b]$

$$D^{\alpha,-\varepsilon} f(x) = \psi(x,\varepsilon), \varepsilon > 0, 0 < \alpha < 1, \tag{1}$$

с правой частью $\psi(x,\varepsilon) \in H^{\lambda-\alpha}(a,b), \alpha < \lambda < 1$, где $H^{\lambda-\alpha}(a;b)$ пространство Гёльдера (см. [1]).

$$\left(D^{\alpha,-\varepsilon} f\right)(x) = \frac{f^{[\alpha]}(x) - f^{[\alpha]}(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\{\alpha\})\,\varepsilon^\alpha} +$$

$$+\frac{\{\alpha\}}{\Gamma\left(1-\{\alpha\}\right)}\lim_{\substack{\delta\to 0\\ H}}\left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x-\delta}\frac{f\left(x\right)-f\left(\tau\right)}{\left(x-\tau\right)^{1+\{\alpha\}}}d\tau,$$

$$0<\alpha, 0<\delta<\varepsilon, -\infty<a\leq x\leq b<\infty$$

— локальная дробная производная типа Маршо. Предельный переход определяется функциональным пространством H, в котором рассматриваем оператор.

Получены условия при которых функция $f\left(x\right)=I^{\alpha,-\varepsilon}\phi\left(x,\varepsilon\right)$ в пространстве суммируемых функций и доказана теорема.

Теорема. *Пусть функция* $\phi\left(x\right)\in H^{\lambda}\left[a,b\right]$, *где* $\lambda>0$ *представима в виде* $\phi\left(x\right)=I^{\alpha,-\varepsilon}f\left(x,\alpha\right), f\left(x,\alpha\right)\in L_1\left(a;b\right)$, *для любого* $0<\alpha<1$. *Тогда равенство*

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(D^{\alpha,-\varepsilon}\phi\right)\left(x\right)\underset{\left(L_1\left(a,b\right)\right)}{=}\phi\left(x\right)-\phi\left(x-\varepsilon\right)$$

выполняется по норме $L_1\left(a,b\right)$.

Используя теорему показано, что решение уравнения (1) удовлетворяющее начальным условиям: $f\left(x\right)=f_0\left(x\right)=I^{\alpha,-\varepsilon}\phi_0\left(x,\varepsilon\right), x\in\left[a,a+\varepsilon\right]$ единственно.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения // Мн., (1987).

А. В. Дергачев (Москва)
artem@dxdy.ru

ИНТЕГРАЛ ЧЕЗАРО–ПЕРРОНА И СВОЙСТВО МАРЦИНКЕВИЧА [1]

Действительная функция f называется интегрируемой по Перрону на отрезке $[a,b]$, если существуют сколь угодно равномерно близкие друг к другу функции Ψ и ψ такие, что нижняя производная функции Ψ больше f, а верхняя производная ψ меньше f; при этом общая нижняя грань приращений таких «мажорантных функций» Ψ и верхняя грань приращений «минорантных функций» ψ объявляется определенным интегралом Перрона f на $[a,b]$.

Классическая теорема Марцинкевича гласит, что для интегрируемости измеримой функции f по Перрону необходимо и достаточно, чтобы у нее существовала *хотя бы одна* непрерывная мажорантная функция и хотя бы одна непрерывная минорантная функция.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №14-01-00417) и программы «Ведущие научные школы РФ» (грант НШ-3682.2014.1).

Интеграл Чезаро–Перрона — «C_kP-интеграл» — введен Беркилем для натуральных значений параметра k путем замены обыкновенной производной на «чезаровскую производную»

$$C_kDF(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{k}{h^k}\int\limits_x^{x+h}(x+h-t)^{k-1}F(t)\,dt - F(x)}{h/(k+1)}.$$

Определение C_kP-интеграла при увеличении k получается все более и более общим, и даже при $k=1$ оно оказывается более широким, чем классический интеграл Перрона и тем более интеграл Лебега.

В.А. Скворцов показал, что при $k=1$ для C_kP-интегрируемости измеримой функции f необходимым и достаточным является существование C_k-непрерывных C_k-мажоранты и C_k-миноранты, обобщив тем самым теорему Марцинкевича.

Это утверждение удается перенести на все $k \geqslant 1$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Burkill J. C.* The Cesàro–Perron scale of integration // Proc. London Math. Soc. 1935. Т. 39, № 7. С. 541–552.

2. *Скворцов В.А.* Некоторые свойства CP-интеграла // Матем. сб. 1963. Т. 60, № 3. С. 304–324

3. *Дергачев А.В.* Некоторые свойства чезаровских производных высших порядков // Вестник Моск. ун-та. Матем. Механ. 2013. № 3. С. 3–10.

A. M. Jerbashian (Medellin, Colombia)
armen_jerbashian@yahoo.com

ON THE THEORY OF FUNCTIONS OF OMEGA-BOUNDED TYPE

The lecture is devoted to the contemporary development of the factorization theory of functions meromorphic in the disc, mainly constructed by M. M. Djrbashian [1, 2, 3]. Namely, the lecture describes the works [4 - 11] and some new ideas and problems related to the generalization and extension of the theory and some of its applications.

L I T E R A T U R E

1. *Djrbashian M. M.* Integral Transforms and Representations of Functions in the Complex Domain. Nauka, Moscow, 1966. (Russian)

2. *Djrbashian M. M.* Theory of Factorization and Boundary Properties of Functions Meromorphic in the Disc", in: Proceedings of the ICM, Vancouver, B.C., 1974, **2**, 197-202 (USA, 1975).

3. *Djrbashian M. M., Zakaryan V. S* Classes and Boundary Properties of Functions Meromorphic in the Disc. Nauka, Moscow, 1993. (Russian)

4. *Jerbashian A. M.* An Extension of the Factorization Theory of M. M. Djrbashian.//Izv. National Ac. of Sci. of Armenia, Matematika [Journal of

Contemporary Mathematical Analysis (National Academy of Sciences of Armenia)] **30** (2), 39–61 (1995).

5. *Jerbashian A. M.* Functions of α-Bounded Type in the Half-Plane. Advances in Complex Analysis and Applications. Springer. 2005.

6. *Jerbashian A. M.* On $A^p_{\omega,\gamma}$ spaces in the half-plane. //Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 158, Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland, 2005, P. 141 - 158.

7. *Jerbashian A. M., Jerbashian V. A.* Functions of ω-Bounded Type in the Half-Plane.//CMFT: Computational Methods and Function Theory. 2007. Vol. 7. no. 2, P. 205 - 238.

8. *Jerbashian A. M.* On the Theory of Weighted Classes of Area Integrable Regular Functions.// Complex Variables, 2005. Vol. 50. P. 155 - 183.

9. *Jerbashian A. M.* Orthogonal Decomposition of Functions Subharmonic in the Unit Disc.//Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 190, The Mark Krein Centenary Conference, Vol. 1: Operator Theory and Related Topics, P. 335-340, Birkhäuser. 2009.

10. *Rafayelyan S. G. Jerbashian , A. M.* On Unitary Operators in Weighted Spaces $A^2_\omega(\mathbb{C})$ of Entire Functions.//Methods of Functional Analysis and Topology. 2008. Vol. 14 (4). P. 380 - 385.

11. *Jerbashian A. M.* Biorthogonal Systems and Interpolation in Spaces A^p_ω over the upper half-plane//AMADE 2009, Cambridge Scientific Publishers Ltd, pp. 25-30, 2012.

A. M. Jerbashian (Medellin, Colombia)
armen_jerbashian@yahoo.com

BANACH SPACES OF GREEN POTENTIALS

The report is describing some results related to the work [1] giving an universal orthogonal decomposition for all functions delta-subharmonic in the unit disc. The following theorem gives an analog of the classical Blaschke condition.

Theorem 1. *The Green potential*

$$P(z) = -\int_{|\zeta|<1} \log\left|\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}\right| d\nu(\zeta)$$

generated by a Borel measure $\nu \geq 0$ satisfies the condition

$$\Phi(P) \equiv \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \left[P(re^{i\vartheta})\right]^2 d\vartheta < +\infty$$

if and only if

$$\int_{|\zeta_1|<1}\int_{|\zeta_2|<1} \left(\int_0^{1-|\zeta_1|^2} dx \int_0^{1-|\zeta_2|^2} \frac{dy}{x+y}\right) d\nu(\zeta_1) d\nu(\zeta_2) < +\infty. \qquad (1)$$

The analog (1) of the Blaschke condition with the complete variation of a sign-measure ν defines the square $\|P\|^2$ of the norm in a Banach space of Green charges. Besides, the set of functions $u(z) = U(z) + P(z)$ delta-subharmonic and bounded type in $|z| < 1$, which satisfy the condition

$$\|u\| = \|U\|_{h^2} + \|P\| < +\infty$$

is a Banach space.

LITERATURE

1. *Jerbashian A. M.* Orthogonal Decomposition of Functions Subharmonic in the Unit Disc.//Operator Theory: Advances and Applications, **190**, The Mark Krein Centenary Conference, **1**: Operator Theory and Related Topics, P. 335 - 340. Birkhäuser. 2009.

A. V. Dyachenko (Berlin)
dyachenk@math.tu-berlin.de, diachenko@sfedu.ru

ZEROS OF UNIVARIATE FUNCTIONS OF SPECIAL FORM [1]

During my talk I would like to present one technique of localizing function values in the complex plane $\mathbb{C}$. The underlying idea is related to the theory of meromorphic mappings of the upper half of the complex plane into itself (the so-called $\mathcal{R}$- or Nevanlinna functions).

In particular, the technique is applicable to a special class of functions, pointed out by conditions on their odd and even parts. These conditions have an alternative statement in terms of their Taylor coefficients. It turns out that zeros of members of this class are localized in a very special way. It follows as a consequence that functions like

$$F(z; iq) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (iq)^{\frac{k(k-1)}{2}} z^k, \text{ where } q \in [-1, 1], \text{ and}$$

$$\Theta_0(z; iq) = \sum_{k=0}^{\infty} (iq)^{\frac{k(k-1)}{2}} z^k, \text{ where } q \in (-\tilde{q}, \tilde{q}), \ \tilde{q} \approx 0.5561,$$

have zeros which are simple and distinct in absolute value. The former function $F(z; iq)$ gives the solution to the functional-differential problem

$$F'(z) = F(iqz), \quad F(0) = 1,$$

[1] This work was financially supported by the European Research Council under the European Union's Seventh Framework Programme (FP7/2007–2013)/ERC grant agreement no. 259173.

while the latter is the partial theta function. Both F and Θ_0 appear in problems of statistics and combinatorics (see *e.g.* [1,2]).

REFERENCES

1. *Sokal A. D.* Some wonderful conjectures (but almost no theorems) at the boundary between analysis, combinatorics and probability... // Available online at `http://ipht.cea.fr/statcomb2009/misc/Sokal_20091109.pdf` and at `http://www.maths.qmul.ac.uk/~pjc/csgnotes/sokal/` .

2. *Sokal A. D.* The leading root of the partial theta function // Advances in Mathematics 2012. Vol. 229. № 5. pp. 2603–2621.

Н. С. Иванисенко (Донецк, Украина)
n.s.ivanisenko@gmail.com

ЛОКАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ ПРОБЛЕМЫ ПОМПЕЙЮ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово пространство размерности $n \geqslant 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $\mathbf{M}(n)$ — группа движений $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{Mot}(A, B) = \{\lambda \in \mathbf{M}(n) \colon \lambda A \subset B\}$ — часть группы движений, оставляющая A внутри B. $\mathbb{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| < R\}$ — шар радиуса R.

Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю в $\mathbb{R}^n$, если всякая локально суммируемая функция $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для которой $\int_{\lambda A} f(x)\,dx = 0$ при всех $\lambda \in \mathbf{M}(n)$, равна нулю почти всюду. Классическая проблема Помпейю состоит в описании класса $\mathrm{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ таких множеств A.

Приведем одну из возможных постановок локального варианта указанной проблемы. Пусть функция f локально суммируема в шаре $\mathbb{B}_R$ и равенство $\int_{\lambda A} f(x)\,dx = 0$ выполняется при всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(A, \mathbb{B}_R)$. Если из этого условия следует, что $f = 0$ в $\mathbb{B}_R$ почти всюду, будем говорить, что A является множеством Помпейю в $\mathbb{B}_R$ и обозначать $A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{B}_R)$. Для любого $A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ это имеет место, если размеры $\mathbb{B}_R$ достаточно велики по сравнению с A, см. [1]. В связи с этим Волчковым В.В. поставлена следующая

Проблема. *Для данного A найти* $\mathcal{R}(A) = \inf\{R > 0 : A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{B}_R)\}$.

Величину $\mathcal{R}(A)$ естественно называть экстремальным радиусом Помпейю (или просто радиусом Помпейю) для множества A.

Пусть $h \in (0; \sqrt{3}/2)$ – фиксированное число. Рассмотрим точки $z_1(0; 0)$, $z_2(\sqrt{3}/2; -1/2)$, $z_3(\sqrt{3}/2 - h; 0)$, $z_4(\sqrt{3}/2; 1/2)$. Невыпуклый четырехугольник $A(h)$ — замыкание внутренности ломаной $z_1 z_2 z_3 z_4 z_1$. Для каждого $h \in (0; \sqrt{3}/2)$ получено решение локального варианта проблемы Помпейю для данного множества в явном виде.

Теорема. *Для каждого $h \in (0; \sqrt{3}/2)$ верно равенство*

$$\mathcal{R}(A(h)) = \begin{cases} \sqrt{3}/2 - h, & \text{если } h \in (0; \sqrt{3}/6); \\ \sqrt{h^2 + 1/4}, & \text{если } h \in [\sqrt{3}/6, \sqrt{3}/2). \end{cases}$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. Birkhäuser, 2013. 592 p.

E. R. Liflyand (Ramat-Gan, Israel)
liflyand@gmail.com

FOURIER TRANSFORM VERSUS HILBERT TRANSFORM

We present several results in which the interplay between the Fourier transform and the Hilbert transform is of special form and importance.

1. In 50-s (Kahane, Izumi-Tsuchikura, Boas, etc.; see [1]), the following problem in Fourier Analysis attracted much attention: Let $\{a_k\}$, $k = 0, 1, 2...$, be the sequence of the Fourier coefficients of the absolutely convergent sine (cosine) Fourier series of a function $f : \mathbb{T} = [-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$, that is $\sum |a_k| < \infty$. Under which conditions on $\{a_k\}$ the re-expansion of $f(t)$ ($f(t) - f(0)$, respectively) in the cosine (sine) Fourier series will also be absolutely convergent?

We solve a similar problem for functions on the whole axis and their Fourier transforms. Generally, the re-expansion of a function with integrable cosine (sine) Fourier transform in the sine (cosine) Fourier transform is integrable if and only if not only the initial Fourier transform is integrable but also the Hilbert transform of the initial Fourier transform is integrable.

2. The following result is due to Hardy and Littlewood: If a (periodic) function f and its conjugate $\widetilde{f}$ are both of bounded variation, their Fourier series converge absolutely.

We generalize the Hardy-Littlewood theorem (joint work with U. Stadtmüller [2]) to the Fourier transform of a function on the real axis and its modified Hilbert transform. The initial Hardy-Littlewood theorem is a partial case of this extension, when the function is taken to be with compact support.

3. These and other problems are integrated parts of harmonic analysis of functions of bounded variation. We have found the maximal space for the integrability of the Fourier transform of a function of bounded variation. Along with those known earlier, various interesting new spaces appear in this study. Their inter-relations lead, in particular, to improvements of Hardy's inequality.

There are multidimensional generalizations of these results.

LITERATURE

1. *Kahane, J.-P.* Séries de Fourier absolument convergentes. Berlin: Springer, 1970.

2. *Liflyand, E., Stadtmúller, U.* On a Hardy-Littlewood theorem. Bull. Inst. Math. Acad. Sinica (New Series). 2013. V. 8. P. 481–489.

А. Н. Новицкая (Казахстан, Актобе)
nannanovitskaya@mail.ru

ИНТЕГРАЛЫ ТИПА ЭЙЛЕРА ДЛЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ $F_8^{(4)}$[1]

Разнообразие прикладных задач, приводящих к гипергеометрическим функциям, вызвало быстрый рост числа функций, применяемых в приложениях. Например, в монографии [1] определены и изучены области сходимости 205 гипергеометрических функции от трех переменных. В этой монографии также можно найти ссылки на научные работы до 1985 года, посвященных изучению свойств гипергеометрических функций. Поскольку число гипергеометрических функций велико, полное множество их преобразований исчисляется сотнями. Лучшим средством для вывода преобразований являются интегральные представления типа Эйлера рассматриваемых функций. В данном докладе для гипергеометрической функции от четырех переменных $F_8^{(4)}$ [2]:

$$F_8^{(4)}\left(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3, c_4; x, y, z, t\right) =$$

$$= \sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{p+q}(b_1)_{m+p}(b_2)_n(b_3)_q}{(c_1)_m(c_2)_n(c_3)_p(c_4)_q} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!}$$

доказываются несколько интегральных представлений типа Эйлера. Нахождения интегральных представлений для более простых гипергеометрических функций, рассмотрены в работах [3-4].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Srivastava H. M., Karlsson P. W.* Multiple Gaussian Hypergeometric Series. Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), Wiley, New York, Chichester, Brisbane and Toronto, 1985. 427 p.

2. *Sharma C., Parihar C. L.* Hypergeometric functions of four variables // Indian Acad. Math. 1989. № 11. P. 121–133.

3. *Choi J., Hasanov A., Turaev M.* Integral Representations for Srivastava's Hypergeometric Functions // Honam Mathematical J. 2012. T. 34, № 4. P. 473–482.

4. *Choi J., Hasanov A., Srivastava H. M.* Relations between Lauricella's triple hypergeometric function and the Srivastava function // Integral Transforms and Special Functions. Vol. January 2012. T. 34, № 1. P. 69–82.

[1] Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова.

Е. В. Овчаренко (Киев, Украина)
lena_rum@ukr.net

ДЕЙСТВИЕ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ОБОБЩЕННЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Получим функциональные соотношения, демонстрирующие действие левосторонней дробной производной Риманна-Лиувилля на обобщенную по Райту гипергеометрическую функцию Гаусса.

$$
{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z) \equiv {}_2F_1^{\tau,\beta}(z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\times
$$

$$
\times \int_0^1 t^{b-1}\,(1-t)^{c-b-1}\,{}_2\Psi_1\left[\begin{array}{c} (a,1)\,;(c,\tau)\,; \\ (c,\beta)\,; \end{array} \; |zt^{\tau}\right] dt, \tag{1}
$$

где параметры удовлетворяют такие условия: $\{a,b,c\} \in C, Rec > Reb > 0$, $\{\tau,\beta\} \subset R, \tau > 0, \beta > 0, \beta-\tau > 0$. Если положить $\beta = \tau$ в формуле (1), то получим $\tau-$обобщенную гипергеометрическую функцию Гаусса [1]:

$$
{}_2F_1^{\tau}(a,b;c;z) = \frac{\Gamma\,(c)}{\Gamma\,(b)\,\Gamma\,(c-b)} \int_0^1 (1-x)^{c-b-1}\,x^{b-1}\,(1-zx^{\tau})^{-a}\,dx.
$$

При $\beta = \tau = 1$ имеем классическую функцию Гаусса ${}_2F_1(a,b;c;z)$ [2].

Лемма. Пусть $\alpha \in R_+ = [0;+\infty)$, $\{a,b,c,\omega,\mu\} \in C, Rec > Reb > 0$, $Rea > 0, Re\mu > 0$, $\beta-\tau > 0$. Тогда для $x > \alpha$ при условии $\left|\omega(x-\alpha)^{\beta}\right| < 1$ имеет место формула:

$$
D_{\alpha+}^{\mu,\nu}\left[(x-\alpha)^{c-1}\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\omega(x-\alpha)^{\beta})\right] =
$$

$$
= \frac{(x-\alpha)^{c-\mu-1}\Gamma(c)}{\Gamma(c-\mu)}\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c-\mu;(x-\alpha)^{\beta}),
$$

где $\left(D_{\alpha+}^{\mu,\nu}f\right)(x) = (I_{\alpha+}^{\nu(1-\mu)}\frac{d}{dx}(I_{\alpha+}^{(1-\nu)(1-\mu)}f))(x)$, $0 < \mu < 1; 0 \le \nu \le 1$,

$$
(I_{\alpha+}^{\mu}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_{\alpha}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\mu}}dt, x > \alpha, \mu \in C, Re(\mu) > 0.
$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *N.O. Virchenko, S.L. Kalla, A. Al-Zamel* Some results on a generalized hypergeometric function // Integral Transf. and Spec. Funct. 2001. Vol. 12, № 1. C. 89–100.

2. *Бейтмен Г. Эрдеи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965. Т. 1, 296 с.

Очаковская О. А. (Донецк, Украина)
ochakovskaja@yandex.ua

ФУНКЦИИ С НУЛЕВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПО ШАРАМ

Пусть $V_r(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 2$ – множество функций $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$, имеющих нулевые интегралы по всем шарам фиксированного радиуса r. Класс $V_r(\mathbb{R}^n)$ и различные его обобщения изучались во многих работах (см., например, [1]-[3] и библиографию в этих работах). Известно, что функции класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ не могут быстро убывать на бесконечности. Однако, если потребовать убывание только по части переменных, ситуация меняется. Можно показать (см. [4]), что существует ненулевая гладкая функция класса $V_r(\mathbb{R}^n)$, которая быстро убывает на бесконечности по переменным $x_1, \ldots,$ x_{n-1}, что компенсируется экспоненциальным ростом этой функции по переменной x_n. В работе [4] получена точная теорема о допустимой скорости такого убывания функции.

Здесь мы рассматриваем вырожденные функции класса $V_r(\mathbb{R}^n)$. Показано, что для таких ненулевых функций скорость допустимого убывания существенно снижается.

Теорема. *Пусть* $j = 1, \ldots, m$. *Пусть также* $f \in V_r(\mathbb{R}^n)$ *и существуют функции* $v_j : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{C}$ *и линейно независимые функции* $u_j \in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ *такие, что*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{m} u_j(x_1, \ldots, x_{n-1})\, v_j(x_n)\,. \qquad (1)$$

Тогда $f = 0$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.

2. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. London: Springer, 2009.

3. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. Basel: Birkhäuser, 2013.

4. *Очаковская О. А.* Точные характеристики допустимой скорости убывания ненулевой функции с нулевыми шаровыми средними // Мат. сб. 2008. т. 199. № 1. с. 47–66

J. E. Restrepo (Medellin, Colombia)
cocojoel89@yahoo.es

DELTA-SUBHARMONIC FUNCTIONS OF OMEGA-BOUNDED TYPE IN THE HALF-PLANE

The talk describes some recent results on the theory of delta-subharmonic functions of omega-bounded type in the half-plane of the complex plane.

L I T E R A T U R E

1. *Jerbashian A. M.* Functions of α-Bounded Type in the Half-Plane. Advances in Complex Analysis and Applications. Springer. 2005.

2. *Jerbashian A. M., Restrepo J. E.* Riesz Type Minimal Omega-Representations in the Half-plane.//Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications. 2012, Vol. 17 (1–2). P. 1–37.

В. Г. Рябых, Г. Ю. Рябых (Ростов-на-Дону)
ryabich@aaanet.ru

ЭКСТРЕМАЛИ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА В ПРОСТРАНСТВАХ A_p И H_p[1]

Основные определения и обозначения. $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$; $T = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$; A_p *пространство Бергмана: множество функций* $x(z)$*, аналитических в* D*, являющихся подпространством* $L_p(D), 0 < p < \infty$; H_p *– обычное пространство Харди;* f *– экстремальный элемент линейного непрерывного функционала* $l(f) : \{\|f\| \leq 1, l(f) = \|l\|\}$, $l_\omega(x) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_D x\bar{\omega} d\sigma$.

Как известно, нахождение экстремальных элементов линейных функционалов над пространствами Бергмана и Харди — трудная нелинейная задача, подходы к полному решению которой в H_1 начали появляться только в последние годы [1,2]. Полное решение приведено в [8].

Поэтому, исследования основоположников этой тематики Я. Л. Геронимуса [3], A. J. Macintyre, W. W. Rogosinski [4] начались с нахождения связи свойств экстремального элемента со свойствами ω функционала $l_\omega \in H_p^*$.

