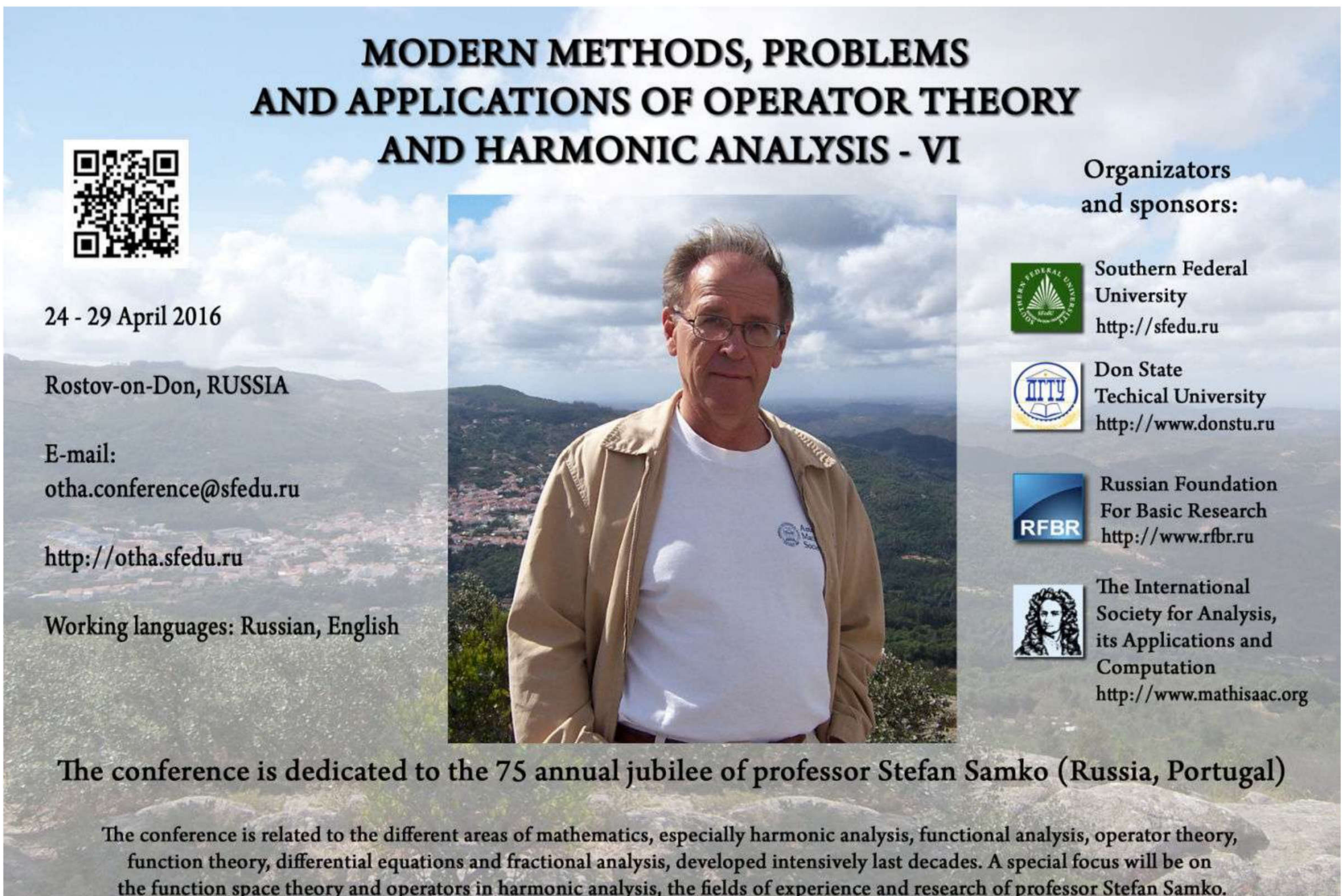
Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — VI

Ростов-на-Дону, 24-29 апреля 2016 года

МАТЕРИАЛЫ КОНФЕРЕНЦИИ / PROCEEDINGS

ISBN: 978-5-9908135-0-2



Ростов-на-Дону, 2016

Содержание

Секция I

Функциональный анализ и теория операторов

О. Г. Авсянкин (Ростов-на-Дону)
avsyanki@math.rsu.ru

ОПЕРАТОРЫ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СВЕРТКИ С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В пространстве ℓ_2 рассмотрим оператор мультипликативной дискретной свертки

$$(H\varphi)_m = \sum_{n=1}^{\infty} k(m,n)\varphi_n, \quad m \in \mathbb{N},$$

где $\varphi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, а функция $k(x,y)$ определена на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ и удовлетворяет следующим условиям:

1° $k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-1} k(x,y)$, $\forall\, \alpha > 0$;
2° $|k(1,y)|y^{-1/2} \in L_1(\mathbb{R}_+)$;
3° $|k(1,y)|y^{1/2}$ имеет на $\mathbb{R}_+$ ограниченное изменение.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую C^*-подалгебру C^*-алгебры $\mathcal{L}(\ell_2)$, содержащую все операторы вида $\lambda I + H + K$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, а K — компактный в ℓ_2 оператор. Далее, определим в пространстве ℓ_2 оператор M_α, где $\alpha \in \mathbb{R}$, равенством

$$(M_\alpha \varphi)_n = n^{i\alpha}\varphi_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $\mathfrak{B}$ — C^*-алгебра, порожденная всеми операторами A из алгебры $\mathfrak{A}$ и всеми операторами M_α. Для алгебры $\mathfrak{B}$ построено операторное символическое исчисление, в терминах которого получены необходимые и достаточные условия нетеровости операторов из этой алгебры.

На основе исследования C^*-алгебры $\mathfrak{B}$ для операторов вида

$$B = I + H_1 + M_\alpha H_2,$$

где H_1 и H_2 — операторы мультипликативной дискретной свертки, получено эффективное скалярное условие нетеровости и формула для вычисления их индекса.

A. Almeida (Aveiro, Portugal)
jaralmeida@ua.pt

APPROXIMATION IN MORREY SPACES

We introduce a new subspace of Morrey spaces where the approximation by nice functions is possible. Consequently a description of the closure of the set of all infinitely differentiable compactly supported functions is given in Morrey spaces.

А. Б. Антоневич (Белосток, Минск)
antonevich@bsu.by
А. Н. Глаз (Минск)
anna-glaz@yandex.ru

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ И ИХ АВТОМОРФИЗМЫ

Квазипериодическая алгебра есть замкнутая подалгебра $\mathcal{A}$ в пространстве ограниченных функций на $\mathbb{R}^m$, порожденная конечным числом экспонент $e^{i2\pi<h_j,x>}$, где $x \in \mathbb{R}^m, h_j \in \mathbb{R}^m$, и $< h_j, x >$ скалярное произведение.

Пусть задана квазипериодическая алгебра $\mathcal{A}_0$ на $\mathbb{R}^m$ и отображение $\alpha : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

Основной вопрос: для каких отображений α наименьшая инвариантная алгебра $\mathcal{A}$, содержащая $\mathcal{A}_0$, также будет квазипериодической? В частности, какие отображения α порождают автоморфизмы заданной квазипериодической алгебры? Эти вопросы возникают при исследовании операторов взвешенного сдвига, при построении скрещенных произведений и в теории квазикристаллов.

Матрица Q называется *алгебраической единицей*, если существует полином $P(t) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k t^k$, где a_k целые, $a_N = 1, a_0 = \pm 1$ такой, что $P(Q) = 0$.

Теорема 1. *Наименьшая замкнутая двусторонне инвариантная подалгебра $\mathcal{A}$, содержащая $\mathcal{A}_0$, является квазипериодической тогда и только тогда, когда отображение представляется в виде $\alpha(x) = Qx + \varphi(x)$, где матрица Q является алгебраической единицей, а отображение $\varphi(x)$ квазипериодическое.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Антоневич А. Б., Глаз А. Н.* Квазипериодические алгебры, инвариантные относительного линейного отображения // Доклады НАН Беларуси. 2014. № 5. С. 30–35.

И. В. Атласов (Воронеж)
mathematic1@rambler.ru

ПРОСТРАНСТВО ЯДЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ИЗОМЕТРИЧНО ПОПОЛНЕНИЮ ПРОСТРАНСТВА КОНЕЧНОМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПО НЕКОТОРОЙ НОРМЕ

Символами C и D будем обозначать банаховы пространства. Символом $L(C, D)$ обозначим пространство линейных ограниченных операторов T, действующих из C в D. Если $D = \mathbb{R}$, то $L(C, D)$ будем обозначать символом C^*. Обозначим через $\mathfrak{F}(C, D)$ линейное многообразие в пространстве $L(C, D)$, состоящее из множества конечномерных операторов $F = \sum\limits_{k=1}^{k=n} c_k \otimes d_k$, где $c_k \in C^*$, $d_k \in D$, $k = 1, \ldots, n$.

Определение 1. *Обозначим символом* $\mathfrak{R}(C, D)$*, линейное многообразие в пространстве* $L(C, D)$*, состоящее из всех операторов* $T \in L(C, D)$*, представимых в виде* $T = \sum\limits_{k=1}^{k=n} c_k \otimes d_k$*, где* $c_k \in C^*$*,* $d_k \in D$*,* $k = 1, \ldots$ *таких что* $\sum\limits_{k=1}^{k=\infty} \|c_k\|_{C^*} * \|d_k\|_D < \infty$*.*

Согласно [1, часть 2, раздел 6.3, теорема 6.3.2], пространство $\mathfrak{R}(C, D)$ является банаховым.