В 1972 г. в [5] была исследована зависимость гладкости экстремального элемента от гладкости ω при $l_\omega \in H_1^*$. В 2006 г. [6] аналогичные результаты были получены и в $H_p, 1 < p < \infty$.

В [7] было установлено, что для экстремального элемента f функционала $l_\omega(x) \in A_p^*, 1 < p < \infty$, из $\omega(z) \in H_q$ вытекает $f \in H_p$ $(1/p + 1/q = 1)$.

В [8] доказано: из $\omega \in C^1(T)$ следует $f \in H_1$.

Ferguson в [9, 10] показал, что, если ω_k (тейлоровы коэффициенты $\omega(z)$) достаточно малы, то экстремальный элемент функционала $l_\omega(x) \in A_q^*, 1 < q < \infty$, принадлежит H_∞.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00065).

Авторами [8] доказано, что для $l_\omega \in H_p^*$, $1 < p < \infty$, с $\omega(z)$, аналитичном в $D_R, R > 1$, экстремальный элемент тоже аналитичен в D_R.

В последнее время удалось найти экстремальный элемент и вычислить норму линейного функционала $l(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k x(a_k) \in H_p^*$, $A_k \in \mathbb{C}$, $a_k \in D$, $1 < p < \infty$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Hayshi E.* The solution set extremal problem in H_1 // Proc. Amer. Math. Soc. 1985. 3, № 3. P. 690–696.

2. *Рябых В. Г.* Необходимое и достаточное условие существования линейного функционала над H_1 // СМЖ. 2007. Т. 48, № 6. С. 1351–1360.

3. *Геронимус Я. Л.* О проблеме коэффициентов для ограниченных функций // ДАН СССР. 1937. Т. 14, № 3. С. 95–96.

4. *Macintyre A. J., Rogosinski W. W.* Extremum problems in the theory of analytic functions // Acta Math. 1950. № 82. P. 275–325.

5. *Carleson L., Jacobs S.* Best approximation by analytic functions // Arciv. Math. 1972. № 10. P. 219–229.

6. *Рябых В. Г.* Приближение аналитических функций неаналитическими // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 2. С. 86–94.

7. *Рябых В. Г.* Экстремальные задачи для суммируемых аналитических функций // СМЖ. 1986. Т. 27, № 3. С. 212–217.

8. *Пожарский Д. А., Рябых В. Г., Рябых Г. Ю.* Интегральные операторы в пространствах аналитических функций и близких к ним. Ростов-на-Дону: ИЦ ДГТУ, 2011. 183 с.

9. *Ferguson T.* Continuity of extremal elements in uniformly convex spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 2009. V. 137, № 8. P. 2645–2653.

10. *Ferguson T.* Extremal problems in Bergman space and extension of Ryabykh's theorem. A dissertation submitted in partial fulfilment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy (Mathematics). Michigan.: University of Michigan, 2011. 78 p.

И. М. Савостьянова, Вит. В. Волчков (Донецк, Украина)
cavost@mail.ru, v.volchkov@donnu.edu.ua

СТИРАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПО ШАРАМ

Одной из проблем теории отображений является проблема «устранимости» , которая состоит в следующем. Пусть M и N – многообразия, D – область в M и $E \subset D$ – замкнутое относительно D множество. Спрашивается, в каком случае любое отображение $f : D \setminus E \to N$ из заданного класса можно продолжить до отображения $F : D \to N$ с сохранением класса? Если указанное продолжение существует, то множество E называют устранимым множеством в рассматриваемом классе отображений.

Проблема устранимости исследовалась многими авторами в различных постановках (см. [1] – [3] и библиографию).

Рассматривая функции на двумерной единичной сфере с выколотой точкой, имеющие нулевые интегралы по всем допустимым «полусферам», найдено условие, при котором точка является устранимым множеством для класса таких функции. Установлено также, что полученное условие нельзя опустить или существенно улучшить.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Volchkov V. V.* Integral geometry and convolution equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. 454 p.

2. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. London: Springer, 2009. 671 p.

3. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Offbeat integral geometry on symmetric spaces. Basel: Birkhäuser, 2013. 592 p.

О. Д. Трофименко (Донецк, Украина)
odtrofimenko@gmail.com

ОПИСАНИЕ НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В работе рассматривается специальный класс полианалитических функций, удовлетворяющих интегральному уравнению со средним значением. Получен вид соответствующей функции при некоторых условиях на полигармоничность и полианалитичность.

Теорема 1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $s \in \{0, .., m-1\}$ - фиксированные, B_R – открытый круг на комплексной плоскости радиуса R и с центром в точке 0. Тогда $f \in C^{2m-s}(B_R)$ удовлетворяет равенству*

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{m-s}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{m} f = 0$$

тогда и только тогда, когда при всех $k \in \mathbb{Z}$ и $[0, R)$ выполняется равенство

$$f_k(\rho) = \sum_{p+k\geq 0, 0\leq p\leq s-1} a_{k,p}\rho^{2p+k} + \sum_{p=0}^{m-s-1} b_{k,p}\rho^{2p+s+|k+s|},$$

где $f_k(\rho)$ – коэффициент соответствующего ряда Фурье функции f и $a_{k,p}, b_{k,p} \in \mathbb{C}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/Boston/London, 2003.

2. *Волчков В. В.* Новые теоремы о среднем для полианалитических функций. // Математичнские заметки. 1994. Т. 56, № 3. С. 20–28.

3. *Трофименко О. Д.* Two -radii theorem for solutions of some mean value equations. // Matematychni Studii. 1994. Т. 40, № 2. С. 137–143.

А. Ю. Трынин. (Саратов)
tayu@rambler.ru

О ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОТРЕЗКЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ СИНКОВ [1]

Э. Борель и Э.Т. Уиттекер ввели понятие кардинальной функции и усечённой кардинальной функции, сужение на отрезок $[0,\pi]$ которых выглядят так:

$$L_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(nx-k\pi)}{nx-k\pi}f\Big(\frac{k\pi}{n}\Big)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\sin nx}{nx-k\pi}f\Big(\frac{k\pi}{n}\Big)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}l_{k,n}(x)f\Big(\frac{k\pi}{n}\Big). \qquad (1)$$

Оператор (1) обладает интерполяционным свойством Лагранжа, т.е. $L_n(f,\frac{k\pi}{n})=f(\frac{k\pi}{n})$, для любых $0\le k\le n$, $n\in\mathbb{N}$. В следующих теоремах дан ответ на вопрос: можно ли, отказавшись от интерполяции, построить оператор, значениями которого служат линейные комбинации синков $l_{k,n}$, $0\le k\le n$, $n\in\mathbb{N}$, позволяющий аппроксимировать произвольную непрерывную функцию равномерно на всём отрезке $[0,\pi]$.

Будем обозначать $C_0[0,\pi]$ пространство непрерывных, исчезающих на концах отрезка, функций, снабжённое чебышевской нормой, то есть $C_0[0,\pi]=\{f : f\in C[0,\pi],\ f(0)=f(\pi)=0\}$.

Теорема 1. *Система* $\{l_{k,n}\}_{k=0,n=1}^{n,\ \infty}$ *полна в* $C_0[0,\pi]$. *А система функций* $\{1,x\}\cup\{l_{k,n}\}_{k=0,n=1}^{n,\ \infty}$ *полна в* $C[0,\pi]$.

Более того, никакими линейными комбинациями функций системы $\{l_{k,n}\}_{k=0,n=1}^{n,\ \infty}$ невозможно приблизить произвольный элемент пространства $C[0,\pi]$.

Теорема 2. *Линейные оболочки систем функций*

$$\{l_{k,n}\}_{k=0}^{n},\ n\in\mathbb{N}$$

не плотны в $C[0,\pi]$.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00102).

B. N. Khabibullin, G. R. Talipova (Ufa)
khabib-bulat@mail.ru saye@bk.ru

ON THE COMPLETENESS OF EXPONENTIAL SYSTEMS IN SPACES OF FUNCTIONS ON A SEGMENT [1]

Denote by $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, and $\mathbb{C}$ the sets of natural, real and complex numbers. Let $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ be a sequence of points from $\mathbb{C}$ without accumulation points in $\mathbb{C}$ and $\nu_\Lambda(S) = \sum_{\lambda_k\in S} 1$ be *the counting measure* of Λ, $S \subset \mathbb{C}$. Denote by $R\mathcal{P}_0$ a class of all *continuous functions* $\phi \geq 0$ on $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ with

- *a finiteness condition* $\phi(x) \equiv 0, \quad |x| \geq R_\phi > 0$;
- *a semi-normalization condition* $\limsup\limits_{0\neq x\to 0} \dfrac{\phi(x)}{\log\bigl(1/|x|\bigr)} \leq 1$;
- *an integral mean value inequality*

$$\phi(x) \leq \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x+t)\frac{1}{t}\,\log\left|\frac{r+t}{r-t}\right| dt,\ \forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, 0<r<r_x.$$

Denote by $I_d \subset \mathbb{R}$ a segment $[a,b]$, $d = b-a$. For I_d, we consider exponential systems with sequence of exponents $i\Lambda := \{i\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

$$\mathrm{Exp}^{i\Lambda} = \Bigl\{x \mapsto x^{p-1}e^{i\lambda_k x}\colon \lambda_k\in\Lambda,\ k\in\mathbb{N}\ni p\leq \nu_\Lambda\bigl(\{\lambda_k\}\bigr),\ x\in I_d\Bigr\}.$$

Theorem (cf. [1]). *Let $0\notin\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $d>0$. If the value*

$$\sup_{\phi\in R\mathcal{P}_0}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{\pi}\lim_{0<\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathrm{Im}\,\frac{1}{t-\lambda_k-i\varepsilon}\right|\phi(t)\,dt - \frac{d}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)\,dx\right)$$

(here the limit of integral is the Poisson integral of ϕ) is not equal $+\infty$, then the system $Exp^{i\Lambda}$ is complete in $C(I_d)$ and $L^p(I_d)$, $p\geq 1$. Inversely, if this value is equal $+\infty$, then, for any pair different points $\{\lambda',\lambda''\}\subset\Lambda$, the system $Exp^{i\Lambda\setminus\{i\lambda'\}}$ is incomplete in $C(I_d)$ and $L^p(I_d)$ for $p\geq 2$, and the system $Exp^{i\Lambda\setminus\{i\lambda',\,i\lambda''\}}$ is incomplete in $L^p(I_d)$ for $1\leq p<2$.

From our theorem we can obtain both many basic classical known theorems in this direction for spaces $C(I_d)$ and $L^p(I_d)$ (for example, the Berling–Malliavin Theorem on radius of completeness), and new results.

[1] This reseach was supported by the RFBR (grant № 13-01-00030-a).

М. М. Цвиль (Ростов-на-Дону)
tsvilmm@mail.ru

О СХОДИМОСТИ ПРОСУММИРОВАННЫХ КРАТНЫХ ОБОБЩЕННЫХ РЯДОВ ФАБЕРА

Пусть $D^+ = D_1^+ \times D_2^+ \times \ldots \times D_n^+$, $D^- = D_1^- \times D_2^- \times \ldots \times D_n^-$ — полицилиндрическая область в n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ с остовом $\sigma = L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_n$; где D_k^+ — конечная односвязная область в плоскости C^1, ограниченная спрямляемой жордановой кривой L_k; D_k^- — ее дополнение до всей плоскости; функция $z_k = \psi_k(w_k)$ конформно и однолистно отображает внешность единичного круга $\{|w_k| > 1\}$ на область D_k^- при условиях $\psi_k(\infty) = \infty$, $\psi_k'(\infty) > 0$; функция $w_k = \varphi_k(z_k)$ — обратная к $\psi_k(w_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Обозначим через T^n — единичный тор; $\Pi^n = \{\theta \in \mathbb{R}^n\colon -\pi \leqslant \theta_k \leqslant \pi,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$ — n-мерный куб; $\Pi_+^n = \{\theta \in \mathbb{R}^n\colon 0 \leqslant \theta_k \leqslant \pi\}$; Z^n — множество векторов $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$ с целочисленными координатами; Z_+^n — множество векторов $\ell \in Z^n$ с неотрицательными координатами.

С помощью весовой функции n комплексных переменных $g(z)$, аналитической в области D^-, отличной от нуля в $\overline{D}^-$ и $g(\infty) > 0$, образуем производящую функцию (см. [1]) для системы обобщенных полиномов $\Phi_\ell(z, g)$ n-переменных:

$$\mathcal{G}(z, w) = \frac{(\Psi^* g)(w)\Psi'(w)}{(\Psi(w) - z)^I} = \sum_{\ell \in Z_+^n} \frac{\Phi_\ell(z, g)}{w^{\ell + I}}, \tag{1}$$

где $I = (1, 1, \ldots, 1)$,$w^{\ell+I} = w_1^{\ell_1+1} \cdot w_2^{\ell_2+1} \cdot \ldots \cdot w_n^{\ell_n+1}$,

$$(\Psi^* g)(w) = g(\psi_1(w_1), \psi_2(w_2), \ldots, \psi_n(w_n)),$$

$\Psi'(w) = \psi_1'(w_1) \cdot \psi_2'(w_2) \cdot \ldots \cdot \psi_n'(w_n)$.

Далее рассмотрим в D^+ функцию $f(z)$ n комплексных переменных, которая представима интегралом типа Коши с плотностью $\tau(\zeta)$. В работе [1] построен аналог формулы суммирования В. К. Дзядыка обобщенных рядов Фабера n переменных, а именно:

$$P_{\Omega_+}(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Pi_+^n} S_\Omega(\theta) d\theta \int\limits_{T^n} \frac{\tau[\psi(te^{-i\theta})]}{g[\psi(te^{-i\theta})]} \mathcal{G}(z, t)\, dt =$$

$$= \sum_{\ell \in \Omega_+} \lambda_\ell a_\ell \Phi_\ell(z, g), \quad z \in D^+,\ \Omega_+ = \Omega \cap Z_+^n, \tag{2}$$

где $S_\Omega(\theta) = \sum\limits_{\ell \in \Omega} \lambda_\ell e^{i|\ell\theta|}$ — произвольный тригонометрический полином n переменных, где Ω — некоторое конечное подмножество решетки Z^n.

Формула (2) преобразует тригонометрический полином в алгебраический $P_{\Omega_+}(z)$, который получается из кратного обобщенного ряда Фабера функции $f(z)$ с помощью коэффициентов суммирования $\{\lambda_\ell\}$. В случае n переменных, когда в качестве $S_\Omega(\theta)$ можно брать различные частичные суммы кратного ряда Фурье, можно получать с помощью формулы (2) различные алгебраические полиномы и следовательно, оценки скорости сходимости просуммированных по прямоугольникам, квадратам кратных обобщенных рядов Фабера внутри D^+.

Рассмотрим частный случай, когда $g(z) = \varphi_1'(z_1)\varphi_2'(z_2)\ldots\varphi_n'(z_n)$. В этом случае для $f(z)$, заданной интегралом типа Коши, будет справедлива теорема.

Теорема. *Если последовательность четных ядер, построенная из прямоугольных частичных сумм кратного ряда Фурье функции $S(\theta)$, удовлетворяет условиям*

$$\int\limits_{\Pi_+^n} |S_m(\theta)|\, d\theta \leqslant c_1, \quad \int\limits_{\Pi_+^n} \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_n^2}\, |S_m(\theta)|\, d\theta \leqslant \frac{c_1}{M},$$

$M = \min(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, *а функция*

$$\tau_1(t) \equiv (\psi^*\tau)(t)\psi_1'(t_1)\psi_2'(t_2)\ldots\psi_n'(t_n)$$

непрерывна на торе T^n, то последовательность $P_m(z)$, построенная с помощью таких ядер, сходится равномерно внутри D^+ к функции $f(z)$, причем

$$|f(z) - P_m(z)| \leqslant \frac{c_3}{\rho_1\rho_2\ldots\rho_n}\omega\left(\frac{1}{M}, \tau_1\right), \quad z \in F,$$

$F = F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Цвиль М. М.* О суммировании кратных обобщенных рядов Фабера // Тез. докл. Международного семинара «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения». Ростов-на-Дону, 2013. С. 42–43.

А. Ф. Чувенков (Ростов-на-Дону)
chuvenkovaf@mail.ru

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ РАСШИРЕНИЯ ВЕСОВОГО ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА ДО ГРАНД-ПРОСТРАНСТВА

В русле идей статей [1, 2, 4] результаты расширения пространств Лебега переносятся на весовые пространства Орлича.

Рассматривается класс функций $f(x)$ на произвольном открытом множестве $\Omega \subset R^n$ с неотрицательным весом $\omega(x)$

$$K_M(\Omega, \omega) = \left\{ f\colon \rho(f, M, \omega) = \int_\Omega M(|f(x)|)\omega(x)\,dx < \infty \right\}$$

и пространство Орлича с нормой Люксембурга, порождаемые квазистепенной N-функцией $M(u)$ в смысле статьи [3]. Обозначим через

$$p = \min\{\varliminf_{u \to 0} \varphi_M(u), \varlimsup_{u \to 0} \varphi_M(u)\},$$

где $\varphi_M(u) = \frac{uM'(u)}{M(u)}$.

Теорема. *Чтобы была справедлива оценка,* $1 < p < \infty$*,*

$$\sup_{0<\delta<1-1/p} \Big[\rho(f, M^{1-\delta}, \delta M^{\delta}(a)\omega)\Big]^{\frac{1}{1-\delta}} \leqslant c_{p,a}\rho(f, M, \omega), \ \ f \in K_M(\Omega, \omega),$$

с точной константой $c_{p,a}$ *необходимо и достаточно, чтобы положительный вес* $a \in K_M(\Omega, \omega)$.

Через $L^a_{M)}(\Omega, \omega)$ обозначим весовое гранд-пространство функций из весового пространства Орлича $L_M(\Omega, \omega)$: $\|f\|_{L^a_{M}(\Omega,\omega)} =$

$$= \left\{ \sup_{0<\delta<1-1/p} \left[\inf_{k(\sigma)>0} : \rho\left(\frac{f}{k(\sigma)}, M^{1-\delta}, \delta M^{\delta}(a)\omega\right) \leqslant 1 \right]^{\frac{1}{1-\delta}} < \infty \right\}.$$

Введенное весовое гранд-пространство Орлича $L^a_{M)}(\Omega, \omega)$ является банаховым и непрерывно вложено в весовое пространство Орлича $L_M(\Omega, \omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Iwaniec T., Sbordone C.* On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses // Arch. Rational Mech. Anal. 1992. № 119. P. 29–143.

2. *Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M.* On Iwanies-Sbordone spaces on sets which may have infinite measure // Azerb. Journal of Math. 2011. V. 1, № 1. P. 67–84.

3. *Симоненко И. Б.* Интерполяция и экстраполяция линейных операторов в пространствах Орлича // Матем. сб. 1964. № 63 (105), 4. С. 536–553.

4. *Умархаджиев С. М.* Обобщение понятия гранд-пространства Лебега // Известия вузов. Математика. (в печати)

Секция III
Дифференциальные уравнения и математическая физика

ABDOURAHMAN, DJEUTCHA Eric and YATCHET Aime
(Maroua, Cameroon)
abdoulshehou@yahoo.fr

ON AN $N-ORDER$ LINEAR SINGULAR DIFFERENTIAL EQUATION IN THE SPACE OF GENERALIZED FUNCTION K' OVER K

In this work,we investigate the solvability of the singular $n-order$ linear differential equation of the following form

$$ax^p y^{(n)} + bx^q y^{(n-1)} = \delta^{(s)}(x)$$

where $n \geq 1, a, b$ are real constants, $p \in \mathbb{N}^*, q, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ on the space of generalized functions $\mathcal{K}'$ over $\mathcal{K}$.

For that purpose,we recall this very important formula to be used in the work :

$$x^k \delta^{(s)}(x) = \begin{cases} 0 \text{ if } s < k \\ \frac{(-1)^k s!}{(s-k)!} \delta^{(s-k)}(x) \ if \ s \geq k \end{cases}$$

Moreover,some specific knowledge of the general theory for generalized functions is presented with the main theorems to be applied. Depending of various cases, the general solutions of the considered equation are found and, they are connected with some arbitrary constants.

Список литературы

[1] *Abdourahman*. On a linear differential equation with singular coefficients. Collection of papers. «Integro-differential operators and their applications», Rostov-na-Donu: Izdat. DGTU, 2001. No. 5. P. 4–10.

[2] *Abdourahman*. On a linear differential equation in the space of generalized functions. Rostov On Don. Deposited at VINITI 02.08.2000.N°2035 − 2000.27 pages.

[3] G.E. CHYLOV. Mathematical Analysis. Second Special Course. Russian edition

А. М. Абдрахманов, Р. П. Абдрахманова (Уфа)
abdrai@mail.ru

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПРИ МЛАДШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Рассматривается задача Дирихле для системы

$$\overline{W_{\bar{z}\bar{z}}} + \frac{\lambda}{z} W_{\bar{z}} = 0 \qquad (1)$$

в следующей постановке: найти регулярное в области $D = \{z : |z| < 1, z \neq 0\}$ решение системы (1), ограниченное при $z = 0$ и удовлетворяющее условию

$$W\big|_{\Gamma} = f(t), \qquad (2)$$

где $f(t)$– заданная на $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$ функция.

Доказаны теоремы:

Теорема 1. *Пусть* $0 < |\lambda| < \dfrac{1}{2}$, $f \in C^{2,\alpha}(\Gamma)$, *тогда задача Дирихле (1),(2) однозначно и безусловно разрешима. Ее решение* $W \in C^{\infty}(D) \bigcap C(\overline{D})$.

Теорема 2. *Пусть* $|\lambda| = \dfrac{1}{2}$, $f \in C^{3,\alpha}(\Gamma)$, *тогда задача Дирихле (1),(2) однозначно и безусловно разрешима. Если же искать решение, непрерывное в точке* $z = 0$, *то задача (1),(2) однозначно разрешима для* $f(t)$, *удовлетворяющих условию*

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\overline{f(t)}}{t^2} dt - \frac{\lambda}{|\lambda|} \overline{\int\limits_{\Gamma} \frac{\overline{f(t)}}{t^2} dt} = 0$$

Теорема 3. *Пусть* $|\lambda| > \dfrac{1}{2}$, $f \in C^{3,\alpha}(\Gamma)$, *решение задачи (1),(2) разрешимо с точностью до произвольной постоянной тогда и только тогда, когда* $f(t)$ *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\overline{f(t)}}{t^2} dt = 0$$

Используемая методика позволяет ответить на вопрос разрешимости задачи Дирихле и для сингулярностей более высокого порядка.

З. А. Ахмедов, И. Сирожиддинова (Фергана, Узбекистан)
axmedovza@mail.ru

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В данной работе исследована на условную корректность одна задача для бигармонического уравнения в цилиндре.

Задача. Требуется найти функцию $u(r,z)$, удовлетворяющую условиям:

$$\Delta^2 u(r,z) = 0 \text{ в } D = \{(r,z) : 0 < r < b,\ \ 0 < z < l\}\,, \tag{1}$$

$$u(a,z) = f(z)\,,\ \ 0 \le z \le l,\ \ \Delta u(r,0) = \Delta u(r,l) = 0,\ \ 0 < r < b, \tag{2}$$

$$u(r,0) = u(r,l) = 0,\ \ 0 \le r \le b,\ \ \Delta u(b,z) = 0,\ \ 0 < z < l, \tag{3}$$

где $0 < a < b$, $f(z)$-заданная функция, $f\,(0) = f\,(l) = 0$, Δ -оператор Лапласа.

Покажем, что в поставленной задаче не имеет места непрерывная зависимость решения от данных. Действительно, функция

$$u_n(r,z) = \varepsilon \left[I_0\left(\frac{\pi n}{l} r\right) / I_0\left(\frac{\pi n}{l} a\right) \right] \sin \frac{\pi n}{l} z, \tag{4}$$

является решением задачи (1) - (3) при $f(z) = \varepsilon \sin \dfrac{\pi n}{l} z$; здесь $I_0\,(x)$ - функция Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента. Из (4) следует, что для любых констант $0 < \varepsilon < 1$, $\ c > 0$ и переменных $r \in (a,b)$, $z \in [0,l]$ можно подобрать такие ε и n, чтобы выполнялись неравенства $|u_n(a,z)| \le \varepsilon$, $|u_n(r,z)| > c$.

Справедлива следующая теорема, характеризующая устойчивость решения задачи (1)-(3).

Теорема. Если функция $u(r,z)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\|u(a,z)\|_{L_2(0,l)} \le \varepsilon, \quad \|u(b,z)\|_{L_2(0,l)} \le M, \tag{5}$$

то выполняется неравенство

$$\|u(r,z)\|_{L_2(0,l)} \le M I_0\,(\lambda\,(\varepsilon)\, r) / I_0\,(\lambda\,(\varepsilon)\, b), \tag{6}$$

где $\lambda\,(\varepsilon)$ - корень уравнения $I_0\,(\lambda b)/I_0\,(\lambda a) \ = M/\varepsilon$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Атаходжаев М. А., Ахмедов З. А.* Об одной условно-корректной задаче для бигармонического уравнения. Изв. АН. Р.Уз. Серия физ-мат. наук, 1980, №1, С. 3–9.

А. О. Бабаян (Ереван, Армения)
barmenak@gmail.com

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Пусть D единичный круг комплексной плоскости с границей $\Gamma = \partial D$. В области D рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u = 0, \tag{1}$$

где λ_j $(j = 0, 1)$ различные комплексные числа, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Следует определить решение u уравнения (1), из класса $C^4(D) \bigcap C^{(1,\alpha)}(D \bigcup \Gamma)$, удовлетворяющее на Γ условиям Дирихле

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial r^k}\right|_{\Gamma} = f_k(x, y), \quad k = 0, 1, \quad (x, y) \in \Gamma. \tag{2}$$

Здесь f_k $(k = 0, 1)$ заданные на Γ функции, $\frac{\partial}{\partial r}$ производная по направлению радиус-вектора комплексного числа $(z = re^{i\varphi})$.

Если $\Im\lambda_1 > 0 > \Im\lambda_2$ (уравнение (1) правильно эллиптическое), предполагаем, что $f_k \in C^{(1-k,\alpha)}(\Gamma)$. Тогда задача (1), (2) фредгольмова, и в работе получены формулы для определения дефектных чисел этой задачи (т.е. количество линейно независимых решений однородной задачи (1), (2), при $f \equiv 0$, и число линейно независимых условий разрешимости неоднородной задачи).

Пусть $\Im\lambda_1 \geq \Im\lambda_2 > 0$ (уравнение (1) неправильно эллиптическое). Определен класс граничных функций, в котором задача (1), (2) также фредгольмова, и получены формулы для определения дефектных чисел.

В случае действительных чисел λ_j (не эллиптическое уравнение (1)) получены необходимые и достаточные условия наличия нетривиальных полиномиальных решений однородной задачи (1), (2).

Доказывается, что во всех трех случаях количество, дефектных чисел в случае эллиптического уравнения и условий нетривиальной разрешимости в неэллиптическом случае, определяется по количеству нулей уравнения

$$U_n^2(z) = n^2, \quad n = 3, 4, \ldots,$$

где U_n многочлен Чебышева второго рода.

В. А. Бабаян (Ереван)
bvazgen@gmail.com

О ЗАДАЧЕ РИМАНА ДЛЯ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ С ВЕСОМ ФУНКЦИЙ

Рассматривается задача Римана для полианалитических функций в пространстве непрерывных с весом функций. Степенная весовая функция в окрестности единицы имеет неотрицательный порядок. Доказано, что однородная задача не имеет нетривиальных решений, если порядок весовой функции не больше единицы, а для случая, когда порядок больше единицы, число линейно независимых решений однородной задачи определяется по показателю порядка весовой функции. В случае целого или нецелого порядка количество линейно независимых решений различается на n - порядок уравнения. Получены также необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородной задачи. Решения записываются в явном виде.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Tovmasyan N. E.* Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields. Singapore, NewJersey: 1998. 235 p.

2. *Айрапетян Г. М.* Граничная задача типа Римана-Гильберта для n - голоморфных функций в классе L^1 // Доклады РАН. 1993. Т. 328. № 5. С. 533–535.

3. *Айрапетян Г. М.* Задача Дирихле в пространствах с весом // Известия НАН Армении. Математика. 2001. Т. 36. № 3. С. 22–44.

4. *Kazarian K. S.* Weighted norm inequalities for some classes of singular integrals // Studia Math. 1987. Vol. 86. PP. 97-130.

5. *Soldatov A. P.* Generalized potentials of double layer for second order elliptic systems // Научные ведомости БелГУ. 2009. № 13(68). Вып. 17/1. С. 103–109.

6. *Айрапетян Г. М., Бабаян В. А.* О задаче Дирихле в пространстве непрерывных с весом функций // Научные ведомости БелГУ. 2011. № 17 (112). Вып. 24, С. 5–16.

7. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

8. *Айрапетян Г. М., Бабаян В. А.* О граничной задаче Римана-Гильберта в пространстве непрерывных функций // Научные ведомости БелГУ. 2013. № 19(162). Вып. 32, С. 22–33.

А. К. Баззаев (Владикавказ)
alexander.bazzaev@gmail.com

О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА

В цилиндре $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < \ell,\ 0 < t \leqslant T\}$ рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \partial_{0x}^{\beta} u + f(x,t),\ (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \beta_1(t)u - \mu_1(t),\ x = 0, \\ -\dfrac{\partial u}{\partial x} = \beta_2(t)u - \mu_2(t),\ x = \ell, \end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{3}$$

где $\partial_{0t}^{\alpha} u = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \displaystyle\int_0^t \dfrac{u_\tau(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}, \partial_{0x}^{\beta} u = \dfrac{1}{\Gamma(2-\beta)} \displaystyle\int_0^x \dfrac{u_{\eta\eta}(\eta,t)d\eta}{(x-\eta)^{\beta-1}}$ — соответственно регуляризованные дробные производные по времени порядка $\alpha,\ 0 < \alpha < 1$ и по пространственной координате x порядка $\beta,\ 1 < \beta \leqslant 2$; $\beta_1,\ \beta_2 \geqslant \beta_* > 0$.

Дифференциальной задаче (1) — (3) поставим в соответствие разностную схему

$$\begin{gathered} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j} \left(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}\right) y_t^s = \\ \frac{1}{\Gamma(3-\beta)} \sum_{s=0}^{i} \left(x_{i-s+1}^{2-\beta} - x_{i-s}^{2-\beta}\right) (\sigma \widehat{y}_{\overline{x}x,s} + (1-\sigma) y_{\overline{x}x,s}) + \varphi_i, \end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{cases} ((y_1 - y_0)/h - \beta_1 y_0)^{(\sigma)} = -\mu_1, \\ -((y_N - y_{N-1})/h + \beta_2 y_N)^{(\sigma)} = -\mu_2, \end{cases} \tag{5}$$

$$y(x,0) = u_0(x),\ y^{(\sigma)} = \sigma\widehat{y} + (1-\sigma)y, \widehat{y} = y_i^{j+1},\ y = y_i^j, \tag{6}$$

которая имеет порядок аппроксимации $O(h+\tau)$ и равномерно сходится со скоростью $O(h+\tau)$ [1] — [2].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. — М.: Наука. 1977. — 656 с.

2. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. — М.: Наука. 1973. — 415 с.

A. I. Bodrenko (Volgograd)
bodrenko@mail.ru

CONTINUOUS HG-DEFORMATIONS OF SURFACES WITH BOUNDARY IN EUCLIDEAN SPACE

The properties of continuous deformations of surfaces with boundary in Euclidean 3-space preserving its Grassmannian image and mean curvature are studied in this report.

We determine the continuous HG-deformation for simply connected oriented surface F with boundary ∂F in Euclidean 3-space. We derive the differential equations of G-deformations of surface F. We prove the lemma where we derive auxiliary properties of functions characterizing HG-deformations of surface F.

Then on the surface F we introduce conjugate isothermal coordinate system which simplifies the form of equations of G-deformations.

From the system of differential equations characterizing G-deformations of surface F in conjugate isothermal coordinate system we go to the nonlinear integral equation and resolve it by the method of successive approximations.

We derive the equations of HG-deformations of surface F. We get the formulas of change $\Delta(g_{ij})$ and $\Delta(b_{ij})$ of coefficients g_{ij} and b_{ij} of the first and the second fundamental forms of surface F, respectively, for deformation $\{F_t\}$. Then, using formulas of $\Delta(g_{ij})$ and $\Delta(b_{ij})$, we find the conditions characterizing HG-deformations of two-dimensional surface F in Euclidean space E^3.

We show that finding of HG-deformations of surface F brings to the following boundary-value problem (A):

$$\partial_{\bar z}\dot w + A\dot w + B\bar{\dot w} + E(\dot w) = \dot\Psi, \qquad Re\{\overline{\lambda}\dot w\} = \dot\varphi \quad \text{on} \quad \partial F,$$

where A, B, λ, $\dot\Psi$, $\dot\varphi$ are given functions of complex variable, $\dot w$ is unknown function of complex variable, operator $E(\dot w)$ has implicit form.

Prior to resolving boundary-value problem (A) we find the solution of the following boundary-value problem for generalized analytic functions:

$$\partial_{\bar z}\dot w + A\dot w + B\bar{\dot w} = \dot\Psi, \quad Re\{\overline{\lambda}\dot w\} = \dot\varphi \quad \text{on} \quad \partial F.$$

Then we use the theory of Fredholm operator of index zero and the theory of Volterra operator equation. Using the method of successive approximations and the principle of contractive mapping, we obtain solution of boundary-value problem (A) and the proof of the main result of this report.

I. I. Bodrenko (Volgograd)
bodrenkoi@mail.ru

SOME PROPERTIES OF NORMAL SECTIONS AND GEODESICS ON CYCLIC RECURRENT SUBMANIFOLDS

Let F^n be n-dimensional $(n \geq 2)$ submanifold in $(n+p)$-dimensional Euclidean space E^{n+p} $(p \geq 1)$. Let x be arbitrary point F^n, T_xF^n be tangent space to F^n at the point x. Let $\gamma_g(x,t)$ be a geodesic on F^n passing through the point $x \in F^n$ in the direction $t \in T_xF^n$. Denote by $k_g(x,t)$ and $\varkappa_g(x,t)$ curvature and torsion of geodesic $\gamma_g(x,t) \subset E^{n+p}$, respectively, calculated for point x. Torsion $\varkappa_g(x,t)$ of geodesic $\gamma_g(x,t)$ is called geodesic torsion of submanifold $F^n \subset E^{n+p}$ at the point x in the direction t.

Let $\gamma_N(x,t)$ be a normal section of submanifold $F^n \subset E^{n+p}$ at the point $x \in F^n$ in the direction $t \in T_xF^n$. Denote by $k_N(x,t)$ and $\varkappa_N(x,t)$ curvature and torsion of normal section $\gamma_N(x,t) \subset E^{n+p}$, respectively, calculated for point x.

Denote by b the second fundamental form of F^n, by $\overline{\nabla}$ the connection of van der Waerden—Bortolotti. The fundamental form $b \neq 0$ is called cyclic recurrent if on F^n there exists 1-form μ such that

$$\overline{\nabla}_X b(Y,Z) = \mu(X)b(Y,Z) + \mu(Y)b(Z,X) + \mu(Z)b(X,Y)$$

for all vector fields X, Y, Z tangent to F^n.

Submanifold $F^n \subset E^{n+p}$ with cyclic recurrent the second fundamental form $b \neq 0$ is called cyclic recurrent submanifold.

The properties of normal sections $\gamma_N(x,t)$ and geodesics $\gamma_g(x,t)$ on cyclic recurrent submanifolds $F^n \subset E^{n+p}$ are studied in this report. The conditions for which cyclic recurrent submanifolds $F^n \subset E^{n+p}$ have zero geodesic torsion $\varkappa_g(x,t) \equiv 0$ at every point $x \in F^n$ in every direction $t \in T_xF^n$ are derived in this report.

Denote by $\mathcal{R}_0$ a set of submanifolds $F^n \subset E^{n+p}$, on which

$$k_g(x,t) \neq 0, \quad \varkappa_g(x,t) \equiv 0, \quad \forall x \in F^n, \quad \forall t \in T_xF^n.$$

The following theorem is proved in this report.

Theorem. *Let F^n be a cyclic recurrent submanifold in E^{n+p} with no asymptotic directions. Then F^n belongs to the set $\mathcal{R}_0$ if and only if the following condition holds:*

$$k_N(x,t) = k(x), \quad \forall x \in F^n, \quad \forall t \in T_xF^n.$$

V. P. Burskii (Donetsk, Ukraine)
v30@dn.farlep.net

APPLICATIONS OF HARMONIC ANALYSIS TO GENERAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS

We raise the question: How boundary value problems for linear differential equations of general form can be studied? We offer some approaches to this problem. One of the possible approaches is such. Let $L = L(x, D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ be a linear differential operation with constant coefficients, which can be complex-valued or operator, $D = -i\nabla$ and let $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ be a domain with smooth boundary $\partial\Omega$. The traces of a smooth solution of the equation $Lu = f$ can not be arbitrary and they are somehow connected among themselves. Let us consider the Caushy problem

$$Lu = f,\, u|_{\partial\Omega} = \psi_0, u'_\nu|_{\partial\Omega} = \psi_1, ..., u_\nu^{(m-1)}|_{\partial\Omega} = \psi_{m-1}. \quad (1)$$

Let us also extend functions f and u by means of zero: $\tilde{u} = u$ in Ω, $\tilde{u} = 0$ outside of Ω. Then $L\tilde{u} = \tilde{f} + L^{(m-1)}\, u\, \delta_{\partial\Omega} + ... + L^{(0)} u\, (\delta_{\partial\Omega})_\nu^{(m-1)}$, (2) where $L^{(k)}u$ is some linear differential expression on u of order $k-1$ with smooth coefficients depended on the normal ν and a_α, $< \delta_{\partial\Omega}, \varphi >= \int_{\partial\Omega} \overline{\varphi}\, ds$, $< (\delta_{\partial\Omega})_\nu^{(k)}, \varphi >= \int_{\partial\Omega} (-\partial)_\nu^k \overline{\varphi}\, ds$.

We have applying the Fourier-transformation F to the equality (2)

$$L(-\xi) F\, \tilde{u}(\xi) = F\, \tilde{f}(\xi) + \int\limits_{\partial\Omega} [\overline{L_{(m-1)}\, \psi}\, e^{-ix\xi} + ... + \overline{L_{(0)}\, \psi}\, (e^{-ix\xi})_\nu^{(m-1)}] dx, (3)$$

where $L_{(k)}\psi$ is some linear differential expression on the traces ψ of order $k-1$ with smooth coefficients, depended on ν and a_α. Now, if Ω is a bounded domain then the right part of (3) is an entier function which is vanished on $\Lambda = \{\xi \in \mathbf{C}^n |\, L\, (-\xi) = 0\}$. It is a necessary connection condition for traces of solution and the condition $\int\limits_{\partial\Omega} \overline{L_{(m-1)}\, \psi}\, e^{-ix\xi}\, dx + ... + \int\limits_{\partial\Omega} \overline{L_{(0)}\, \psi}\, (e^{-ix\xi})_\nu^{(m-1)} dx = 0, \forall \xi \in \Lambda$ (4) is necessery and sufficient for the solvability of the Cauchy problem (1) with $f = 0$ for some operator classes.

The second approach is called the domain-equation duality. Let $m = 2$ for simplisity and we have the Dirichlet problem on the boundary of domain $Lu = 0$, $u|_{\partial\Omega} = \psi$. (5) For the function $\tilde{u} = u$ as above we obtain $L(D)\, \tilde{u} = L(\nu)\, u'_\nu|_{\partial\Omega} \delta_{\partial\Omega}$. (6) If the domain Ω is given by means $P(x) > 0$ where $P \in R[x]$ is a polinomial then $P(-D_\xi)[L(\xi) F(\tilde{u})(\xi)] = 0, i.e. P(-D)w = 0, w|_{L(\xi)=0} = 0$. (7) The solvability of the last equation in some classes of entier functions is equivalent to the solvability of the problem (2). Comparing (5) and (7) we see that domain and equation are changed their places.

А. И. Вагабов, З. А. Абдурахманов, Х. А. Абдусаламов
(Махачкала)
algebra-dgu@mail.ru

ОБОБЩЕННАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА

При исследовании задач, связанных с уравнением

$$l(y) \equiv \sum_{0 \leqslant k+s \leqslant n} \lambda^k a_{ks}(x) \frac{d^s y}{dx^s} = f(x), \quad a < x < b, \tag{1}$$

(λ — комплексный параметр), возникает необходимость в различных формах представления ее решения. Обозначим

$Y(x) = W(y_1, \ldots, y(n))$ матрицу Вронского фундаментальных решений $y_1 \ldots y_n$ уравнения $l(y) = 0$, а $Z(x) = \left\{ \frac{A_{ji}(x)}{\det Y(x)} \right\}_1^n$, где $\{A_{ji}\}$- матрица, присоединенная к матрице $Y(x)$.

Определение. *Функцией Грина уравнения* (1) *назовем функцию* $g(x, \xi, \lambda)$*, непрерывную по* x, ξ *вместе с* $n-2$*-мя первыми производными по* x *в квадрате* $a \leqslant x,\ \xi \leqslant b$*, имеющую непрерывные производные до* n*-го порядка по* x *при* $\xi \in [a, x) \cup (x, b]$ *и имеющую скачок производной* $n-1$*-го порядка при* $\xi = x$*, равный* $a_{0n}^{-1}(x)$*, т. е.* $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(g(x, x-0, \lambda) - g(x, x+0, \lambda)) = a_{0n}^{-1}(x)$*, удовлетворяющую при* $\forall \xi \in [a, x) \cup (x, b]$ *уравнению* $l(y) = 0$*.*

Доказана

Теорема. *Каждая из функций*

$$g_\tau(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\tau} y_i(x, \lambda) \frac{A_{ni}(\xi, \lambda) a_{0n}^{-1}(\xi)}{det\, Y(\xi, \lambda)} & \text{при} \quad a \leqslant \xi \leqslant x, \\ -\sum\limits_{i=\tau+1}^{n} y_i(x, \lambda) \frac{A_{ni}(\xi, \lambda) a_{0n}^{-1}(\xi)}{det\, Y(\xi, \lambda)} & \text{при} \quad x \leqslant \xi \leqslant b, \end{cases}$$

где $0 \leqslant \tau \leqslant n$*, причем* $g_0(x, \xi, \lambda) = 0$ *при* $a \leqslant \xi \leqslant x$*, а* $g_n(x, \xi, \lambda) = 0$ *при* $x \leqslant \xi \leqslant b$ *является функцией Грина уравнения* (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вагабов А. И., Абдурахманов З. А.* Спектральная теория дифференциальных операторов. Германия, Саарбрюккен: Lap-Lambert, 2012. С. 78.

А. О. Ватульян, Л. С. Гукасян (Ростов-на-Дону)
luska-90@list.ru

О РЕКОНСТРУКЦИИ ПЕРЕМЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ [1]

Задачи об определении переменных коэффициентов дифференциальных операторов по некоторой дополнительной информации о решении формируют важный класс обратных коэффициентных задач. При этом в качестве дополнительной информации используется различная информация о полях либо на границе, либо внутри рассматриваемой области. В настоящей работе рассмотрена обратная двумерная задача для оператора теории упругости об определении переменных непрерывно дифференцируемых коэффициентов Ляме, зависящих от двух координат. Дополнительной информацией, которая считается известной в обратной задаче, является информация о поле смещений внутри области в наборе точек. Решение сформулированной некорректной задачи строится в два этапа. На первом этапе происходит построение достаточно гладких приближений полей смещений на основе сплайн-аппроксимаций, для того, чтобы находить регуляризованные значения производных. Собственно этап реконструкции может осуществляться несколькими методами- с помощью разностных аппроксимаций, с помощью решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка,на основе проекционной схемы типа Галекркина. Ранее было построено решение обратной задачи для одномерных зависимостей искомых функций с помощью разностных аппроксимаций, в настоящем исследовании используется проекционная схема. Сформулирована слабая постановка задачи в виде некоторого интегрального тождества , удовлетворение которому осуществляется с помощью представления искомых функций в виде линейной комбинации базисных функций. Окончательно проблема сведена к решению линейной алгебраической системы.

Конкретная реализация осуществлена для прямоугольной и круговой областей. Представлены численные результаты по реконструкции переменных модулей упругости для различных типов зависимостей, проанализировано влияния защумления входной информациии и способа нагружения, выявлены неблагоприятные режимы граничного воздействия.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00196).

С. С. Вихарев (Волгоград)
vhr1987@mail.ru

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ [1]

Работа посвящена вопросам существования положительных решений уравнения Гинзбурга-Ландау на некомпактных сферически-симметричных римановых многообразиях. Опишем их подробнее.

Пусть риманово многообразие M изометрично прямому произведению $R_+ \times S$, (где $R_+ = (0, +\infty)$, а S – компактное риманово многообразие без края) с метрикой $ds^2 = dr^2 + g^2(r)d\theta^2$. Примерами таких многообразий могут служить евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, пространство Лобачевского $\mathbb{H}^n$, поверхности вращения.

Рассмотрим на M стационарный случай известного уравнения Гинзбурга-Ландау

$$-\Delta u = c(x)f(u), \tag{1}$$

где $f(0) = f(a) = 0$ для некоторого $a > 0$, $f(u) > 0$ на $(0, a)$ и $f(u) < 0$ на $(a, +\infty)$, $c(x)$ — положительная функция.

Пусть существуют c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ т.ч. $0 < c_1 < c(x) < c_2 < \infty$ для всех $x \in M$, $f(s)$ — липшицева на $[0, a]$, а $g(r)$ – неубывающая гладкая функция. В этом случае справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия.*
1. Многообразие M таково, что для некоторой константы $q > 1$ выполнено

$$\limsup_{\rho\to\infty} \rho^{\frac{2}{q-1}} \left(\frac{\int\limits_{\rho/4}^{2\rho} g^{n-1}(r)dr}{\int\limits_{\rho/2}^{\rho} g^{n-1}(r)dr} \right)^{\frac{1}{q-1}} \int\limits_{2\rho}^{\infty} \frac{ds}{g^{n-1}(s)} = +\infty.$$

2. Функция f такова, что существуют $\delta(q) > 0$ и $\sigma(q, \delta) > 0$ при которых для всех $s \in (0, \delta)$ выполнено $f(s) \geqslant \sigma s^q$.

Тогда любое решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $0 \leqslant u \leqslant a$, является тождественной константой.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Dancer E. N., Du Yihong* Some remarks on Liouville type results for quasilinear elliptic equations, Vol 131 N6, 2002, p. 1891–1899.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 13-01-97038-р_поволжье_а).

А. М. Гачаев (Грозный)
gachaev_chr@mail.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В МЛАДШИХ ЧЛЕНАХ

Для уравнения

$$u'' + \sum_{i=1}^{n} D_{0x}^{\alpha_i} u + q(x)u(x) = \lambda u(x), \tag{1}$$

где $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, \dots, n$, $q(x) \in C[a, b]$, рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = \beta, \quad u'(0) = h. \tag{2}$$

Для простоты будем считать, что $n = 1$.

Доказана **Теорема 1.** *Для любого λ существует единственное решение $u(x, \lambda)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ уравнения (1) такое, что $u(0, \lambda) = \beta$, $u'(0, \lambda) = h$.*

Рассматривается задача:

$$u'' + D_{1x}^{\alpha} u + q(x)u(x) = \lambda u, \tag{3}$$

$$u'' + D_{x1}^{\alpha} u + q(x)u(x) = \lambda u, \tag{4}$$

$$u(1) = \gamma, \quad u'(1) = \eta. \tag{5}$$

Доказана **Теорема 2.** *Пусть $q(x) \in C[0, 1]$. Тогда задача (3)–(5) имеет единственное решение в классе $C^2(I) \cap C(\bar{I})$.*

Для уравнения

$$-u'' + \sum_{i=1}^{n} D_{0x}^{\alpha_i} u + q(x)u = \lambda u \tag{6}$$

рассмотрена задача

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \tag{7}$$

где $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$, а $q(x)$ — полуограниченная функция.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

2. *Лидский В. Б.* О полноте системы собственных и присоединенных функций несамосопряженного дифференциального оператора // ДАН СССР. 1956. Т. 110, № 2. С. 172–175.

А. Демедерос (Москва)
ademederos@yahoo.fr

ГЕОМЕТРИЯ ТРАНССАСАКИЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Определение 1. Почти контактная метрическая структура называется транссасакиевой (короче, TS-) структурой, если её линейное расширение принадлежит классу W_4 в классификации Грея-Херввеллы.

AC-многообразие, снабженное транссасакиевой структурой называется транссасакиевым (короче, TS-) многообразием.

Теорема 1. *TS-многообразие M^{2n+1} постоянной кривизны k является многообразием неотрицательной кривизны k, причем $k = 0$ тогда и только тогда, когда $\beta_0 = 0$, т.е. TS-многообразие является косимплектическим.*

Теорема 2. *TS-многообразие M является многообразием точечно постоянной Φ-голоморфной секционной кривизны c тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры тензор A^{ad}_{bc} имеет вид*

$$A^{ad}_{bc} = -\frac{1}{2}\delta^{(a}_{(b}\delta^{d)}_{c)}\beta^0\beta_0 - \frac{c}{2}\delta^{ad}_{bc} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\beta^0\beta_0 + c\right)\delta^{ad}_{bc}.$$

Теорема 3. *Для η-Эйнштейнового TS-многообразия имеем:*

$$a = \frac{1}{n}A^{ab}_{ab} + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta^{00} + \frac{1-3n}{4}\left(\beta^0\right)^2 - \frac{1+n}{4}\beta^0\beta_0;$$

$$b = -\frac{1}{n}A^{ab}_{ab} + \frac{2n-1}{\sqrt{2}}\beta^{00} - \frac{n+1}{4}\left(\beta^0\right)^2 + \frac{1+n}{4}\beta^0\beta_0.$$

Теорема 4. *AC-многообразие является многообразием Эйнштейна тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры выполнены следующие равенства:*

$$1) S_{00} = \epsilon; 2) S_{0a} = 0; 3) S_{ab} = 0; 4) S_{a\hat{b}} = \epsilon\delta^b_a.$$

Теорема 5. *Для транссасакиевого многообразия Эйнштейна имеем:*

$$\epsilon = n\sqrt{2}\left\{\beta^{00} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\beta^0\right)^2\right\},$$

$$A^{ab}_{ab} = \left(n^2\sqrt{2} - \frac{n}{\sqrt{2}}\right)\left\{\beta^{00} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\beta^0\right)^2\right\} + \frac{3n(n-1)}{4}\left(\beta^0\right)^2 + \frac{n(n+1)}{4}\beta^0\beta_0.$$

В. В. Дударев, Р. Д. Недин (Ростов-на-Дону)
dudarev_vv@mail.ru

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВНУТРЕННИХ НАПРЯЖЕНИЙ В РАМКАХ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ [1]

Внутренними напряжениями (ВН) называются напряжения, существующие в теле при отсутствии внешних воздействий. Также под ВН можно понимать напряжения, создаваемые усилиями, недоступными для наблюдения.

В работе рассмотрены обратные задачи об идентификации неоднородных ВН в трубе и стержне по данным акустического зондирования. В задаче о радиальных колебаниях трубы в рамках плоской деформации получено дифференциальное уравнение движения второго порядка относительно функции смещения. Решение обратной задачи об определении закона изменения ВН, создаваемых скрытым давлением, получено с помощью двух подходов. Первых подход основан на процедуре обращения оператора задачи, второй — на реализации итерационного процесса с использованием процедуры регуляризации [1].

Рассмотрение задачи для стержня осуществлено как с позиции классической модели Бернулли–Эйлера, так и с позиции неклассической модели Тимошенко. На основе общих подходов [2] получены дифференциальные уравнения движения и граничные условия. Решение прямой задачи об определении компонент поля перемещения осуществлено в конечно-элементном пакете FreeFem++. Решение обратной задачи об определении одноосного ВН построено в рамках второго подхода. Для определения поправки к неизвестной функции ВН получено интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода, решение которого реализовано с помощью метода А. Н. Тихонова.

Анализ серии вычислительных экспериментов для каждой из задач по реконструкции монотонных и немонотонных законов показал достаточную эффективность составленных численных схем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dudarev V., Vatulyan A.* On restoring of the pre-stressed state in elastic bodies // ZAMM. 2011. V. 91, № 6. P. 485–492.

2. *Nedin R., Vatulyan A.* Inverse problem of non-homogeneous residual stress identification in thin plates // Int. J. Solids Struct. 2013. Issue 50, P. 2107–2114.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00196, 14-01-31393).

Елеуов А. А., Закариянова Н. Б., Елеуова Р. А.
(Алматы, Казахстан)
eleuov@mail.ru

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ НА ОТРЕЗКЕ

В настоящей статье изложены некоторые результаты теории обратных спектральных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Известно, что более трудными являются обратные задачи для дифференциальных уравнений высших порядков с нераспадающиемися граничными условиями. В данной работе исследуется единственность решения обратной задачи спектрального анализе для дифференциальных уравнений высших порядков с нелокальными граничными условиями. Частный случай указанных граничных условий представляют двухточечные нераспадающие граничные условия. Таким образом, результаты настоящей статьи охватывают как распадающиеся так и нераспадающие граничные условия. Именно, в этом смысле основной результат настоящей статьи обобщает результаты монографии [1], где приведены подобные теоремы единственности для распадающихся граничных условий.

1. Вначале приведем известные результаты по прямой задачи спектрального анализа дифференциальных операторов высших порядков на отрезке. В работе [2], изложена возможность разложения функции из некоторого функционального пространства по собственным и присоединенным функциями дифференциального оператора , положенного функциональном пространстве $L_2[0,b]$ при $b<\infty$ линейным дифференциальным выражением с переменными коэффициентами

$$Ly = l(y) = y^{(n)}(x) + P_{n-2}(x)y^{(n-2)}(x) + ... + P_0(x)y(x) \tag{1}$$

с единственным ограничением

(1) резольвентное множество оператора L - ненулевое множество. Не умоляя общности, полагаем, что комплексное число 0 принадлежит резольвентному множеству оператора L. Коэффициенты выражения l(.) удовлетворяют условию

$$P_0(x) \in C[0,b], P_1(x) \in C^1[0,b], ..., P_{n-2}(x) \in C^{n-2}[0,b] \tag{2}$$

Согласно известной теореме М. Отелбаева [3] область определения такого оператора описывается с помощью набора n функций $l_1(.), ..., l_n(.)$ из пространства $L_2[0,b]$.

Литература

1. **Садовничий В.А., Кангужин Б.Е.** *О связи между спектром дифференциального оператора с симметричными коэффициентами и краевыми условиями* // ДАН СССР.1982.267, № 2. с.310-313

2. **Наймарк М.А.** *Линейные дифференциальные операторы* // М.:Наука. 1969. 528с.

3. **Дезин А.А.** *Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач.* // Труды МИАН имени В.А.Стеклова.2000.Т.299.175с.

4. **Кангужин Б.Е.** *Формулы преобразования и спектральные свойства дифференциальных операторов высших порядков на отрезке* // Автореферат дисс. док. физ.-мат. н. 2005. Алматы. КазНУ имени аль-Фараби. 45 с.

Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов (Ростов-на-Дону)
dnjme@math.rsu.ru, pdvaskor@yandex.ru

О ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ НА ГРАФАХ С НЕСТАНДАРТНОЙ ДОСТИЖИМОСТЬЮ

Рассмотрим взвешенный граф $G_\varphi(X, U, f, p)$ с нестандартной достижимостью φ (см. [1]–[3]) и заданную на нём функцию $g : X \times [0, k]_Z \to R$, где $k+1$ — мощность путевого набора множеств для графа G_φ (см. [1], [2]). Весовая функция p задана таким образом, что $\sum\limits_{u\in[x]^+} p(u) = 1\ \forall x \in X$.

Оператор Лапласа на графе G_φ с нестандартной достижимостью φ строгого типа зададим следующим образом:

$$\Delta_\varphi g(x,y) = \sum_{u\in[x]^+\cap U^{(y)}} \frac{p(u)}{\sum\limits_{v\in[x]^+\cap U^{(y)}} p(v)} g((p_2\circ f)(u), F(y, a_u)) - g(x,y),$$

где вершина $z = (p_2 \circ f)(u)$ — концевая вершина дуги u, F — функция, использующаяся при вычислении характеристик путей для нестандартной достижимости (см. [1], [2]).

Рассмотрим задачу Дирихле на графе $G_\varphi(X, U, f)$ с нестандартной достижимостью φ, порождённую лапласианом Δ_φ:

$$\begin{cases} \Delta_\varphi g(x,y) = 0, & (x,y) \in int G_\varphi; \\ g(x,y) = h(x,y), & (x,y) \in \partial G_\varphi. \end{cases} \qquad (1)$$

Теорема 1. *Пусть граф G_φ с нестандартной достижимостью φ не имеет бесконечных компонент сильной связности и его конденсация прогрессивно конечна, тогда решение задачи Дирихле (1) существует и это решение единственно.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ерусалимский Я. М., Скороходов В. А.* Общий подход к нестандартной достижимости на графах // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2005, Псевдодифференциальные уравнения и некоторые проблемы математической физики. С. 64–67.

2. *Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А., Кузьминова М.В., Петросян А.Г.* Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения. — Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009. 195 с.

3. *Скороходов В.А.* Достижимость на графах с ограничением на прохождение по дугам и зависимостью весов дуг от времени// Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2009, №6, С. 14–17.

Н. С. Ерыгина (Белгород)

erygina n@bsu.edu.ru

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ

Пусть выполнены условия, сформулированные в работе [1] и справедлива модель (1) — (9), рассмотренная в работе [2]

$$\boldsymbol{w}^{(f)} = \frac{1}{\mu_1}\mathbb{B}\cdot(-\nabla\pi_f + t\varrho_f\boldsymbol{e}),\ \boldsymbol{x}\in\Omega^{\varepsilon}_f, \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\mathbb{P}^{(s)}_1 + \hat{\varrho}\ \boldsymbol{e} = 0,\ \ \boldsymbol{x}\in\Omega, \tag{2}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{w}^{(f)} + (1-m)\boldsymbol{w}_s) = 0,\ \ \boldsymbol{x}\in\Omega, \tag{3}$$

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\,\to\,\boldsymbol{x}^0\,\in\,S^0\\ \boldsymbol{x}\,\in\,\Omega}} \mathbb{P}^{(s)}_1(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = -\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\,\to\,\boldsymbol{x}^0\,\in\,S^0\\ \boldsymbol{x}\,\in\,\Omega_0}} p(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0), \tag{4}$$

$$\boldsymbol{w}_s = 0,\ \ \boldsymbol{x}\in\ S^2, \tag{5}$$

$$p(\boldsymbol{x},t) = p_0(t),\ \ \boldsymbol{x}\in S^1_0 = S^1\cap\overline{\Omega_0}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{w}^{(f)}\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = 0,\ \ \boldsymbol{x}\in\ S^2, \tag{7}$$

$$\mathbb{P}^{(s)}_1(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(x^0) = -p_0(t)\cdot\boldsymbol{n}(x^0),\ \ \boldsymbol{x}\in S^1_1 = S^1\cap\overline{\Omega}, \tag{8}$$

$$\pi_f(\boldsymbol{x},t) = \int_0^t p_0(\boldsymbol{x},\tau)d\tau,\ \boldsymbol{x}\in S^0\cup S^1_1, \tag{9}$$

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{w}^{(k)}_s$, $\boldsymbol{w}^{(f,k)}$, π^k_f — решение обобщенной модели (1) — (9) при $\lambda_0 = k$. Тогда предельные функции $\boldsymbol{w}_s = \lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{w}^{(k)}_s$, $\pi_f = \lim\limits_{k\to\infty}\pi^{(k)}_f$, $\boldsymbol{w}^{(f)} = \lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{w}^{(f,k)}_s$ при $t>0$ удовлетворяют следующей начально-краевой задаче*

$$\nabla\cdot\boldsymbol{w}^{(f)} = 0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega,\qquad \boldsymbol{w}^{(f)} = \frac{1}{\mu_1}\mathbb{B}(-\nabla\pi_f + \varrho_f\boldsymbol{e}),\ \boldsymbol{x}\in\Omega^{\varepsilon}_f,$$

$$\boldsymbol{w}^{(f)}(\boldsymbol{x}^0,t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0)=0,\ \ \boldsymbol{x}\in\ S^2$$

$\mathbb{B}$ — *симметричная положительно определенная матрица.*

Литература

1. *Ерыгина Н. С.* Упругий режим фильтрации жидкости из вожоема в грунт // материалы Международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» — Белгород, 26 — 31 мая, 2013г., С. 74 — 75.

2. *Ерыгина Н. С.* О фильтрации жидкости из водоема в пороупругий грунт // материалы Международной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий» — Воронеж, 10 — 16 сентября, 2013г., С. 99 — 101.

В. В. Жиков (Владимир)
zhikov@vlsu.ru

О ПЕРЕХОДЕ К ПРЕДЕЛУ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ [1]

При переходе к пределу в нелинейных слагаемых сталкиваемся с фундаментальной проблемой «слабой сходимости потока к потоку».

Потоком принято называть вектор $A(x,\nabla u_\varepsilon)$, стоящий в эллиптическом уравнении под знаком дивергенции. Обычно известна слабая сходимость $u_\varepsilon\rightharpoonup u$ в некотором соболевском пространстве и слабая сходимость потоков $A(x,\nabla u_\varepsilon)\rightharpoonup z$ в некотором лебеговом пространстве . Тогда возникает проблема равенства $z=A(x,\nabla u)$.

Сформулируем один результат в этом направлении. Он носит локальный характер, в качестве области $\Omega\subset R^N$ можно взять шар.

Теорема. *Предположим, что выполнены условия*
1^0 $u_\varepsilon\rightharpoonup u$ *в* $W^{1,\alpha}(\Omega)$, $\alpha>1$*;*
2^0 *символ* A *монотонен:* $(A(x,\xi)-A(x,\eta))\cdot(\xi-\eta)\ge 0$;
3^0 $\mathrm{div}A(x,\nabla u_\varepsilon)=0$ *в смысле распределений,*

$$A_\varepsilon\equiv A(x,\nabla u_\varepsilon)\rightharpoonup z\ \text{в}\ L^{\beta'}(\Omega),\quad \beta'=\frac{\beta}{\beta-1};$$

4^0 $1<\alpha\le\beta<\alpha_*$,

$$\alpha_*=\begin{cases}\frac{\alpha(N-1)}{N-1-\alpha} & \text{если}\quad \alpha<N-1,\\ +\infty & \text{если}\quad \alpha\ge N-1;\end{cases}$$

5^0 *семейство "плотностей энергий"*$A_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon$ ограничено в $L^1(\Omega)$*;*
6^0 $u_\varepsilon\in W^{1,\beta}(\Omega)$ *(дополнительная регулярность допредельной функции).*
Тогда $z=A(x,\nabla u)$.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 14-01-00192), а также Гранта Президента РФ НШ-3685.2014.1.

Отметим, что в «классическом случае», когда $\alpha = \beta$, последние три условия выполнены автоматически.

В докладе будут обсуждаться некоторые приложения:

•монотонные эллиптические операторы с нестандартными условиями роста;

• задача о термисторе;

• обобщенные уравнения Навье-Стокса.

Д. А. Жуков (Ростов-на-Дону)
fossil.new@yandex.ru

MG-ДЕФОРМАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ ПРИ ЗАДАННОЙ ВДОЛЬ КРАЯ ВАРИАЦИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО КРУЧЕНИЯ

Пусть S – односвязная поверхность класса $D_{3,p}$, $p > 2$, с краем ∂S класса C^1_α, $0 < \alpha < 1$ в трехмерном евклидовом пространстве. Гауссова кривизна $K \geqslant k_0 > 0$, $k_0 = const$. Зададим на S некоторое поле направлений R, вычет поверхности S относительно поля R будем обозначать $V_R(S)$.

Введем в рассмотрение инвариант $\tau_n = \dfrac{IV}{II}$, где II и $IV-$ вторая и четвертая квадратичные формы поверхности S.

Подвергнем поверхность S бесконечно малой MG-деформации с точечной связью [1]. (Вариация гауссовой кривизны, при этой деформации, равна функции $\sigma \in D_{1,p}$, $p > 2$, заданной на S). Доказана

Теорема. *Пусть, при бесконечно малой MG-деформации поверхности S с точечной связью, геодезическое кручение поверхности S вдоль края ∂S в направлении R имеет заданную вариацию, равную функции $\psi \in C_\nu$, $0 < \nu < 1$. Пусть вдоль края ∂S в направлении R $|\tau_n| \geqslant 1$. Тогда:*

1) если $V_R(S) > -2$, то

- при $\sigma \equiv 0$ и $\psi \equiv 0$ существует и единственна бесконечно малая MG-деформация поверхности S;

- при $\sigma \not\equiv 0$ или $\psi \not\equiv 0$ бесконечно малая MG-деформация поверхности S существует и единственна тогда и только тогда, когда функции σ и ψ удовлетворяют $(2V_R(S) + 3)$ условиям разрешимости;

2) если $V_R(S) \leqslant -2$, то

- при $\sigma \equiv 0$ и $\psi \equiv 0$ существует $(-2V_R(S) - 3)$ линейно независимых бесконечно малых MG-деформаций поверхности S;

- при $\sigma \not\equiv 0$ или $\psi \not\equiv 0$ бесконечно малые MG-деформации поверхности S существуют и зависят от $(-2V_R(S) - 3)$ произвольных вещественных постоянных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуков Д. А.* Бесконечно малые MG-деформации поверхности положительной гауссовой кривизны при стационарности средней кривизны

вдоль края // Научно-технический вестник Поволжья. № 3. 2012. С. 18—25.

УДК 517.956

А. Н. Зарубин (Орел)
aleks_zarubin@mail.ru

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА СО СМЕШАННЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТОВ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ.

Рассматривается уравнение смешанного эллиптико-гиперболического опережающе-запаздывающего типа с параллельными линиями вырождения

$$\begin{gathered} U_{xx}(x,y)+sgny(2h-y)U_{yy}(x,y)= \\ =[R_x^{\tau}H(x)+R_x^{-\tau}H(2\tau-x)][H((2h-y)(y-h))U(x,y-h)+ \\ +H(y(h-y))U(x,y+h)+H(y(y-2h))U(x,2h-y)], \end{gathered} \tag{1}$$

$0<\tau,h\equiv const, H(\xi)$ – функция Хевисайда; R_x^{Θ} - оператор сдвига по $x: R_x^{\Theta}q(x)=q(x-\Theta)$; в области $D=D^+\cup D^-\cup I_0\cup I_1$, где $D^+=\{(x,y):\ 0<x<2\tau,\ 0<y<2h\}=\bigcup\limits_{k,\,n=0}^{1}D_{kn}^+\cup J_0\cup J_1$ и $D^-=\bigcup\limits_{k,n=0}^{1}D_{kn}^-$ – эллиптическая и гиперболическая части области D, причем $D_{kn}^+=\{(x,y):k\tau<x<(k+1)\tau, nh<y<(n+1)h\}(k,n=0,1), D_{kn}^-=\{(x,y):(-1)^n(2nh-y)+k\tau<x<(-1)^n(y-2nh)+(k+1)\tau,\ -2nh-\tau/2<(-1)^ny<-2nh\}(k,n=0,1)$, а $J_0=\{(x,y):x=\tau,0<y<2h\}$, $J_1=\{(x,y):0<x<2\tau,y=h\}$, $I_n=\bigcup\limits_{k=0}^{1}I_{kn}$, где $I_{kn}=\{(x,y):k\tau<x<(k+1)\tau,\ y=2nh\}(n=0,1)$.

Пусть $D_{kn}=D_{kn}^+\cup D_{kn}^-\cup I_{kn}(k,n=0,1)$ и $D_k=\bigcup\limits_{n=0}^{1}D_{kn}(k=0,1)$.

Задача T. Найти в области D функцию

$$U(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^1(D\setminus J_0)\cap C^2(D\setminus(J_0\cup J_1\cup I_0\cup I_1)),$$

удовлетворяющую уравнению (1), краевым условиям
$U(0,y)=U(2\tau,y)=0, 0\le y\le 2h, U(x,2nh-(-1)^n(x-k\tau))=\psi_{kn}(x)$, $k\tau\le x\le(2k+1)\tau/2(k,n=0,1)$, условиям сопряжения
$U(x,2nh+)=U(x,2nh-)=\omega_n(x), 0\le x\le 2\tau(n=0,1)$,
$U_y(x,2nh+)=U_y(x,2nh-)=\nu_n(x),\quad 0<x<2\tau,\ x\ne\tau(n=0,1)$, условиям согласования $\psi_{0n}(0)=0\,(n=0,1)$, где $\psi_{kn}(x)$ – заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

Теорема. *Если функции*

$$\psi_{kn}(x)\in C[k\tau,(2k+1)\tau/2]\cap C^2(k\tau,(2k+1)\tau/2)\,(k,n=0,1),$$

абсолютно интегрируемы на $[k\tau,(2k+1)\tau/2]\,(k=0,1)$, $\psi'_{kn}(x)$ *при* $x\to k\tau(k=0,1)$ *допускает интегрируемую особенность,* $\psi_{0n}(0)=0$, *то существует единственное при* $h\le 1/2$, $\tau\le 1/\sqrt{2}$ *решение* $U(x,y)$ *задачи* T.

Единственность решения задачи T следует из полученных в D^- и D^+ на $y=2kh$, $0<x<2\tau(k=0,1)$ неравенств соответственно $\beta_k=(-1)^k\int\limits_0^{2\tau}\omega_k(x)\nu_k(x)\,dx\ge 0(k=0,1)$ и $\beta_0+\beta_1\le 0, \beta_0+\beta_1++\iint\limits_{D^+}[(1-2\tau^2H(x-\tau))U_x^2(x,y)+(1-4h^2H(\tau-x)H(y-h))U_y^2(x,y)+\ +U^2(x,y)]dxdy\le 0$.

Вопрос **существования решения** задачи Т в области $D_{00}=D_{00}^+\cup D_{00}^-\cup I_{00}$ редуцируется к разрешимости разностного уравнения

$$(1+iR_x^{2ih})(\nu(x)+\int\limits_0^x\nu(t)\frac{\partial}{\partial x}I_0(i\sqrt{t(x-t)})dt)=q(x),$$

где $q(x)\in C^1(0,\tau)$.

Н. С. Ивлева (Ростов-на-Дону)
ivleva.n.s@yandex.ru

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОНВЕКЦИИ[1]

В докладе будет рассмотрена задача о $2\pi\omega^{-1}$-периодических по t решениях системы уравнений Навье-Стокса, для которой построена и обоснована формальная асимптотика. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega,\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$.

Рассмотрим систему уравнений в цилиндре $\overline{Q}=\overline{\Omega}\times\mathbb{R}:$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(v,\nabla)v=-\nabla p+\nu\Delta v+$$
$$+\omega\sum_{0<|k|\le m}a_k(x)e^{ik\omega t}T+\sum_{0\le|k|\le m}f_{1k}(x,v,\frac{\partial v}{\partial x},T,\frac{\partial T}{\partial x})e^{ik\omega t},$$
$$\frac{\partial T}{\partial t}+(v,\nabla T)=\chi\Delta T+$$
$$+\sum_{0\le|k|\le m}f_{2k}(x,v,\frac{\partial v}{\partial x},T,\frac{\partial T}{\partial x})e^{ik\omega t},$$
$$divv=0,\ v|_{\partial\Omega}=0,\ T|_{\partial\Omega}=h.$$

Здесь $m\in\mathbb{N},\omega$ — большой параметр, $\nu,\chi>0$.

Теорема 1. *Пусть* $\omega>\omega_0$, *где* ω_0 — *достаточно большое число, и пусть* $(u_\omega,p_\omega,T_\omega)$ — $2\pi/\omega^{-1}$*-периодическое по* t *решение исходной системы. Тогда выполняются следующие утверждения.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00402).

1) Построение любой частичной суммы (u^n, p^n, T^n) полной формальной асимптотики решения поставленной задачи при $\omega >> 1$ сводится к решению конечного числа не зависящих от ω линейных однозначно разрешимых задач. При этом все слагаемые частичных сумм рядов вещественны и бесконечно гладкие.

2) Для любых неотрицательных чисел l, m решение $(u_\omega, p_\omega, T_\omega)$ $\in \mathbb{C}^{l,m}(\overline{Q})$ и выполняются оценки

$$\|u_\omega - u^n\|_{C^{l,m}} + \|T_\omega - T^n\|_{C^{l,m}} \le c_{l,m,n}\omega^{-[n+1-\max(l-2,2m-2,0)]/2},$$

$$\|\nabla p_\omega - \nabla p^n\|_{C^{l,m}} \le c_{l,m,n}\omega^{-[n+1-\max(l,2m)]/2},$$

где $c_{l,m,n}$ — не зависящие от ω постоянные.

А. В. Казарников, С. В. Ревина (Ростов-на-Дону)
kazarnikov@gmail.com, revina@math.rsu.ru

БИФУРКАЦИЯ РОЖДЕНИЯ ЦИКЛА В ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЕННОМ УРАВНЕНИИ РЭЛЕЯ

Рассматривается пространственно-распределенное уравнение Рэлея

$$\begin{cases} v_t = \nu\Delta v + w \\ w_t = \nu\Delta w - v + \mu w - w^3 \end{cases} \qquad (1)$$

где $v = v(x,t)$, $w = w(x,t)$, $x \in D$, $t > 0$, $D \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ - ограниченная область, $\mu \in \mathbb{R}$ - управляющий параметр, $\nu > 0$ - фиксированный параметр, отвечающий за вязкость. Предполагается, что на границе области D заданы однородные условия Дирихле или смешанные краевые условия (Дирихле и Неймана).

Целью настоящей работы является построение асимптотики решений системы (1), ответвляющихся от тривиального решения при изменении управляющего параметра μ и фиксированном коэффициенте диффузии ν. Для получения вторичных решений применен метод Ляпунова-Шмидта в форме, развитой в работах В. И. Юдовича ([1,2]).

В работе явно найдены первые члены асимптотики, выведены формулы для общего члена разложения. Доказано, что вторичное решение представляет собой нечетный тригонометрический полином по переменной t. Доказано, что четные члены асимптотики равны нулю. Рассмотрены применения общей схемы к случаю одной и двух пространственных переменных и показано, что в этих случаях вторичные решения обладают дополнительными симметриями. Подробные выкладки приведены в депонированной работе ([3]).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Юдович В. И.* Возникновение автоколебаний в жидкости // ПММ. 1971. Т.35. № 4. С. 638–655.

2. Юдович В. И. Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима // ПММ. 1972. Т. 36. № 3. С. 450–459.

3. Казарников А. В., Ревина С. В. Бифуркация рождения цикла в пространственно-распределенной системе Рэлея. Деп. ВИНИТИ №242-В2013. 2013.

А. С. Калитвин(Липецк)
kalitvinas@mail.ru

О СИСТЕМАХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БАРБАШИНА (СИДУБ) [1]

В работе изучаются СИДУБ вида

$$\frac{\partial x_i(t,s)}{\partial t}=\sum_{j=1}^{n}\left[c_{ij}(t,s)x_j(t,s)+\int\limits_S k_{ij}(t,s,\sigma)x_j(t,\sigma)d\sigma\right]+f_i(t,s), \qquad (1)$$

где $i=1,\ldots,n$, $t\in J, s\in S$, J — конечный или бесконечный промежуток числовой оси, S — компактное множество в R^m, заданные функции c_{ij} и f_{ij} измеримы на $D=J\times S$, функции k_{ij} измеримы на $D\times S$, а интеграл понимается в смысле Лебега. В задаче Коши СИДУБ (1) рассматривается вместе с начальным условием $x_i(t_0,s)=\varphi_i(s)$ $(i=1,\ldots,n, t_0\in J,\ \varphi_i\in C(S))$.

Для изучения СИДУБ (1) можно интерпретировать (1) в виде дифференциального уравнения в банаховом пространстве и рассматривать классические решения этого уравнения. Данный метод хорошо развит при $n=1$. Другой метод связан с переходом к системе интегральных уравнений Вольтерра с частными интегралами, при этом решения уравнений понимаются в ином смысле.

Интегрируя уравнения СИДУБ (1) по отрезку $[t_0,t]$, получим

$$x_i(t,s)=\sum_{j=1}^{n}\left[\int\limits_{t_0}^{t}c_{ij}(\tau,s)x_j(\tau,s)d\tau+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_S k_{ij}(\tau,s,\sigma)x_j(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\right]+g_i(t,s), \quad (2)$$

где $g_i(t,s)=\varphi_i(s)+\int\limits_{t_0}^{t}f_i(\tau,s)d\tau,\ i=1,\ldots,n.$

Непрерывную на D вектор-функцию $x(t,s)=(x_1(t,s),\ldots,x_n(t,s))$ назовем решением системы (2) (СИДУБ (1)), если она абсолютно непрерывна по t для каждого $s\in S$ и удовлетворяет (2) ((1) для каждого $s\in S$ почти при всех $t\in J$). Решение системы (2) будем называть обобщенным решением задачи Коши для СИДУБ(1).

[1] Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (проект 1.4407.2011).

Классическое решение СИДУБ (1) есть решение в приведенном смысле, а решение есть обобщенное решение. Обратное неверно.

В докладе приводятся условия существования и единственности решения и обобщенного решения задачи Коши для СИДУБ (1).

В. А. Калитвин (Липецк)
kalitvin@gmail.com

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ[1]

Будем рассматривать интегральные уравнения с частными интегралами вида

$$x(t,s) = \int\limits_a^t c(\tau,s)x(\tau,s)d\tau + \int\limits_a^t\int\limits_c^d k(\tau,s,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + f(t,s), \qquad (1)$$

где $t \in [a,b], s \in [c,d], a \le \tau \le t, c \le \sigma \le d$, заданные функции $c(\tau,s), k(\tau,s,\sigma)$, $f(t,s)$ и $f'_t(t,s)$ непрерывны по совокупности переменных.

Пусть $C(D)$ — множество непрерывных на прямоугольнике $D = [a,b] \times [c,d]$ функций, а X — множество функций из $C(D)$, имеющих непрерывную частную производную по t. Под решением уравнения (1) будем понимать непрерывную функцию $x(t,s)$, подстановка которой в уравнение (1) обращает уравнение в тождество. Это решение $x \in X$ и оно единственно в $C(D)$. Интегральное уравнение (1) эквивалентно двумерному интегральному уравнению

$$x(t,s) = \int\limits_a^t\int\limits_c^d r(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + g(t,s) \equiv (Rx)(t,s) + g(t,s), \qquad (2)$$

где

$$r(t,s,\tau,\sigma) = e^{\int\limits_\tau^t c(\xi,s)d\xi} k(\tau,s,\sigma),$$

$$g(t,s) = \int\limits_a^t e^{\int\limits_\tau^t c(\xi,s)d\xi} f'_t(\tau,s)d\tau + f(a,s)e^{\int\limits_a^t c(\xi,s)d\xi}.$$

Для численного решения уравнения (2) применимы методы решения обычных линейных интегральных уравнений с непрерывными ядрами, в частности, метод механических квадратур. Таким образом, при численном решении уравнения (1) с частными интегралами целесообразно перейти к линейному двумерному интегральному уравнению (2). Непосредственные вычисления удобно проводить с применением пакетов Mathcad и Scilab или с использованием языка свободного программирования Python.

[1]Работа поддержана Минобрнауки России (проект № 1.4407.2011)

Ш. Т. Каримов (Фергана, Узбекистан)
shkarimov09@rambler.ru

ПРИЛОЖЕНИЕ МНОГОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ЭРДЕЙИ-КОБЕРА К УРАВНЕНИЮ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ОСОБЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

В настоящей работе, в области $\Omega = \{(x,t): \ x \in R_+^n, \ \ t \in R_+^1\}$ рассмотрим задачу нахождения решения $u(x,t)$ уравнения

$$u_{tt} + \left[\sum_{k=1}^{n} B_{\alpha_k-(1/2)}^{(x_k)} u(x,t)\right]^2 = F(x,t), \ (x,t) \in \Omega \tag{1}$$

удовлетворяющее начальным

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \ \ x \in R_+^n, \tag{2}$$

и граничным условиям

$$x_k^{2\alpha_k} \frac{\partial u}{\partial x_k}\bigg|_{x_k=0} = 0, \ \ x_k^{2\alpha_k} \frac{\partial^3 u}{\partial x_k^3}\bigg|_{x_k=0} = 0, \ t \in R_+^1, \ \ k = \overline{1,n}, \tag{3}$$

где $R_+^n = \{x \in R^n : x_k > 0, \ k = \overline{1,n}\}$, $\alpha_k \in R$, причем $0 < 2\alpha_k < 1, \ k = \overline{1,n}$; $F(x,t), \varphi(x), \psi(x)$ - заданные функции, а $B_{\eta_k}^{(x_k)} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \dfrac{2\eta_k+1}{x_k}\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ — оператор Бесселя по переменной x_k.

Применяя многомерный дробный интеграл Эрдейи-Кобера [1], получена явная формула, решения задачи $\{(1), (3)\}$ при $F(x,t) = 0, \psi(x) = 0$:

$$u(x,t) = \frac{1}{(2t)^n} \prod_{k=1}^{n} \left[x_k^{\frac{1}{2}-\alpha_k}\right] \int\limits_{R_+^n} \prod_{k=1}^{n} \left[\xi_k^{\frac{1}{2}+\alpha_k} J_{\alpha_k-\frac{1}{2}}\left(\frac{x_k \xi_k}{2t}\right)\right] \times$$

$$\times \cos\left[\frac{|x|^2 + |\xi|^2}{4t} - \frac{\pi}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k + \frac{n}{2}\right)\right] \varphi(\xi) d\xi,$$

где $|x|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$, $\ J_\nu(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка ν.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Самко С. Г., Кильбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 702 с.

С. Б. Климентов (Ростов-на-Дону, ЮФУ, ЮМИ ВНЦ РАН)
sklimentov@pochta.ru

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ НЕКАНОНИЧЕСКИХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Обозначим $D = \{z : |z| < 1\}$ единичный круг комплексной z-плоскости, E, $z = x + iy$, $i^2 = -1$; $\Gamma = \partial D$ — граница круга D; $\overline{D} = D \cup \Gamma$.

Рассмотрим в $\overline{D}$ общую равномерно эллиптическую систему первого порядка в комплексной записи

$$\partial_{\bar{z}}w - q_1(z)\partial_z w - q_2(z)\partial_{\bar{z}}\overline{w} + A(z)w + B(z)\overline{w} = 0, \tag{1}$$

$A(z)$, $B(z) \in L_s(\overline{D})$, $s > 2$, $q_1(z)$, $q_2(z) \in W_s^1(\overline{D})$.

Определение *Будем говорить, что решение $w(z)$ системы (1) принадлежит классу $H_p(q_1, q_2, A, B)$, $p > 0$, если оно для некоторой положительной постоянной $M_p(w) < +\infty$ удовлетворяет условию $\mu(\rho, w) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |w(\rho e^{i\sigma})|^p d\sigma \leq M_p(w)$, $\forall \rho : 0 \leq \rho < 1$, $\rho e^{i\sigma} = z \in D$.*

В предположениях [1] о краевом условии Римана-Гильберта и тех же обозначениях, справедлива

Теорема. *Если $\overset{(p)}{\varkappa} \geq 0$, то тогда однородная задача Римана-Гильберта имеет точно $\overset{(p)}{\varkappa} + 1$ линейно независимых в вещественном смысле решений класса $H_p(q_1, q_2, A, B)$, $p > 1$, а неоднородная задача разрешима в $H_p(q_1, q_2, A, B)$ при любой правой части краевого условия $g(t) \in L_p(\Gamma)$.*

Если $\overset{(p)}{\varkappa} < 0$, однородная задача не имеет ненулевых решений класса $H_p(q_1, q_2, A, B)$, $p > 1$, а неоднородная разрешима единственным образом тогда и только тогда, когда выполнены $k = -\overset{(p)}{\varkappa} - 1$ (вещественных) линейных условий на свободный член $g(t)$ краевого условия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Klimentov S. B.* Riemann-Hilbert Boundary Value Problem for Generalized Analytic Functions in Smirnov Classes // Global and Stochastic Analysis, Mind Reader Publications. 2011. V. 1, №2. PP. 217–240.

С. А. Корольков (Волгоград)
sergei.a.korolkov@gmail.com

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА НА КОНУСЕ МОДЕЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ [1]

В работе изучаются решения стационарного уравнения Шредингера $Lu \equiv \Delta u - c(x)u = 0$, где $c(x)$ — гладкая неотрицательная функция, причем $c(x) \not\equiv 0$. Пусть M — конус модельного многообразия, т.е. связное некомпактное риманово многообразие с некомпактным краем ∂M, представимое в виде $M = B \cup D$, где B — некоторый компакт, а D изометрично прямому произведению $(r_0, +\infty) \times G$ с метрикой $ds^2 = dr^2 + g^2(r)d\theta^2$. Здесь G — односвязная область на некотором компакте S с гладким краем $\partial G \neq \emptyset$, $d\theta^2$ — метрика на S.

Будем рассматривать на M решения стационарного уравнения Шредингера, причем всюду далее считаем $c(x) \equiv c(r) \not\equiv 0$ на D.

Пусть $n = \dim M$ и

$$I = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{1}{g^{n-1}(t)} \left(\int\limits_{r_0}^{t} [g^{n-3}(z) + c(z)g^{n-1}(z)]dz \right) dt.$$

Будем говорить, что на M однозначно разрешима задача Дирихле с непрерывными граничными данными, если для любой непрерывной на $\overline{G}$ функции $f(\theta)$ и любой непрерывной на ∂M функции $\varphi(y)$ такой, что $\lim\limits_{r\to\infty} \sup\limits_{\partial G} |\varphi(r,\theta) - f(\theta)| = 0$, существует единственное решение задачи

$$\begin{cases} Lu = 0 \text{ в } M, \\ u(y) = \varphi(y) \text{ для всех } y \in \partial M, \\ \lim\limits_{r\to\infty} \sup\limits_{G} |u(r,\theta) - f(\theta)| = 0. \end{cases}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если $I < \infty$, то на M однозначно разрешима задача Дирихле с непрерывными граничными данными.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-97038 р_поволжье_а).

В. Б. Левенштам (Ростов-на-Дону, Владикавказ)
vleven@math.rsu.ru

ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С ПРЕДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕЙ НА СПЕКТРЕ [1]

В работах [1], [2] построена и обоснована полная асимптотика периодического решения нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с высокочастотными коэффициентами, для которой матрица A стационарной усредненной задачи имеет простое нулевое собственное значение. В частности, в [1] по данным возмущенной системы построена некоторая матрица B и предполагается, что собственный вектор a_0, отвечающий нулевому собственному значению A, не имеет обобщенных присоединенных относительно пары матриц A, B векторов.

В работе [3] результаты [1, 2], относящиеся к построению формальных асимптотик перенесены на случай линейных параболических задач второго порядка.

В данном докладе основные результаты [1] об асимптотиках перенесены на случай линейных параболических задач второго порядка с полным обоснованием. Для простоты мы рассматриваем высокочастотные дифференциальные выражения только нулевого порядка.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *До Н. Т., Левенштам В. Б.* Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с большим параметром в критическом случае // Журн. выч. матем. и мат. физ. — 2011. — Т. 51, № 6. С. 1043–1055.

2.*До Н. Т., Левенштам В. Б.* Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с высокочастотными слагаемыми в критическом случае // Дифференц. уравн. — 2012. — Т. 48, № 8. С. 1190–1192.

3.*Гусаченко В. В., Ильичева Е. А., Левенштам В. Б.* Линейная параболическая задача. Высокочастотная асимптотика в критичеком случае // Журн. выч. матем. и мат. физ. — 2013. — Т. 53, № 7. С. 1067–1081.

И. В. Моршнева, Е. И. Петрова (Ростов-на-Дону)
morsh@math.sfedu.ru

БИФУРКАЦИЯ РОЖДЕНИЯ ЦИКЛА В ЗАДАЧЕ О ВОЗНИКНОВЕНИИ КОНВЕКЦИИ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ С ПРИМЕСЬЮ

Изучена бифуркация рождния цикла в динамических системах с группой симметрии $O(2)$ применительно к задаче о возникновении конвективных автоколебательных течений бинарной смеси в вертикальном слое

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00402).

между твёрдыми изотермическими границами с учетом эффекта термодиффузии. Возникающие в слое бинарной смеси движения описываются уравнениями конвекции в приближении Обербека-Буссинеска. Уравнения движения имеют стационарное (основное) плоскопараллельное решение с кубическим профилем скорости, линейным распределением температуры, концентрации и постоянным давлением.

Исследована задача о ветвлении периодических по времени режимов конвекции при колебательной потере устойчивости основного стационарного режима относительно плоских возмущений, периодических по вертикальной переменной. Показано, что в случае общего положения при переходе параметра через критическое значение от равновесия ответвляется три типа автоколебаний: две бегущие навстречу друг другу волны, связанные инверсионной симметрией, и нелинейная смесь пары бегущих волн. Получены явные выражения для асимптотик возникающих решений и для величин, определяющих тип их ветвления и устойчивость. Приводятся результаты численного анализа характера ветвления возникающих автоколебательных режимов конвекции в вертикальном слое жидкости с примесью. Для этого были рассчитны коэффициенты уравнений разветвления и некоторые соотношения между ними при различных значениях параметров. Проведенные вычисления показали, что и бегущие волны, и их нелинейная смесь могут быть устойчивы в зависимости от значений параметров. Обнаружено, что в данной задаче из шести теоретически возможных типов ветвления периодических режимов при рассмотренных значениях параметров реализуются пять.

А. К. Назаров (г. Ростов-на-Дону)
arturnazarov7@gmail.com

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1-ГО ПОРЯДКА С БОЛЬШИМ ПАРАМЕТРОМ [1]

Рассматривается задача с начальным условием для системы m дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, зависящих от большого параметра $\omega >> 1$:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \big[\lambda_j(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\mu_j(x,t,\omega t)\big] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} =$$
$$= f_i(x,t,\omega t,u) + \sqrt{\omega}\varphi_i(x,t,\omega t,u), \quad 1 \leqslant i \leqslant m,$$
$$u(x,0) = g(x),$$

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 06-01-00287-а).

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^* \in D_0 \subset \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T] \subset \mathbb{R}$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^*$ — искомая вектор-функция, компоненты которой зависят от переменных x и t.

Для этих систем разработан и обоснован эффективный алгоритм построения полной асимптотики решений, который базируется на методе двухмасштабных разложений. Нахождение коэффициентов асимптотики сводится, по существу, к решению конечного числа не зависящих от асимптотического параметра однозначно разрешимых задач Коши для систем линейных уравнений в частных производных 1-го порядка.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Капикян А. К., Левенштам В. Б.* Уравнения в частных производных первого порядка с большими высокочастотными слагаемыми // Жур. выч. мат. и мат. физ. 2008. Т. 48, № 11. С. 2024–2041.

А. В. Наседкин (Ростов-на-Дону)
nasedkin@math.sfedu.ru

ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ МАГНИТОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ С УЧЕТОМ ДЕМПФИРОВАНИЯ И ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭФФЕКТОВ [1]

В работе исследуются связанные начально-краевые и краевые задачи теории магнитоэлекроупругости. Моделируемая среда может рассматриваться как гомогенизированный композитный смесевой магнитоэлектрический материал (т.е. композит с магнитоупругой и электроупругой фазами) с эффективными свойствами.

Для полноты постановок и эффективности их практического использования в систему дифференциальных уравнений линейной теории магнитоэлекроупругости включены члены, отвечающие за демпфирование (трение, затухание). Краевые условия подразделялись на механические, электрические и магнитные и включали стандартные главные и естественные граничные условия, граничные условия контактного типа, а также граничные условия для моделирования поверхностных эффектов.

Граничные условия контактного типа необходимы для моделирования электродированных поверхностей и работы магнитоэлектрических устройств во внешних электрических цепях. Граничные условия, описывающие поверхностные эффекты (поверхностные напряжения, диэлектрические и магнитные пленки) предназначаются для возможности моделирования размерных эффектов при описании наноразмерных магнитоэлектрических структур.

Описан переход от постановок начально-краевых и/или краевых задач к обобщенным или слабым постановкам, введены специальные функцио-

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00943).

нальные пространства, установлены теоремы единственности, спектральные свойства и проанализирован метод разложения по собственным векторам для решения нестационарных задач и задач об установившихся колебаниях при специальном виде демпфирующих членов. Проанализированы математические свойства рассматриваемых задач без учета поверхностных эффектов и при их учете.

Обсуждаются также конечно-элементные аппроксимации задач магнитоэлектроупругости и свойства конечно-элементных матриц в разрешающих системах уравнений.

П. В. Николенко (Ростов-на-Дону)
ppdominikl@mail.ru

ВЫЧИСЛЕНИЕ МНОЖЕСТВА НЕОДНОЗНАЧНОСТИ В ЗАДАЧАХ С НЕПРЕРЫВНЫМИ ОПТИМАЛЬНЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

Пусть рассматривается задача теории управления

$$J(x,u)=\int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(x,u)\,dt\to\min,$$

$$\dot x=f(x,u),\quad x(t_0)=x^0,\quad x(t_1)=0,\quad u\in K\subset\mathbb{R}^n,$$

а именно: среди всех управлений u, переводящих x_0 в 0 указать то, которое минимизирует значение функционала J. Пусть задача такова, что экстремали (x,u) (процессы, для которых выполнен принцип максимума Понтрягина) имеют непрерывные управления u.

Определение. *Пусть u и $\widetilde u$ являются экстремалями, переводят точку $\widetilde x$ в 0 и $J(u)=J(\widetilde u)$. Точка $\widetilde x$ называется точкой неоднозначности. Множество точек неоднозначности обозначим N.*

Знание множества N во многих случаях позволяет дать полное описание оптимальных траекторий.

Предложен эффективный случай вычисления множества N. Указанный способ реализован для задач следующего вида:

$$J(u)=\int\limits_{t_0}^{t_1}(\alpha+\beta|u|^2)\,dt\to\min,\quad \dot x=v(x)+u,\ x(t_0)=x^0,\ x(t_1)=0,$$

v — гладкое векторное поле в $\mathbb{R}^2$, управление u таково, что $u(t)\in\mathbb{R}^2$, $\|u(t)\|\leqslant 1$ при различных α и β.

Л И Т Е Р А Т У Р А

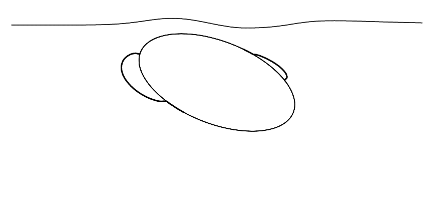
1. *Николенко П. В.* Множество неоднозначности и задача о наискорейших перемещениях в поле скоростей // Дифференциальные уравнения, 2014. № 3.

2. *Николенко П. В.* О наискорейших перемещениях в поле скоростей // Дифференциальные уравнения, 2011. № 5.

М. В. Норкин, А. А. Яковенко (Ростов-на-Дону)
norkin@math.rsu.ru

Математические вопросы возникновения кавитации на начальном этапе движения твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью

На начальном этапе движения твердого тела в жидкости с большими ускорениями возникают области низкого давления вблизи тела и образуются каверны. В общем случае, отрыв происходит сразу по нескольким различным участкам поверхности тела. При этом на связность зоны отрыва влияют такие факторы, как вращение цилиндра, наличие первоначально возмущенной жидкости, другие движущиеся тела. В главном приближении по времени исследование отрыва сводится к решению смешанной краевой задачи теории потенциала с односторонними ограничениями на поверхности тела. Для гладкой поверхности, в силу регулярности решения данной задачи в точках отрыва, выполняется условие Кутты—Жуковского, согласно которому скорость жидкости в этих точках должна быть конечной. Это дает возможность, на основании решения задачи с односторонними ограничениями, из соответствующего кинематического условия определить формы внутренних свободных границ жидкости на малых временах. Если поверхность тела не имеет угловых точек, то свободная граница пересекает ее под прямым углом. Эти углы сглаживаются с помощью построения специальных погранслойных решений.



Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Норкин М. В.* Образование каверны на начальном этапе движения кругового цилиндра в жидкости с постоянным ускорением // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 4. С. 74–82.

2. *Норкин М. В., Яковенко А. А.* Начальный этап движения эллиптического цилиндра в идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2012. Т. 52. № 11. С. 2060–2070.

С. Н. Овчинникова (Ростов-на-Дону)
ovch.09@mail.ru

БИФУРКАЦИИ КОРАЗМЕРНОСТИ 2 В ЗАДАЧЕ КУЭТТА-ТЕЙЛОРА С НЕПОДВИЖНЫМ ВНЕШНИМ ЦИЛИНДРОМ

На примере задачи Куэтта-Тейлора рассматриваются динамические системы с симметрией, зависящие от нескольких параметров. В пространстве параметров у этой задачи существуют точки бифуркаций высоких коразмерностей — значения параметров, которым отвечает несколько независимых ненулевых решений (нейтральных мод) линеаризованной на течении Куэтта системы Навье-Стокса. Взаимодействие нейтральных мод в малой окрестности каждой такой точки описывается нелинейной системой амплитудных уравнений на центральном многообразии. Для невращательно симметричных течений у задачи Куэтта-Тейлора имеется семь видов точек бифуркации коразмерности 2 (резонансы Res 0- Res 6) [1], которым соответствуют амплитудные системы, различающиеся дополнительными резонансными слагаемыми. Исследование амплитудных систем позволяет наблюдать появления вторичных, третичных и следующих за ними течений жидкости между вращающимися цилиндрами.

Существования различных точек резонансов зависит от направления вращения цилиндров. Впервые амплитудные системы были построены и изучены в работах В.И. Юдовича, G. Iooss и P. Chossat для точек Res 1 при вращении цилиндров в противоположные стороны. Если внешний цилиндр неподвижен и первая потеря устойчивости течения Куэтта происходит при критическом числе Рейнольдса R_{1*}, то на отрезке $[R_{1*}, 10R_{1*}]$ существуют лишь точки резонансов Res 0, Res 1. Результаты их расчета приводятся в докладе.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Yudovich V. I., Ovchinnikova S. N.*. Resonances in the codimension-2 bifurcations in the Couette-Taylor problem // J. Math. Fluid. Mech. 2009. Vol 11. №4. P. 469-491.

V. Rabinovich (Mexico)
vladimir.rabinovich@gmail.com

ESSENTIAL SPECTRUM OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS AND LIMIT OPERATORS

We consider general boundary value problems

$$\left\{ \begin{array}{c} Au(x) = \sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x), x \in \mathcal{D}, \\ \gamma_{\partial\mathcal{D}} A_k u(x') = \gamma_{\partial\mathcal{D}} \left(\sum_{|\alpha|\le m_k} a_{\alpha k}(x) D^\alpha u \right)(x') = f_k(x'), x' \in \partial\mathcal{D}, \\ k = 1, ..., m \end{array} \right. \quad (0.1)$$

in smooth unbounded domains $\mathcal{D}$ with conical exits at infinity. We suppose that the coefficients $a_\alpha, a_{\alpha k}$ belong to the space of bounded with all derivatives on $\bar{\mathcal{D}}$ functions. We associate with boundary value problem (0.1) a bounded linear operator

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{D}} : H^s(\mathcal{D}) \to H^{s-2m}(\mathcal{D}) \oplus_{k=1}^{m} H^{s-m_k-1\backslash 2}(\partial\mathcal{D})$$

and we define for $\mathfrak{A}_{\mathcal{D}}$ a family $\{\mathfrak{A}^g_{\mathcal{D}}\}$ of limit operators. We prove that $\mathfrak{A}_{\mathcal{D}}$ is a Fredholm operator if and only if the boundary value problem (0.1) is elliptic at every point $x \in \bar{\mathcal{D}}$ and all limit operators $\mathfrak{A}^g_{\mathcal{D}}$ are invertible.

We also consider a realization $\mathfrak{B}_{\mathcal{D}}$ of the differential operator A as unbounded operator in the Hilbert space $L^2(\mathbb{R}^n)$ with domain

$$D(A) = \left\{ u \in H^{2m}(\mathcal{D}) : \gamma_{\partial\mathcal{D}} A_k u = 0, k = 1, ..., m \right\}.$$

We prove that if the boundary value problem (0.1) is uniformly elliptic in $\bar{\mathcal{D}}$, then the essential spectrum of $\mathfrak{B}_{\mathcal{D}}$ is the union of the spectra of all limit operators.

А. Б. Расулов (Москва)
rasulov_abdu@rambler.ru

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ-РИМАНА С СИЛЬНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ В КОЭФФИЦИЕНТАХ

В классе эллиптических систем первого порядка особое место занимает обобщенная система Коши-Римана

$$\partial_{\bar{z}} U + A(z)U(z) + B(z)\overline{U} = F(z), \qquad (1)$$

где $2\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial_y -$оператор Коши-Римана, $A(z), B(z), F(z)$-заданные в ограниченной области G функции, $U(z)$-неизвестная функция. Существует несколько различных математических теорий уравнения (1), которые обобщают методы ТФКП, наиболее весомым из которых является теория обобщенных аналитических функций И.Н.Векуа [2]. Теория Векуа построена в предположении, что $A(z), B(z), F(z)$ принадлежат пространству $L^p(G), p > 2$. Поэтому даже уравнение с такими коэффициентами, как $A(z) = 1/z, B(z) = 1/\overline{z}$ не вписывается в теорию Векуа.

Развитие теории сингулярных интегральных уравнений[3] [4] во многом способствовало дальнейшему изучению уравнений с особыми коэффици-

[2] И. Н. Векуа Обобщенные аналитические функции. — М.:Физматгиз, 1988. — 509 с.

[3] Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М; Наука, 1968 — 511 с.

[4] Солдатов А.П. Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. Высшая школа. 1991г.-206с.

ентами. Исследованию задач для уравнения(1) с коэффициентами, имеющими особенности первого порядка в изолированной особой точке, посвящены работы Л. Г. Михайлова[5], Усманова З. Д., Н. Р.Раджабова, А. Тунгатарова, Р. Сакса, А. Ю. Тимофеева, и др. Понятия сверхсингулярных особенностей была введена в работах Н. Р. Раджабова[6].

В настоящей работе для уравнения вида (1), с коэффициентами имеющими степенные особенности вида $o(|z-z_0|^{-n}), \quad o(|z-\overline{z}|^{-n}), \quad o(|z\overline{z}-R^2|^{-n}), \quad n>0$, получены интегральные представления решений и исследована задача типа Римана-Гильберта.

С. В. Ревина (ЮФУ, Ростов-на-Дону; ЮМИ, Владикавказ)
revina@math.rsu.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ: ДЛИННОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА ЛИНЕЙНОЙ СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается двумерное движение вязкой несжимаемой жидкости под действием поля внешних сил $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)$, периодического по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами L_1 и L_2 соответственно, описываемое системой уравнений Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{v}-\nu\Delta\boldsymbol{v}=-\nabla p+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t), \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{v}=0.$$

Средняя по пространству скорость считается заданной. Предполагается, что один из пространственных периодов $L_2=2\pi/\alpha$ стремится к бесконечности, когда волновое число $\alpha\to 0$.

Строится длинноволновая асимптотика задачи устойчивости стационарного течения, когда основное поле скорости принадлежит классу параллельных (сдвиговых) течений

$$\boldsymbol{V}=(0,V_2)(x_1,\alpha x_2),$$

обобщающих классическое течение Колмогорова с синусоидальным профилем скорости

$$\boldsymbol{V}=(0,\gamma\sin x_1).$$

Предполагается, что среднее скорости основного течения отлично от нуля.

Линейная спектральная задача рассмотрена в [1], показано. что происходит колебательная потеря устойчивости. Настоящая работа посвящена

---

[5]Михайлов Л. Г. Новые классы особых инт-ных урав-й и его применение к дифф. урав. с сингулярными коэффициентами. Душанбе, Изд-во АН Тадж.ССР., 1987.

[6]Раджабов Н. Р. Введение в теорию дифф. уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэфф-ми. Душанбе Изд-во ТГУ,1992, — 236 с.

линейной сопряженной задаче. Сначала находятся первые члены асимптотики. Затем приводится алгоритм нахождения и выводятся рекуррентные формулы k-го члена асимптотики собственных функций сопряженной задачи. Коэффициенты разложений явно выражаются через некоторые вронскианы, применяются также интегральные операторы типа Вольтерра.

Полученные результаты предполагается применить для вывода общего члена асимптотики автоколебаний, ответвляющихся от основного течения.

М. Ю. Ремизов (Ростов-на-Дону)
Remizov72@mail.ru

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ АНТИПЛОСКОЙ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ДИФРАКЦИИ НА ТРЕЩИНЕ

Для дифракции при высокочастотном режиме распространенные численные методы связаны со значительными трудностями из-за большого числа узлов дискретизации. Различные асимптотические методы предлагались для решения этой проблемы [1-3].

В [4] был предложен новый метод, схожий с классическим методом "погранслоя". По существу это заключается в определенной факторизации символа ядра основного интегрального уравнения[5].

Если для однородной упругой среды в антиплоской задаче факторизация тривиальна, то для плоской задачи необходима аппроксимация факторизации функции Релея. В [4] предложена такая аппроксимация на всей вещественной оси.

В настоящей работе изучается SH-дифракция линейной конечной трещины, расположенной на границе двух различных упругих полупространств. Для символа ядра применяется новая эффективная факторизация, позволяющая получить решение в замкнутом виде.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ufimtsev P. Ya.* Fundamentals of the Physical Theory of Diffraction. John Wiley: Hoboken, New Jersey, 2007.

2. *Scarpetta E., Sumbatyan M. A.* Explicit analytical representations in the multiple high-frequency reflection of acoustic waves from curved surfaces: the leading asymptotic term, *Acta Acust. Acust.*, 2011, **97**, 115–127.

3. *Scarpetta E., Sumbatyan M. A.* An asymptotic estimate of the edge effects in the high-frequency Kirchhoff diffraction theory for 3—d problems, *Wave Motion*, 2011, **48**, 408–422.

4. *Remizov M. Yu., Sumbatyan M. A.* A semi-analytical method of solving problems of the high-frequency diffraction of elastic waves by cracks, *J. Appl. Math. Mech.*, 2013, **77**, P. 452–456.

5. *Mittra R, Lee S. W.* Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves, Macmillan: New York, 1971.

А. Р. Рустанов (Москва)
aligadzhi@yandex.ru
Н. Н. Щипкова (Оренбург)
ningeom@pochtamt.ru

ТОЖДЕСТВА КРИВИЗНЫ AC-МНОГООБРАЗИЙ КЛАССА NC_{11}

В работе [1] мы ввели в рассмотрение новый класс AC-многообра- зий, обобщающий класс AC-многообразий класса C_{11}, в классификации Чинья и Гонзалеза [2] и изучили некоторые свойства данного класса многообразий. В данной работе мы приводим некоторые результаты о геометрии NC_{11}-многообразий.

Теорема 1. *Не существует AC-многообразий класса NC_{11} ненулевой постоянной кривизны k. AC-многообразие класса NC_{11} нулевой постоянной кривизны является AC-многообразием класса C_{11}.*

Определение 1. AC-многообразие класса NC_{11} назовем NC_{11}-многообразием класса R_1, если его тензор римановой кривизны удовлетворяет тождеству

$$R(\Phi^2X,\Phi^2Y)\Phi^2Z+R(\Phi^2X,\Phi Y)\Phi Z+R(\Phi X,\Phi^2Y)\Phi Z-$$

$$-R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z=0;\forall X,Y,Z\in X(M).$$

Теорема 2. *AC-многообразие класса NC_{11} является NC_{11}-много- образием класса R_1 тогда и только тогда, когда $\forall X,Y,Z\in X)(M)$*

$$\nabla_{\Phi^2Z}(B)(\Phi^2X,\Phi^2Y)+\nabla_{\Phi Z}(B)(\Phi^2X,\Phi Y)+\nabla_{\Phi Z}(B)(\Phi X,\Phi^2Y)-$$

$$-\nabla_{\Phi^2Z}(B)(\Phi X,\Phi Y)=0.$$

Теорема 3. *AC-многообразие класса NC_{11} является NC_{11}-много образием класса R_1 тогда и только тогда, когда является многообразием класса C_{11}.*

Определение 2. AC-многообразие класса NC_{11} назовем NC_{11}-многообразием класса R_2, если его тензор римановой кривизны удовлетворяет тождеству

$$R(\Phi^2X,\Phi^2Y)\Phi^2Z+R(\Phi^2X,\Phi Y)\Phi Z-R(\Phi X,\Phi^2Y)\Phi Z+$$

$$+R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z=0;\forall X,Y,Z\in X(M).$$

Теорема 4. *AC-многообразие класса NC_{11} является NC_{11}-много- образием класса R_2 тогда и только тогда, когда*

$$A(Z,X,Y)=\frac{1}{4}\{\nabla_{\Phi_Y}(B)(\Phi^2Z,\Phi X)+\nabla_{\Phi Y}(B)(\Phi Z,\Phi^2X)+$$

$$+\nabla_{\Phi^2Y}(B)(\Phi Z,\Phi X)-\nabla_{\Phi^2Y}(B)(\Phi^2Z,\Phi^2X)\};\forall X,Y,Z\in X(M).$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Рустанов А.Р., Щипкова Н.Н.* Дифференциальная геометрия почти контактных метрических многообразий класса NC_{11}. Вестник ОГУ, №1 (150), 2013, 132–139.

2. *Chinea D., Gonzalez C.* Classification of almost contact metric structures. Annali di Matematica pura ed applicata (IV), v. CLVI, 1990, p. 15–36.

А. Ю. Савин, Б. Ю. Стернин (Москва)
a.yu.savin@gmail.com sternin@mail.ru

УНИФОРМИЗАЦИЯ И ИНДЕКС ОПЕРАТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ДИФФЕОМОРФИЗМАМИ МНОГООБРАЗИЯ

Пусть M — гладкое многообразие и $g : M \to M$ — диффеоморфизм. Развивается эллиптическая теория для операторов вида

$$D = \sum_k D_k T^k : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M). \qquad (1)$$

Здесь T — оператор сдвига $Tu(x) = u(g(x))$ вдоль траекторий диффеоморфизма g, D_k — (псевдо)дифференциальные операторы на M, а сумма предполагается конечной. Операторы (1) рассматривались Антоневичем, Конном, Лебедевым, Московичи, Назайкинским, Перротом, Савиным, Стерниным и др. В этих работах для ряда многообразий M и диффеоморфизмов g были установлены формулы индекса таких операторов.

В настоящей работе мы рассматриваем произвольные компактные гладкие многообразия и произвольные диффеоморфизмы. Даётся формула индекса таких операторов в терминах топологических инвариантов многообразия и символа оператора. Этот результат получен в рамках нового подхода — *псевдодифференциальной униформизации*. Идея этого подхода состоит в том, чтобы заменить оператор D, который существенно нелокален, на эллиптический псевдодифференциальный оператор с тем же индексом и затем применить классическую формулу Атьи-Зингера.

Отметим, что символ оператора D является элементом некоммутативной алгебры — скрещенного произведения $C^\infty(S^*M) \rtimes \mathbb{Z}$ алгебры функций на косферическом расслоении многообразия и группы $\mathbb{Z}$. Поэтому окончательная формула индекса естественно формулируется в терминах некоммутативной геометрии Конна, т.е. в циклических когомологиях скрещенного произведения.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *A. Savin, B. Sternin* . Index of elliptic operators for diffeomorphisms of manifolds. Journal of noncommutative geometry, 2014 (in print). ArXiv:1106. 4195, 2011.

2. *A. Savin, B. Sternin* . Uniformization of nonlocal elliptic operators and KK-theory. Russian Journal of Mathematical Physics, V. 20, No. 3 (2013), 345–359.

А. П. Сазонов (Волгоград)
sazonoff2007@gmail.com

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ НА МОДЕЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ [1]

В работе изучается поведение решений полулинейного эллиптического уравнения

$$\Delta u + p(x)u^{\gamma} = 0, \tag{1}$$

где $\gamma > 1$, а функция $p(x)$ дифференцируема на $(0;\infty)$ и $p(x) > 0$, на модельных римановых многообразиях. Опишем их подробнее.

Зафиксируем начало координат $0 \in R^n$ и некоторую гладкую функцию q на интервале $[0;\infty)$ такую, что $q(0) = 0$ и $q'(0) = 1$. Определим римановo многообразие M_q следующим образом:

1. Множеством точек M_q является R^n;

2. В полярных координатах $(r;\theta)$ (где $r \in (0;\infty)$ и $\theta \in S^{n-1}$) риманова метрика на $\{M_q \backslash 0\}$ определяется как

$$ds^2 = dr^2 + q^2(r)d\theta^2, \tag{2}$$

где $d\theta$ — стандартная риманова метрика на сфере S^{n-1};

3. Риманова метрика в 0 является гладким продолжением (2).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть многообразие M_q — такое, что*

$$\int_1^{\infty} \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)} < \infty$$

и

$$\frac{2}{\gamma+1} q^{\frac{n-2+\gamma(n-2)}{2}}(r) \frac{d}{dr}\left(q^{\frac{3n-2-\gamma(n-2)}{2}}(r)p(r)\int_r^{\infty} \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)}\right) -$$
$$-q^{n-1}(r)p(r) + (n-2)q^{2n-3}(r)q'(r)p(r)\int_r^{\infty} \frac{d\xi}{q^{n-1}(\xi)} \leq 0.$$

Тогда для любого $\alpha > 0$ уравнение (1) *имеет положительное радиально-симметричное решение, такое что $u(0) = \alpha$.*

Также получены условия, при которых уравнение (1) не содержит на M_q положительных радиально-симметричных решений.

---

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 13 – 01 – 97038_р_поволжье_а).

В. Ж. Сакбаев (Москва)
fumi2003@mail.ru

О ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Цель исследования — определить условия на начальные данные, необходимые и достаточные для коорректной разрешимости задачи Коши для уравнения Шредингера с вырожденным оператором:

$$i\frac{d}{dt}u(t) = \mathbf{L}u(t),\ t \in (0,T), \tag{1}$$

$$u(+0) = u_0,\ u_0 \in H, \tag{2}$$

где H есть гильбертово пространство $L_2(R)$, а $\mathbf{L}$ есть линейный симметричный оператор в пространстве H, заданный дифференциальным выражением

$$\mathbf{L}u(x) = \frac{d}{dx}(g(x)\frac{d}{dx}u(x)) + \frac{i}{2}[a(x)\frac{d}{dx}u(x) + \frac{d}{dx}(a(x)u(x))] \tag{3}$$

на максимальной области определения $D(\mathbf{L})$ — линейном многообразии функций из H, для которых выражение (3) определено как элемент пространства H. Здесь рассматривается модельная задача с вырождением на полупрямой: $g(x) = \theta(-x)$ и $a(x) = b\theta(x)$, где $\theta(x)$ – функция Хевисайда, а $b \in R$ – параметр задачи.

Теорема 1. *Если $b \leq 0$, то оператор $-i\mathbf{L}$ является генератором изометрической полугруппы $\mathbf{U}_{\mathbf{L}}(t) = e^{-it\mathbf{L}}$, $t > 0$, в пространстве H, а задача (1), (2) имеет единственное обобщенное решение $u(t) = \mathbf{U}_{\mathbf{L}}(t)u_0$, $t \in (0,T)$ при любом $u_0 \in H$, которое является сильным решением при $u_0 \in D(\mathbf{L}$.*

Если же $b > 0$, то оператор $-i\mathbf{L}^*$ генерирует в пространстве H сжимающую полугруппу $\mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(t) = e^{-it\mathbf{L}^*} = (\mathbf{U}_{-\mathbf{L}}(t))^*$, $t > 0$. В этом случае пространство H разлагается в прямую сумму подпространств $H_0 = \overline{\mathrm{Im}(\mathbf{U}_{-\mathbf{L}}(T))}$ и $H_1 = \mathrm{Ker}(\mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(T))$, а задача Коши (1), (2) имеет обобщенное решение тогда и только тогда, когда $u_0 \in H_0$, которое представимо в виде $u(t) = \mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(t)u_0$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Сакбаев В. Ж.* Задача Коши для линейного дифференциального уравнения с вырождением и усреднение аппроксимирующих ее регуляризаций // СМФН. 2012. Т. 43. С. 3–172.

Л. В. Сахарова (Ростов-на-Дону)
L_Sakharova@mail.ru

МЕТОД РАСЧЕТА НАЧАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИЭФ

Построен новый метод расчета начальных приближений для метода пристрелки решения задачи изоэлектрического фокусирования (ИЭФ) водного раствора амфолитов в естественных градиентах pH. Как было установлено в работе [1], непосредственное численное решение соответствующей краевой задачи требует предварительного аналитического преобразования задачи, а также применения специальных алгоритмов, представляющих собой комбинацию метода пристрелки с методом движения по параметру (плотности тока). Необходимость применения громоздкого метода движения по параметру вызвано тем, что точные начальные значения для метода пристрелки крайне малы и требуют хороших начальных приближений.

Метод расчета таких начальных приближений был построен на основе асимптотического решения задачи ИЭФ методом экспоненциальных функций с рядами по степеням большого параметра в показателе [2] и метода касательных [3]. Суть метода состоит в том, что профиль концентрации k-го амфолита аппроксимируются гауссовскими распределениями со смещением в окрестности изоточки $x_k I$:

$$\xi_k(x) = M_k \frac{\varphi_k(\psi)}{\varphi_k(\psi_k)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}\ \exp\left(-\frac{(x - x_k I)^2}{2\sigma_k^2} + b_k (x - x_k I)^3\right), \qquad (1)$$

причем параметры σ_k и b_k рассчитываются с помощью вышеуказанных методов. Здесь: ψ — функция кислотности, ψ_k — ее значение в изоточке, $\varphi_k = \delta_k + \mathrm{ch}(\psi - \psi_k)$ — вспомогательная функция; M_k и δ_k — константы. Формула (1) позволяет находить начальные приближения для метода пристрелки без движения по параметру и, как результат, существенно упростить численное решение задачи ИЭФ.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Сахарова Л. В.* Методы численного решения и тестирования жесткой интегро-дифференциальной задачи изоэлектрического фокусирования // Вестник ВГУ. Серия: физика, математика. 2012. № 2. С. 213–223.

2. *Сахарова Л. В.* «Волновое» асимптотическое решение задачи изоэлектрического фокусирования // Ученые записки ПетрГУ. Естественные и технические науки. 2013. № 4(133). С. 115–119.

3. *Сахарова Л. В.* Исследование жесткой интегродифференциальной задачи ИЭФ методом касательных // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2013. № 9/1 (110). С. 199–212.

В. И. Седенко (Ростов-на-Дону)
visedenko@mail.ru

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ МОДЕЛИ МАРГЕРРА-ВЛАСОВА С АНИЗОТРОПНЫМ ВНУТРЕННИМ ТРЕНИЕМ

Теорема. Пусть

$$w_0 \in \overset{0}{H}{}_2^2(\Omega),\ w_1 \in L_2(\Omega),\ U_0,\ V_0,\ U_1,\ V_1 \in \overset{0}{H}_2(\Omega),$$

$$X,\ Y \in L_p(\Omega \times [0, tg]),\ Z \in L_2(\Omega \times [0, tg])$$

для ограниченной области Ω с границей класса C^1. Тогда модель Маргерра-Власова с анизотропным внутренним трением имеет единственное обобщенное решение, причем и в случае, когда продольное внутреннее трение отсутствует .

При доказательстве используется метод, предложенный в [1],[2].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Седенко В. И.* Теорема единственности обобщенного решения начально-краевой задачи для уравнений Маргерра-Власова нелинейной теории колебаний пологих оболочек с малой инерцией продольных перемещений. // Известия АН СССР. Механика твердого тела - 1991, №6.

2. *Sedenko V. I.* On the Uniqueness Theorem for Generalized Solutions of Initial-Boundary Problems for the Maurguerre-Vlasov Vibrations of Shallow Shells with Clamped Boundary Conditions. // Applied Mathematics and Optimization V. 39. 1999.

Е. В. Сёмкина (Симферополь)
kozirno@gmail.com

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО ПОРЯДКА, НЕРАЗРЕШЁННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ [1]

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ задачу Коши для интегродифференциального уравнения второго порядка вида

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + F\frac{du}{dt} + Bu + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t G_k(t,s)C_k u(s)ds = f(t), \qquad (1)$$

$$u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1.$$

[1] Автор благодарит Н. Д. Копачевского за постановку задачи, а также за руководство работой.

Эта задача в случае самосопряжённых положительно определён-ных операторов F (оператор диссипации) и B (оператор потенциаль-ной энергии) изучена в [1]. В данной работе рассматривается вариант, когда эти операторы лишь ограничены снизу, т.е. в исследуемой дина-мической системе возможна подкачка энергии, причём система может быть статически неустойчива. Отметим, что в [2] в случае $A = I$ изучены некоторые классы интегродифференциальных уравнений второго порядка с неограниченными операторными коэффициентами.

Цель данной работы — выяснить ограничения на операторы F, B, C_k и оператор-функции $G_k(t,s)$, $k = \overline{1,m}$, при которых имеет место утверждение о существовании сильного решения задачи (1) со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2})$. При этом считается, что эти операторы сравнимы по своим областям определения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Копачевский Н. Д., Сёмкина Е. В.* Об интегродифференциальных уравнениях Вольтерра второго порядка, неразрешённых относительно старшей производной. // Ученые записки Таврического национального университета им.В.И.Вернадского. — Сер. «Физико-математические науки». —- 2013. —- Т. 26(65), № 1. — С. 52–79.

2. *Власов В. В., Медведев Д. А., Раутиан Н. А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и их спектральный анализ // Современные проблемы математики и механики. – Математика. — 2011. — Т. VIII., вып.1. — С. 8–306.

М. А. Сумбатян, А. Е. Тарасов (Ростов-на-Дону)
sumbat@math.rsu.ru

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ТЕОРИИ МАШУЩЕГО КРЫЛА

Теорией машущего крыла в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости в первой половине 20-го столетия занимались Бирнбаум, Кюсснер, Рейсснер (Германия), Чикала (Италия), Лаврентьев, Келдыш (Россия) и ряд других исследователей. Их подходы основывались на упрощенной модели плоской теории, в которой задача сводится к одномерному интегральному уравнению [1,2].

В данной работе рассматриваемая задача исследуется в рамках трехмерной теории. Упругое крыло, представляющее собой балку с насаженными на нее вдоль ее размаха хордами, расположенными в секущих плоскостях, ортогональных к линии балки, совершает гармонические колебания в однородном потоке. Углы установки хорд предполагаются малыми, что в рамках гипотезы малых возмущений позволяет получить линейную краевую задачу для уравнения Лапласа во внешности крыла. Применением преобразования Фурье задача сводится к двумерному интегральному уравнению:

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-1}^{1} du \int\limits_{-\lambda}^{\lambda} g(u,v)K(x-u,y-v)dv = D\,W\,, \quad \left\{ \begin{array}{c} |x| \le 1 \\ |y| \le \lambda \end{array} \right\},$$

$$K(x,y) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{i(\xi-\nu)}\, e^{-i(\xi x+\eta y)} d\xi d\eta - \tag{1}$$

$$-\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\nu^2+\eta^2}\, e^{-i(\nu x+\eta y)} d\eta\,, \quad \nu = \frac{\omega c}{u_0}\,, \quad D = i\nu + \frac{\partial}{\partial x}\,.$$

Здесь ω – частота колебания, c – полудлина хорды, u_0 – скорость набегающего потока, W – форма колебания крыла. Для решения уравнения (1) используется асимптотический метод по большому параметру относительного удлинения крыла λ, т.е. при $\lambda \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.

2. *Некрасов А. И.* Теория крыла в нестационарном потоке. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1947.

Т. А. Суслина (Санкт-Петербург)

suslina@list.ru

ТЕОРЕТИКО-ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД В ТЕОРИИ УСРЕДНЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ изучаются эллиптические операторы вида

$$\mathcal{B}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^{d} \left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j (a_j^\varepsilon(\mathbf{x}))^* \right) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}),$$

$\varepsilon > 0$. Здесь использовано обозначение $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varphi(\mathbf{x}/\varepsilon)$ для функций в $\mathbb{R}^d$. Все коэффициенты — матричные: g размера $m \times m$; a_j, Q, Q_0 размера $n \times n$. Матрицы $g(\mathbf{x})$ и $Q_0(\mathbf{x})$ предполагаются ограниченными и равномерно положительно определенными; $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^{d} b_l D_l$, b_l — постоянные $(m \times n)$-матрицы. Считаем, что $m \ge n$ и $\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n$, $0 \ne \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Коэффициенты $g(\mathbf{x})$, $a_j(\mathbf{x})$, $Q(\mathbf{x})$ и $Q_0(\mathbf{x})$ периодичны относительно некоторой решетки. Предполагается, что $a_j \in L_{2p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $Q \in L_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, где $p = 1$ при $d = 1$, $p > d/2$ при $d \ge 2$. Число $\lambda > 0$ таково, что оператор $\mathcal{B}_\varepsilon$ положительно определен.

Коэффициенты оператора $\mathcal{B}_\varepsilon$ быстро осциллируют при малом ε. С помощью теоретико-операторного подхода мы находим аппроксимации обратного оператора $\mathcal{B}_\varepsilon^{-1}$ в различных операторных нормах.

Теорема 1. *При* $0 < \varepsilon \leq 1$ *выполнены точные по порядку оценки*

$$\|\mathcal{B}_\varepsilon^{-1} - (\mathcal{B}^0)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1\varepsilon,$$
$$\|\mathcal{B}_\varepsilon^{-1} - (\mathcal{B}^0)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_2\varepsilon^2,$$
$$\|\mathcal{B}_\varepsilon^{-1} - (\mathcal{B}^0)^{-1} - \varepsilon K_1(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C_3\varepsilon.$$

Здесь $\mathcal{B}^0$ *— эффективный оператор с постоянными коэффициентами,* $K(\varepsilon)$ *и* $K_1(\varepsilon)$ *— подходящие корректоры.*

Результаты получены в [1], [2], а при $a_j = 0$ и $Q = 0$ — в предшествующих работах М. Ш. Бирмана и автора 2001–2006 гг.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Суслина Т. А.* Усреднение в классе Соболева для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка при включении членов первого порядка // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22, № 1. С. 108–222.

2. *Суслина Т. А.* Усреднение эллиптических систем с периодическими коэффициентами: операторные оценки погрешности в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с учетом корректора // Алгебра и анализ. В печати.

Е. В. Тюриков (Ростов–на–Дону)
etyurikov@pochta.ru

О КВАЗИКОРРЕКТНОСТИ ОБОБЩЁННОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ МЕМБРАННОЙ ТЕОРИИ ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК

Обобщённая граничная задача о реализации безмоментного напряжённого состояния равновесия тонкой упругой оболочки (задача R), серединная поверхность которой есть односвязная $W^{3,p}$– регулярная поверхность S ($p > 2$) положительной гауссовой кривизны с кусочно–гладким краем L, поставлена в [1]. Предполагается, что в каждой точке границы задана проекция вектора усилий на направление заданного вдоль L и принадлежащего поверхности S векторного поля $\overline{r}$, имеющего разрывы первого рода в угловых точках. В математической постановке задача R есть разрывная граничная задача Римана–Гильберта для обобщённых аналитических функций. Следует отметить, что смешанная граничная задача И. Н. Векуа, а также задача А. А. Гольденвейзера о сферических куполах есть частные случаи задачи R. Решение этих задач [2], [3] вносит определённый вклад в развитие мембранной теории выпуклых оболочек. Вводимое ниже понятие *существенной квазикорректности* представляется важным с точки зрения возможных приложений этой теории.

Определение. *Задача R называется SK–разрешимой (сущест-венно квазикорректной), если она квазикорректна для любого допустимого векторного поля $\overline{r}$.*

Дано геометрическое описание некоторых классов кусочно– гладких границ серединных поверхностей, для которых задача R является существенно квазикорректной. Для каждого из рассмотренных классов даётся оценка числа вещественных параметров, входящих в решение.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Тюриков Е. В.* Обобщённая граничная задача И. Н. Векуа мембранной теории выпуклых оболочек. Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и их приложениям. Владикавказкий научный центр РАН. 2010. Т. 4. С. 290–297.

2. *Тюриков Е. В.* Геометрический аналог задачи Векуа–Гольденвейзера // Доклады РАН. — 2009. — Т. 424, № 4. — С. 455–458.

3. *Тюриков Е. В.* Об одной граничной задаче мембранной теории выпуклых оболочек. Известия вузов Северо–Кавказского региона. Естественные науки. 2012. № 6. С. 38–41.

А. К. Уринов, Ш. Т. Нишонова (Фергана, Узбекистан)
urinovak@mail.ru

ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

В последнее время исследователи все чаще занимаются постановкой и исследованием задач с интегральным условием для уравнений в частных производных. Появился ряд работ, где исследованы задачи с интегральным условием для дифференциальных уравнений второго порядка параболического, гиперболического, эллиптического, смешанного типов, для системы гиперболических уравнений и для уравнений третьего порядка в прямоугольных областях. В данной работе формулируется и исследуются две задачи с интегральным условием для уравнений эллиптического типа в круге и полукруге.

Задача 1. Найти регулярное в круге $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ решение $u(x, y) \in C(\bar{K})$ уравнения Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$, удовлетворяющее нелокальному интегральному условию в виде

$$u(x,y) = \int\limits_0^1 q\,(x,y;r)\,u\,(rx,ry)\,dr + f\,(x,y), \qquad (x,y) \in \sigma, \tag{1}$$

где $q\,(x, y; r)$ и $f\,(x, y)$ - заданные непрерывные функции, а $\sigma = \partial K$.

Задача 2. Найти регулярное в полукруге $\Omega_0 = K \cap (y < 0)$ решение $u(x,\, y) \in C(\overline{\Omega}_0)$ уравнения $u_{xx} + u_{yy} + (2\beta/y)u_y = 0$, удовлетворяющее условиям (1) и $u(x, 0) = \tau(x)$, $x \in [-1, 1]$, где $\beta = const \in (0,\, 1/2)$, $\sigma =$

$\partial K \cap (y<0)$, а $q(x,y;r)$, $f(x,y)$ и $\tau(x)$ - заданные непрерывные функции, причем выполнят условия согласования

$$\tau(\pm 1)=\int_0^1 q(\pm 1,0;x)\tau(\pm x)dx+f(\pm 1,0).$$

Исследование показало, что справедливы следующее теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $f(x,y) \in C(\sigma)$, $q(x,y;r) \in C(\sigma \times [0,1])$, $|q(x,y;r)| \leqslant 1$ *для* $\forall(x,y;r) \in (\sigma \times [0,1])$. *Тогда, решение задачи 1 существует и оно единственно.*

Теорема 2. *Пусть* $f(x,y) \in C(\bar\sigma)$, $\tau(x) \in C[-1,1]$, $q(x,y;r) \in C(\bar\sigma \times [-1,1])$, $|q(x,y;r)| \leqslant 1$ *для* $\forall(x,y;r) \in (\overline{\sigma} \times [-1,1])$. *Тогда, решение задачи 2 существует и оно единственно.*

Ш. Р. Фармонов (Фергана, Узбекистан)
farmonovsh@mail.ru

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ГУРСА В ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА

Пусть Ω - конечная односвязная область плоскости xOy, ограниченная отрезками $\overline{OB}=\{(x,y): x-y=0,\ 0\le x\le (1/4)\}$, $\overline{OE}=\{(x,y): x+y=0,\ 0\le x\le (1/4)\}$, и дугами $BA=\{(x,y): \sqrt{x}+\sqrt{y}=1,\ (1/4)<x<1,\ y>0\}$, $EA=\{(x,y): \sqrt{x}+\sqrt{-y}=1,\ (1/4)<x<1,\ y<0\}$, а $\Omega_1=\Omega\cap\{(x,y): x>0, y>0\}$, $\Omega_2=\Omega\cap\{(x,y): x>0, y<0\}$, $OA=\{(x,y): y=0,\ 0<x<1\}$.

В Ω рассмотрим четыре варианта задачи Гурса для уравнения

$$x^m u_{xx}-|y|^m u_{yy}+\alpha x^{m-1}u_x-sign(y)x^{m-1}\alpha u_y=0, \quad (1)$$

где $m-1<\alpha=const<(m/2)$, $m<2$.

Задача Γ_1. Найти функцию $u(x,y)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$, удовлетворяющую следующим условиям: 1) в Ω_1 и Ω_2 есть обобщенное решение уравнения (1) из класса R_2[1]; 2) выполняются условия склеивания

$$\lim_{y\to -0}(-y)^\alpha u_y(x,y)=\lim_{y\to +0}y^\alpha u_y(x,y), \qquad 0<x<1; \qquad (2)$$

3) удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{\overline{OB}}=\psi_1(x), \quad u(x,y)|_{\overline{OE}}=\psi_2(x),\ 0\le x\le (1/4).$$

Задача Γ_2. Найти функцию $u(x,y)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$, удовлетворяющую условиям 1), 2) задачи Γ_1 и краевым условиям

$$u(x,y)|_{\overline{OE}}=\psi_2(x),\ 0\le x\le (1/4);\ u(x,y)|_{\overline{EA}}=\psi_3(x),\ (1/4)\le x\le 1.$$

Задача Γ_3. Найти функцию $u(x,y)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$, удовлетворяющую условиям 1), 2) задачи Γ_1 и краевым условиям

$$u(x,y)|_{\overline{OE}}=\psi_2(x),\ 0\le x\le (1/4);\ u(x,y)|_{\overline{BA}}=\psi_4(x),\ (1/4)\le x\le 1.$$

Задача Γ_4. Найти функцию $u(x,y)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$, удовлетворяющую условиям 1), 2) задачи Γ_1 и краевым условиям

$u(x,y)|_{\overline{EA}} = \psi_3(x),\ (1/4) \le x \le 1;\ u(x,y)|_{\overline{BA}} = \psi_4(x),\ (1/4) \le x \le 1.$
Здесь $\psi_j(x),\ j = \overline{1,4}$ - заданные непрерывные функции, причем $\psi_1(0) = \psi_2(0)$, $\psi_3(1) = \psi_4(1)$, $\psi_2(1/4) = \psi_3(1/4)$.

Исследование показало, что если $\psi_j(0) = 0,\ \psi_j(x) \in C^2[0,1/4],\ j = \overline{1,2}$ и $\psi_k(x) \in C^2[1/4,1],\ \psi_k'(x) = (t-1/4)^{\delta}\mathtt{O}(1),\ \delta \ge 1,\ \ k = \overline{3,4}$, тогда задачи $\Gamma_j,\ j = \overline{1,4}$ имеют единственные решения.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Исамухамедов С. С., Орамов Ж.* О краевых задачах для уравнения смешанного типа второго рода с негладкой линией вырождения. Дифференциальные уравнения. - Минск, 1982, Т.18, № 2, стр. 324-334.

И. Д. Цопанов (Владикавказ)
55tsopanovig@gmail.com

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\, u(x,t)}{\partial\, t} = \frac{\partial^2\, u(x,t)}{\partial\, x^2} + q(x)u(x,t), \\ &u(0,t) = 0,\ u_x(0,t) = u_x(1,t)\ (0 \le t \le T), \\ &u(x,0) = \varphi(x)\ (0 \le x \le 1). \end{aligned} \tag{1}$$

При $q \equiv 0$ эта задача изучена в работе [1]. В частности, в ней рассмотрен дифференциальный оператор L, определяемый равенствами

$$Ly = -y'',\quad 0 < x < 1,\quad y(0) = 0.\ \ y'(0) = y'(1).$$

Установлено, что последовательность корневых векторов $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ оператора L образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, т.е. L - спектральный оператор (см.[2]). Легко показать, что верно представление

$$L = S + N,$$

где S - нормальный оператор, а N - неограниченный, но на каждом конечномерном подпространстве - ограниченный нильпотентный оператор, обладающий свойством: оператор $(S - zI)^{-1}N\ \ \forall z \in \varrho(S)$ может быть продолжен до компактного оператора, определенного на всем пространстве. Основной результат:

Теорема 1. *Оператор L является генератором C_0-полугруппы*

$$U(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k\, t} e^{Nt} P_{\lambda_k},$$

где P_{λ_k} – спектральные проекторы оператора L.

Используя приведенный результат можно получить разрешимость задачи (1) для любой функции $q \in L_2(0,1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения, 1977. Т. 13, № 2, С.294-304.

2. *Данфорд Н. Шварц Дж.* Линейные операторы. Спектральные операторы. М.: Мир, 1974. 661 с.

Е. В. Ширяева, М. Ю. Жуков (Ростов-на-Дону)
shir@sfedu.ru, zhuk@math.rsu.ru

О ВАРИАНТЕ МЕТОДА ГОДОГРАФА ДЛЯ КВАЗИГАЗОВЫХ НЕУСТОЙЧИВЫХ СРЕД[1]

Для исследования поведения квазигазовых сред, описываемых уравнениями $\rho_t + (\rho v)_x = 0$, $v_t + v v_x = -p_x$, $p(\rho) = -m\rho^{1/m}$ для плотности $\rho(x,t)$, скорости $v(x,t)$ и давления $p(\rho)$ (среда с отрицательной сжимаемостью: $p'(\rho) < 0$), в [1] использован метод годографа, преобразующий квазилинейные уравнения к линейному эллиптическому уравнению $t_{zz} + t_{rr} + (1+2m)r^{-1}t_r = 0$ для функции $t(r,z)$, $r = \rho^{1/2m}$, $z = v/2m$, и аналогичному уравнению для функции $x(r,z)$. При различных $m = -2, \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, помимо газа Чаплыгина ($m = -\frac{1}{2}$), уравнения описывают широкий круг физических явлений — возмущения кноидальных волн и солитонов для нелинейного уравнения Шредингера, КдВ и др. [1]. Метод годографа применим и к исследованию переноса массы электрическим полем в многокомпонентных средах [2], в частности, для случая комплексных инвариантов Римана $\mathcal{R}(x,t) = \frac{1}{2}(z - ir)$ и уравнения $\mathcal{R}_t + \mathcal{R}|\mathcal{R}|^2\mathcal{R}_x = 0$.

В настоящей работе, с применением идей о законах сохранения [3], решение $t(r,z)$ уравнения с периодическими «начальными» данными строится методом более эффективным, чем в [1], — при помощи функции Римана: $V(r,z|R,Z) = (r/R)^{m+\frac{1}{2}} P_{m-\frac{1}{2}}\left(\frac{(z-Z)^2+r^2+R^2}{2Rr}\right)$, где P_μ — функция Лежандра [4]. Метод применим ко всем упомянутым в [1] задачам, а для уравнения $\mathcal{R}_t + \mathcal{R}|\mathcal{R}|^2\mathcal{R}_x = 0$ позволяет построить аналитические решения и провести расчеты, в частности, с помощью МКЭ [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жданов С. К., Трубников Б. А.* Квазигазовые неустойчивые среды. М.: Наука, 1991.
2. *Жуков М. Ю.* Массоперенос электрическим полем. Ростов/Д: Изд. РГУ, 2005.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части тех. задания 213.01-11/2014-1 Мин. Обр. Науки РФ, Южный федеральный университет.

3. *Senashov S. I., Yakhno A.* Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity // SIGMA. 2012. Vol. 8. 16 p.
4. *Copson E. T.* On the Riemann-Green Function // Arch. Ration. Mech. Anal. 1958. Vol. 1. P. 324–348.
5. *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.* Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики. Ростов/Д: Изд. ЮФУ, 2008.

Э. Л. Шишкина (Воронеж)
ilina_dico@mail.ru

ВЕСОВОЕ СФЕРИЧЕСКОЕ СРЕДНЕЕ КАК РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть $\mathbb{R}_n^+ = \{x = (x_1, ..., x_n)\in\mathbb{R}_n : x_1>0, \ldots, x_n>0\}$, пространство $C^2_{ev}(\mathbb{R}_n^+)=\{f \in C^2(\mathbb{R}_n^+) : f'_{x_i}(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n)=0\,\forall i=1, ..., n\}$, мультииндекс $\gamma=(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ состоит из фиксированных положительных чисел и $|\gamma|=\gamma_1 + ... + \gamma_n$.

Весовое сферическое среднее определяется формулой (см. [1,2])

$$M_r^\gamma f(x) = \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int\limits_{S_1^+(n)} T_x^{ry} f(x) y^\gamma dS, \text{ где } y^\gamma = y_1^{\gamma_1} \ldots y_n^{\gamma_n},$$

константа $|S_1^+(n)|_\gamma$ вычисляется по формуле (1.2.5), расположенной на стр. 20 в книге [3], в которой надо положить $N = n$, T_x^y – многомерный обобщенный сдвиг: $T_x^y = \prod\limits_{i=1}^n T_{x_i}^{y_i}$, где каждый из одномерных обобщенных сдвигов $T_{x_i}^{y_i}$ определен в [4] на стр. 121, где $\gamma_i = 2p + 1$, $i = 1, ..., n$.

Теорема 1. *Весовое сферическое среднее функции $f(x)\in C^2_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ удовлетворяет уравнению (типа уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу):*

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right) M_r^\gamma f(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n+|\gamma|-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) M_r^\gamma f(x),$$

и условиям $M_0^\gamma f(x) = f(x), \quad (M_r^\gamma f(x))'_r|_{r=0} = 0.$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ляхов Л. Н., Половинкин И. П., Шишкина Э. Л.* Об одной задаче И.А. Киприянова для сингулярного ультрагиперболического уравнения // Диф. уравнения. 2014. Т. 50, № 4. С. 516–528.

2. *Киприянов И. А., Засорин Ю. В.* О фундаментальном решении волнового уравнения с многими особенностями и о принципе Гюйгенса // Диф. уравнения. 1992. Т. 28. № 3. С. 452–462.

3. *Ляхов Л. Н.* B-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с B-потенциальными ядрами. Липецк: ЛГПУ, 2007. — 232 с.

4. *Левитан Б. М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. // Успехи матем наук. 1951. Т. 6, В. 2 (42), С. 102–143.

Секция V
Математика в естествознании, интеллектуальные системы и компьютерные науки

С. М. Айзикович, А. С. Васильев, С. С. Волков, Б. И. Митрин
(Ростов-на-Дону)
andre.vasiliev@gmail.com

ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ[1]

В работе развивается асимптотический метод [1] решения осесимметричных и плоских контактных задач линейной теории упругости, термоупругости и электроупругости для неоднородных по глубине тел. С использованием метода интегральных преобразований, решение задач сведено к решению парных интегральных уравнений. Трансформанта ядра интегрального уравнения, в случае произвольного закона неоднородности, строится численно. Аппроксимируя трансформанту ядра интегрального уравнения функцией следующего вида:

$$L(u) \approx L_N(u) = \prod_{i=1}^{N} \frac{u^2 + A_i^2}{u^2 + B_i^2}, A_i, Bi \in C$$

переходим к решению приближенного интегрального уравнения задачи, которое строится аналитически [1]. Полученные решения являются асимптотически точными при малых и больших значениях геометрического параметра задачи, равному отношению толщины неоднородного покрытия к радиусу зоны контакта.

Используя описанный метод, построены решения контактных задач о вдавливании штампа в трансверсально-изотропное полупространство с неоднородным по глубине трансверсально-изотропным покрытием и о вдавливании горячего штампа в термоупругое изотропное полупространство с неоднородным по глубине покрытием. Кроме того, построены аналитические формулы для смещений на поверхности трансверсально-изотропного электроупругого полупространства с неоднородным по глубине трансверсально-изотропным покрытием в случае действия нормальной точечной силы и точечного заряда.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Айзикович С. М.* Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред // Прикладная математика и механика. 1982. Т. 46, № 1. С. 148–158.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-08-01435-а, 13-07-00954-а, 14-07-00705-а).

В. А. Бабешко, О. В. Евдокимова, О. М. Бабешко,
Д. В. Грищенко, А. Г. Федоренко (Краснодар)
babeshko41@mail.ru

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ ПРИРОДНЫХ ПРОЦЕССОВ[1]

Изложены теоретические основы локализационной трактовки некоторых аномальных природных процессов. На примере смешанной граничной задачи теплопроводности показано, что ряд хорошо известных аномальных природных процессов весьма наглядно истолковывается как результат проявления «природного вируса», математического объекта, более общего, чем принятый в теории упругости «вирус вибропрочности» [1]. Им описываются модели, дающиелокализацию энергии природных процессов, но в значительно меньшей степени, чем в случаях ураганов и смерчей. Однако диапазон природных явлений, которые возможно объяснять на основе введенного феномена, значительно шире. Найдены математические выражения, названные для краткости «условиями вируса», в отличие от «условий статичности», фигурировавших в вирусах вибропрочности.Ониявляются математическими соотношениями, при которых природный вирус проявляется.Природные вирусы являются более общими, чем вирусы вибропрочности, возникающие лишь при вибрации протяженных тел и нуждающиеся в наличии у символов интегральных уравнений граничных задач вещественных нулей и полюсов. Показано, что «условия вируса» были известны и ранее, как условия статичности, однако понять их универсальную роль, в том числе, в природных процессах, удалось лишь недавно. В сопоставлении с уже хорошо изученными аномальными явлениями, такими, как мощные спиралевидные ураганы, рассматриваются ненастья, формируемые природными вирусами, происходящие от взаимодействия теплых и холодных сред. Приведены примеры сопоставления природного вируса и вируса вибропрочности в задачах теории упругости.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Бабешко В.А., Ритцер Д., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О локализации энергии природных процессов и природные вирусы // ДАН. 2013. Т. 448. № 4. С. 406–409.

[1]Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке грантов РФФИ (12-01-00330), (12-01-00332), (13-01-96502), (13-01-96505), (13-01-96509), (13-01-96508), (14-08-00404), (13-01-12003)-м, гранта Президента РФ НШ-1245.2014.1 и МК-2652.2013.1.

Н. В. Боев, Е. В. Андрющенко (Ростов-на-Дону)
boyev@math.rsu.ru

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДАВЛЕНИЯ В ОБРАТНО ОТРАЖЕННЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ ОТ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАССЕИВАТЕЛЕЙ КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

При формировании звуковых полей в помещениях различного назначения наряду с плоскими отражателями, дифракция на поверхностях которых рассчитывается достаточно просто, применяются твердые отражатели канонической формы. Как правило, в практических схемах расчета акустики помещений граничные поверхности неплоских пространственных отражателей заменяются набором плоских граней вписанного в поверхность или описанного около нее многогранника. В уточненных схемах расчета звуковых полей необходим явный учет искривленности поверхностей через параметры кривизны поверхностей отражателей в точках зеркального отражения. На основе полученной общей формулы для давления в однократно отраженной высокочастотной акустической волне исследовано обратное рассеяние волны на граничных поверхностях отражателей канонической формы: сферы, цилиндра, трехосного эллипсоида, однополостного и двуполостного гиперболоида, эллиптического и гиперболического параболоида. Общая формула получена на основе физической теории дифракции Кирхгофа в приближении геометрической теории дифракции. Проведен качественный и количественный анализ амплитуды давления в отраженной волне в зависимости от удаленности источника и приемника волны от поверхностей пространственных отражателей и плоских отражателей, расположенных в касательных плоскостях к отражающим поверхностям в точках зеркального отражения.

Р. М. Гаврилова, Г. С. Костецкая (Ростов-на-Дону)
galina.kostezkaya@gmail.com

О САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

В связи с резким сокращением количества часов по ДУ на физическом факультета ЮФУ возникала необходимость обратить особое внимание на самостоятельную работу студентов (С.Р.С.), как внеаудиторную, так и аудиторную, которая являясь важной формой образовательного процесса, должна стать его основой.

Для внеаудиторной работы нами составлена база заданий по всем типам ОДУ разного уровня сложности: здесь и задания, где необходимо просто определить тип уравнения и указать метод его решения, и задания, где нужно решить уравнения и найти частное решение (это особенно важно при решении задач) и творческие задания, где используя знания лекционного материала, необходимо решить задачу типа: зная фундаментальную систему решений уравнения составить уравнение, доказать линейную независимость заданной системы функций и др. Учитывая, что мы имеем дело со студентами-физиками, особое внимание уделяется задачам по нахождению математических моделей некоторых задач с физическим содержанием; при этом рассматриваются такие задачи, математические модели которых могут быть представлены в виде ДУ различных типов. Это несомненно повышает мотивацию к получению знаний и интерес студентов к изучаемому курсу. Аудиторная С.Р.С. реализуется в основном при проведении практических занятий и частично во время чтения лекций (здесь можно проводить экспресс-опрос с оценкой по конкретным темам (max 5–10 мин.), тестовый контроль и др.). Весь курс разбит на три модуля и в каждом из них проводится по две мини-самостоятельные работы по теме с использованием заданий из имеющейся базы. При этом у преподавателя появляется возможность осуществлять контроль с одной стороны и повысить активность студентов с другой. В конце модуля проводится контрольная работа, которая является одним из основным видов С.Р.С.

Для успешной реализации данной методики организована информационно-компьютерная помощь. На сайте ЮФУ размещены необходимые методические материалы, которые регулярно пополняются по мере изучения тем. При обучении используется рейтинговая система, которая обеспечивает наибольшую информационную продуктивность самостоятельной познавательной деятельности студентов.

Карташева Л.В. (Ростов-на-Дону)
kartasheva@mail.ru

АНАЛИЗ УРОВНЯ ТОРГОВОГО ПРЕДПРИЯТИЯ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

В данной работе создана экспертная система для оценки уровня торгового предприятия. Экспертные системы — это прикладные системы искусственного интеллекта, в которых база знаний представляет собой формализованные эмпирические знания высококвалифицированных специалистов (экспертов) в какой-либо узкой предметной области. Они предназначены для помощи экспертам (или их замены) в силу дефицита профессиональных экспертов, недостаточной оперативности в решении задач, отсутствия достоверной информации.

Прежде всего, при создании экспертной системы, необходимо собрать все, относящиеся к делу факты. Факты собираются в процессе исследования рынка, изучения объектов торговли и качества торгового предприятия. Экспертные системы находят все большее применение в коммерческой деятельности, собирая, суммируя знания и опыт высококвалифицированных специалистов и используя их в практической деятельности неограниченное число раз.

В данной работе составляется ряд вопросов, ответы на которые дадут значения весовых факторов. Это могут быть, например, такие вопросы:

1. Процент работников с высшим образованием.
2. Возраст обслуживающего персонала.
3. Имеется ли автостоянка возле данного торгового предприятия.
4. Имеет ли данное торговое предприятие автоматические двери.
5. Площадь торгового зала.
6. Оснащенность компьютерами и т.д.

Каждый ответ на вопрос отмасштабирован согласно шкале важности от 1 до 10. Чем больше число, тем важнее положительный ответ на этот вопрос для решения задачи об уровне торгового предприятия. Эти числа и называются весовыми факторами. Каждому положительному или отрицательному ответу на поставленный вопрос ставится в соответствие значение весовой функции. Значения весовых функций суммируются и, в зависимости от величины полученной суммы, формируется ответ об уровне данного торгового предприятия.

Разделяя базу знаний системы на отдельные группы, можно исключить те, в которые предприятие, рассматриваемой экспертной системы, в какой-то определённый момент времени не входит. Информация локализуется по группам и уже не представляется столь громоздкой и неуправляемой. Соответственно, упрощаются и задачи программирования. Исследование торгового предприятия проводится в зависимости от того, к какой классификационной группе по форме собственности оно относится (частная фирма, государственное предприятие, муниципальное предприятие) Программа, реализующая описанный подход, написана на языке Visual Basic. Состоит программа из четырех частей:

1. Получение данных;
2. Расчеты полученных данных;
3. Анализ полученных данных;
4. Вывод результата.

Программа на языке Visual Basic, реализующая описанный подход, использует весовые факторы, подсчитывая их суммы. Она позволяет провести тестирование различных торговых предприятий и оценить их уровень.

И. В. Колесников (Ростов-на-Дону)

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ТОНКИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЯХ ТРИБОКОНТАКТА

Существующими методами теплового расчета нельзя определить характер изменения температурного поля в тонких поверхностных слоях трибоконтакта с учетом изменений свойств последнего. Для решения такого рода задач в триботехнике целесообразно использовать асимптотические методы. Однако, асимптотический анализ для дифференциальных операторов имеет развитую теорию главным образом для случая регулярных возмущений, когда последние носят подчиненный характер по отношению к невозмущенному оператору. Изучение особенностей поведения поверхностных слоев трибоконтакта требует разрешения сингулярно возмущенных задач с малым параметром при старшей производной. Нами для нахождения температурного поля в погранслоях трибосистемы применен метод регуляризации сингулярно возмущенных задач с помощью перехода в пространство безрезонансных решений, которое индуцируется исходной задачей. Это индуцированное пространство определяется по спектральным характеристикам исходного оператора, что дает возможность использовать спектральную теорию оператору. Данный метод позволяет строить решения для случая, когда предельная задача качественно отличается от исходной, или возмущенной, т.е. для всевозможных неравномерностей в физических системах, в частности, когда в поверхностной зоне фрикционного контакта возникают градиенты со сменой своего направления.

Расчет температурного поля проведен для конкретного сопряжения — колесо-тормозная колодка подвижного состава, как наиболее характерная и широко распространенная трибосистема «вал – частичный подшипник». Расчеты показывают наличие подповерхностного максимума у нестационарной составляющей температурного поля. Это означает, что максимальная температура достигается не на поверхности, а внутри колеса (вал.), т.е. в поверхностном фрикционном слое трибосопряжения создается отрицательный температурный градиент.

Наличие подповерхностного максимума подтверждается результатами эксперимента, основанного на применении поверхностных акустических волн Рэлея. Полученные результаты позволят разрабатывать новые методы управления фрикционными свойствами в трибосистемах, а также предотвращать отрицательные эффекты в случае диффузии, например наводороживания и сегрегации.

М. В. Копелиович (Ростов-на-Дону)
kop@km.ru

ПРИМЕНЕНИЕ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ МЕТОДА УДАЛЕННОЙ ПУЛЬСОМЕТРИИ

Существуют различные методы регистрации пульса, в том числе электрокардиография или плетизмография. Но долгосрочное отслеживание пульса в реальном времени должно быть основано на бесконтактном методе регистрации, при котором процесс регистрации пульса не отвлекает человека и является для него удобным. Был предложен метод дистанционной регистрации пульса с помощью анализа видеоряда, содержащего лицо человека[1]. Он основан на предположении, что динамика изменения цвета кожи зависит от пульса. Предлагаемый метод регистрации пульса отличается от вышеупомянутого метода рядом особенностей, позволяющих уменьшить влияние шумов[2].

Для определения пульса используется одномерный массив, полученный по N последним значениям цвета кожи. К массиву применяется быстрое преобразование Фурье (в качестве альтернативного преобразования исследуются вейвлеты Добеши). В полученном спектре ищется частота, удовлетворяющая следующим условиям: лежит в диапазоне, соответствующем пульсу (0.8–2.0 Гц); является максимальной в указанном диапазоне. Эта частота соответствует среднему пульсу во временном окне, охватывающем N последних кадров.

С целью лучшего выделения сигнала, соответствующего пульсу, исследуется алгоритм нахождения оптимального ортогонального базиса в пространстве мульти-параметрических вейвлет-преобразований [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wim Verkruysse, Lars O Svaasand и J Stuart Nelson* «Remote plethysmographic imaging using ambient light» // Optics express, Volume 16, Issue 26, p. 21434-45 (2008)

2. *Копелиович М. В., Петрушан М. В., Демяненко Я. М.* Метод удаленной пульсометрии // Вычислительные методы и математическое моделирование: тез. докл. XXI Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование». Москва – Ижевск: РХД, 2014. С. 188.

3. *V. Labunets, D. Gainanov, D. Berenov* «The best multiparametric wavelet transform» // The 11th International Conference «Pattern Recognition and image analysis: new information technologies», September 23–28. Samara, Russia. – 2013. – P. 56–59.

Л. Г. Куракин (Ростов-на-Дону)
kurakin@math.rsu.ru

О ВЛИЯНИИ ГРАНИЦ КОЛЬЦЕВОЙ ОБЛАСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ТОМСОНОВСКОГО ВИХРЕВОГО МНОГОУГОЛЬНИКА [1]

Проведён анализ устойчивости стационарного вращения системы N одинаковых точечных вихрей, расположенных равномерно на окружности внутри кольцевой области. Задача сведена к проблеме устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы с циклической переменной. Исследована квадратичная часть гамильтониана и собственные значения матрицы линеаризации. Устойчивость трактуется как устойчивость по Раусу. Показано, что в случае $N \geq 7$ всегда имеет место экспоненциальная неустойчивость. В случае $N = 2$, 4, 6 вся область параметров задачи разбивается на две части: область устойчивости по Раусу в точной нелинейной постановке и область экспоненциальной неустойчивости. В случае $N = 3$, 5 область параметров состоит из трёх частей. Третья область расположена

[1]Работа проведена в рамках базовой части государственного задания выполняемого Южным Федеральным университетом, проект $213.01 - 11/2014 - 1$.

между областями устойчивости по Раусу и экспоненциальной неустойчивости. Вопрос устойчивости в ней в точной нелинейной постановке остаётся открытым. Для его решения требуется привлечение слагаемых выше второй степени ряда Тейлора гамильтониана.

Результаты доклада опубликованы в статье [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kurakin L. G.* Influence of annular boundaries on Thomson's vortex polygon stability // Chaos. 2014. T. 24, 023105; doi: 10.1063/1.4870735.

С. А. Лазарева, Д. В. Махмутов (Ростов-на-Дону)
sv@sfedu.ru

АНАЛИЗ САЙТА НА ЦЕЛОСТНОСТЬ И ИЗБЫТОЧНОСТЬ

В докладе рассматривается задача проверки целостности и избыточности ресурсов сайта. Вводится понятие макроструктуры [1] - структуры взаимодействия информационных ресурсов сайта - основанной на гиперссылках. Анализ целостности макроструктуры сводится к «обходу» существующих гиперссылок, указывающих на каждый из ресурсов сайта, и навигационных путей от главной страницы к каждой странице сайта. Для динамических сайтов, формируемых из различных баз данных, процесс анализа запускается после выполнения всех формирующих скриптов.

Анализ «лишних» файлов (избыточность ресурсов) также сводится к «обходу» макроструктуры, с расстановкой соответствующих пометок. При этом в конфигурационных переменных окружения отражены точки входа, доступные для анализа, и фрагменты, содержащие системные файлы, различные настройки, используемые для постриения сайта «неявно».

Перечисленные методы анализа реализованы в виде приложений: клиентского — для анализа целостности и серверного — для проверки избыточности. Даны сравнения с существующим программным обеспечением аналогичной функциональности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kogalovsky M.R., Efimova E.N., Rybina T.A., Brakhin V.B.* FORMAL METHODS FOR VERIFICATION OF WEBSITES MACROSTRUCTURE INTEGRITY // Programming and Computer Software. 2000. T. 26, № 4. C. 186–191.

В. В. Старинец (Москва)
vstarinets@mail.ru

ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ В ПРОСТРАНСТВАХ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ В ПРИЛОЖЕНИИ К КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

На примере квантовой электродинамики демонстрируются операторные методы в пространствах с индефинитной метрикой, позволяющие включением в теорию тахионных полей, формализм квантования которых допускает участие лишь в виртуальных процессах, внести такие изменения в полевые уравнения теории, которые обеспечивают конечность перенормировочных постоянных. Плотность лагранжиана взаимодействия принимает вид: $L_{\text{int}} = -e\mathrm{N} j^\mu \mathcal{A}_\mu$, где ток $j^\mu = \bar\psi\gamma^\mu\psi + \bar\varphi\gamma^5\gamma^\mu\varphi + \bar\chi\gamma^5\gamma^\mu\tau_1\chi + \bar\Psi\gamma^5\gamma^\mu\Psi + \bar\Phi\gamma^\mu\Phi + \bar{\mathrm{X}}\gamma^\mu\tau_1\mathrm{X}$ составлен из спинорных полей: ψ — электронно-позитронное (брадионное) поле простого параболического типа, φ — тахионное поле простого параболического типа, χ — тахионное поле гиперболического типа, Ψ — тахионное поле простого параболического типа, Φ — брадионное поле простого параболического типа, X — брадионное поле гиперболического типа, а $\mathcal{A}_\mu$ — суперпозиция векторных полей: $\mathcal{A}_\mu = A_\mu + B_\mu + U_\mu + V_\mu$, где A_μ — электромагнитное (брадионное) поле простого параболического типа, B_μ — тахионное поле эллиптического типа, U_μ — брадионное поле эллиптического типа, V_μ — тахионное поле простого параболического типа. Для масс соответствующих частиц имеют место соотношения: $m_\varphi^2 \gg m_\psi^2$, $m_\chi^2 \gg m_\psi^2$, $m_\Phi^2 = (\sqrt{2}-1)m_{\mathrm{X}}^2$, $m_\Psi^2 = (\sqrt{2}+1)m_{\mathrm{X}}^2$, $m_{\mathrm{X}}^2 \to \infty$, $m_B^2 \gg m_\psi^2 \gg m_A^2 > 0$, $m_U^2 = m_V^2 \to \infty$. Программа вычисления радиационных поправок, опирающаяся на матрицу рассеяния $\mathbb{S} = \mathbf{RT}\exp\{i\int d^4x\, L_{\text{int}}\}$, где $\mathbf{RT}$ — радиально-хронологическое упорядочение полевых операторов, дает в первом приближении теории возмущений перенормировочные постоянные $Z_1 = Z_2$, $Z_2 = \left(1 + \frac{\alpha}{4\pi}\left[\ln\frac{m_B^2}{m_\psi^2} + 2\ln\frac{m_A^2}{m_\psi^2} + \frac{9}{2}\right]\right)^{-1}$, $Z_3 = 1 - \frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{m_\chi^4}{m_\psi^2 m_\varphi^2}$, $\frac{\delta m_\psi}{m_\psi} = \frac{3\alpha}{4\pi}\left[\ln\frac{m_B^2}{m_\psi^2} + \frac{1}{2}\right]$, где $m_\varphi^2 = 2m_\chi^2 + m_\psi^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Старинец В.В.* Сингулярные операторы Штурма—Лиувилля в пространствах с индефинитной метрикой. Ч. 1,2. — М.: Изд-во МГУП. 2010.

2. *Старинец В. В.* Квантование скалярного модуля // Вестник МГУП. 2012. Вып. 3. С. 45–187.

3. *Старинец В. В.* Квантование спинорного модуля // Вестник МГУП. 2013. Вып. 3. С. 101–251.

В.И. Субботин (Новочеркасск)
geometry@mail.ru

ТЕОРЕМЫ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ДЛЯ ДВУХ КЛАССОВ СИММЕТРИЧНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Два класса замкнутых выпуклых симметричных многогранников в трёхмерном евклидовом пространстве, определённые и полностью перечисленные в [1], в настоящей работе характеризуются локальными условиями в классе всех выпуклых многогранников.

Первый из упомянутых классов-это могогранники, через середину каждого ребра которых проходит плоскость симметрии всего многогранника. Будем говорить, что звезда грани является циклической, если грани этой звезды либо все равны между собой, либо равны через одну.

Соответствующая теорема характеризации:

Теорема 1. *Для того, чтобы замкнутый выпуклый многогранник принадлежал первому классу, необходимо и достаточно, чтобы его грани были правильными или равноугольно-полуправильными многоугольниками и звезда каждой грани была циклической.*

Второй из упомянутых классов-это могогранники, плоскость симметрии каждого плоского угла каждой грани которых является плоскостью симметрии всего многогранника. Будем говорить, что звезда вершины является циклической, если грани этой звезды либо все равны между собой, либо равны через одну.

Теорема характеризации для второго класса многогранников:

Теорема 2. *Для того, чтобы замкнутый выпуклый многогранник принадлежал второму классу, необходимо и достаточно, чтобы его грани были правильными или равносторонне-полуправильными многоугольниками и звезда каждой вершины была циклической.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Субботин В. И.* О двух классах симметричных многогранников. // Изв.вузов.Сев-Кавк. регион. Естеств. науки. — 2003, № 3, С. 17–19.

И. В. Цветкова, В. В. Шамраева (Ростов-на-Дону)
pilipenkoiv@mail.ru, shamraeva@mail.ru

НОВЫЕ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ МАРТИНГАЛЬНЫХ МЕР, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ОУНБ [1]

Рассмотрим фильтрованное пространство $(\Omega,\mathbf{F})$, где $\mathbf{F}= (\mathcal{F}_0,\mathcal{F}_1)$ — одношаговая фильтрация, причём $\mathcal{F}_0 = \{\Omega,\oslash\}$, а $\mathcal{F}_1$ порождена разбиением Ω на счетное число атомов A_i, $i \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Рассмотрим на $(\Omega,\mathcal{F}_1)$ вероятность P и обозначаем $p_i = P(A_i)$, $i \in \mathbb{N}$. Пусть $Z_0 = a$, $Z_1|_{A_i} = b_i$,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00637а).

где $Z = (Z_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{1}$ - $\mathbf{F}$-адаптированный случайный процесс. Через $\mathcal{P}$ обозначим множество всех невырожденных вероятностных мер на $(\Omega, \mathcal{F}_1)$, а через $\widetilde{\mathcal{P}}$ $(\subset \mathcal{P})$ — множество всех мартингальных мер процесса Z.

В теории хааровских интерполяций важное значение имеют мартингальные меры $P \in \widetilde{\mathcal{P}}$, удовлетворяющие ОУНБ [1]. Говорят, что мера $P \in \widetilde{\mathcal{P}}$ удовлетворяет ОУНБ, если $\forall i \in \mathbb{N}$ и для любого набора индексов $J \subset \mathbb{N}\backslash\{i\}$ с конечным дополнением $\overline{J} = \mathbb{N}\backslash J$ выполняется неравенство $b_i \neq \frac{\sum\limits_{j\in J} b_j p_j}{\sum\limits_{j\in J} p_j}$.

В дальнейшем считаем, что $\widetilde{\mathcal{P}} \neq \oslash$ и $a \neq b_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$ (последнее условие является необходимым условием того, что ОУНБ$\neq \oslash$).

В настоящем докладе анонсируются новые достаточные условия существования мартингальных мер, удовлетворяющих ОУНБ. Другие достаточные условия можно посмотреть в [2].

Предложение. *Пусть множество* $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ *состоит из* $k \geq 4$ *различных чисел, имеющих бесконечную кратность, причём* $b_1 < a < b_2 < \cdots < b_k$. *Тогда ОУНБ*$\neq \oslash$ *и ОУНБ*$\subset \widetilde{\mathcal{P}}$ строго.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Данекянц А. Г., Павлов И. В.* Об ослабленном свойстве универсальной хааровской единственности// ОППМ. М.: Москва, ТВП, 2004. Т. 11. Вып. 3. С. 506–508.

2. *Павлов И. В., Цветкова И. В., Шамраева В. В.* Некоторые результаты о мартингальных мерах одношаговых моделей финансовых рынков, связанные с условием несовпадения барицентров// Вестник РГУПС. 2012, № 3. С. 177–181.

А. А. Яковенко (Ростов-на-Дону)
anton.sfedu12@mail.ru

УСЛОВИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ОТРЫВА ЖИДКОСТИ НА НАЧАЛЬНОМ ЭТАПЕ ДВИЖЕНИЯ ПЛАВАЮЩЕГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА С УЧЕТОМ ИСКУССТВЕННОЙ КАВИТАЦИИ

Движение твердого тела в жидкости может сопровождаться возникновением областей низкого давления влизи тела, что приводит к отрыву частиц жидкости от поверхности тела и образованию каверн. Существенное влияние на отрыв оказывают два параметра — число Фруда Fr и число кавитации χ. При фиксированном значении χ отрыв всегда происходит при больших числах Фруда. При уменьшении Fr области отрыва уменьшаются и, при достижении некоторого критического значения, исчезают. Данное критическое значение зависит от χ и, при уменьшении значения χ (повышении давления в каверне), уменьшается. Так при подаче в каверну газа достаточно высокого дваления отрыв происходит уже при небольших значениях числа Фруда. Угловое ускорение ω оказывает влияние как на связность зон отрыва, так и на условия их возникновения. Область возникновения отрыва жидкости на поверхности цилиндра зависит от конфигурации параметров χ, Fr и ω. Так же условия возникновения отрыва зависят от глубины прогружения тела в жидкость. При увеличении глубины погружения критическое значение числа Фруда изменяется.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Норкин М. В.* Образование каверны на начальном этапе движения кругового цилиндра в жидкости с постоянным ускорением // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 4. С. 74–82.

2. *Норкин М. В., Яковенко А. А.* Начальный этап движения эллиптического цилиндра в идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2012. Т. 52. № 11. С. 2060—2070.

Содержание

Секция II Теория функций 45