На элементах $T = \sum\limits_{k=1}^{k=n} c_k \otimes d_k \in \mathfrak{F}(C, D)$ рассмотрим функцию

$$N^0(T) = \inf_{\sum\limits_{k=1}^{k=n} c_k \otimes d_k} \sum_{k=1}^{k=n} \|c_k\|_{C^*} * \|d_k\|_D ,$$

где inf берется по всем конечным представлениям оператора T из пространства $\mathfrak{F}(C, D)$. Согласно [1, часть 2, раздел 6.8, теорема 6.8.2], функция N^0 является нормой на операторном идеале $\mathfrak{F}(C, D)$.

Определение 2. *Обозначим символом* $\mathfrak{G}(C, D)$ *банахово пространство, являющееся абстрактным пополнением линейного многообразия* $\mathfrak{F}(C, D)$ *в пространстве* $L(C, D)$ *по норме* N^0*.*

Теорема 1. *Пусть* C *и* D *— произвольные банаховы пространства, тогда пространства* $\mathfrak{G}(C, D)$ *и* $\mathfrak{R}(C, D)$ *вложены в пространство* $L(C, D)$ *и изометричны.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пич А.* Операторные идеалы. М.: Мир, 1982.

2. *Крейн С. Г.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1976.

И. В. Баран (Симферополь)
matemain@mail.ru

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И СОПРЯЖЕННАЯ ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Некоторое время назад было введено понятие компактного субдифференциала, которое нашло серьезные приложения в теории векторного интегрирования и в вариационном исчислении [1]. В дальнейшем естественной стала задача обобщения теории компактных субдифференциалов на симметрических случай.

Данная работа посвящена симметрическим субвариациям вариационных функционалов, построенных на другой основе, чем обычные субвариации. Симметрические характеристики функционалов, теряя центрированность, теряют и прямую связь с экстремумами. Однако оказывается, что в точке уже найденного экстремума можно поставить «сопряженную экстремальную задачу» — задачу вычисления оптимального направления перехода через экстремум, и решается она именно методами симметрического анализа. Эти результаты отчасти опубликованы в работах [2], [3].

Термин «сопряженная экстремальная задача» мы будем понимать в следующем общем смысле.

1) Предположим, что для заданного функционала $\Phi(y)$ задача определения точки локального экстремума уже решена: y_0 — точка экстремума Φ.

2) Поставим теперь следующую задачу: отыскать «оптимальное» направление перехода через экстремум.

Эту оптимальность мы связываем, во-первых, с «локальной асимметрией», а во-вторых, с «локальным эксцессом» в точке экстремума.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Орлов И. В.* Введение в сублинейный анализ // Современная математика. Фундаментальные направления. 2014. Т. 53. С. 64–132.

2. *Орлов И. В., Баран И. В.* Введение в сублинейный анализ — 2: Симметрический вариант // Современная математика. Фундаментальные направления. 2015. Т. 57. С. 108–161.

3. *Орлов И. В., Баран И. В., Цыганкова А. В.* Основы сублинейного анализа — 4: Субгладкие вариационные задачи // Современная математика. Фундаментальные направления. 2016 (в печ.).

R. H. Barkhudaryan (Yerevan, Armenia)
rafayel@instmath.sci.am

ITERATIVE SCHEME FOR AN NON-LOCAL OBSTACLE LIKE PROBLEM

This work is based on a joined work with M. Juráš and M. Salehi [3].

Here we consider a non local free boundary problem formulated as a Hamilton-Jacobi equation:

$$\begin{cases} \min(-Lu(x) + f(x), u(x) - u(-x) - \psi(x)) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ is a bounded symmetric domain such that if $x \in \Omega$ then $-x \in \Omega$, $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$ and $\psi \in C^2(\Omega)$.

As mentioned above we consider stationary case, i.e. the operator L is an elliptic operator of the form

$$Lu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u, \qquad a^{i,j} = a^{j,i},$$

where the coefficients $a^{i,j}$, b^i, c are assumed to be continues and the matrix $[a^{i,j}(x)]$ is positive definite for all $x \in \Omega$. Additionally we assume that the coefficients are "symmetric" in the domain Ω i.e. the operator applied to the function $u(-x)$ should be the same as operator applied to the function u at point $-x$.

It is easy to check that if u is a solution to equation (1), then $u(-x)$ is a solution to the reflected problem, i.e. all ingredients are reflected accordingly. Hence one has

$$u(x) \geq u(-x) + \psi(x) \geq u(x) + \psi(-x),$$

and in particular $\psi(x) + \psi(-x) \leq 0$ is forced as a condition for an existence theory.

Our aim here is to construct, through an increasing iterative scheme, a solution of the above problem. The scheme consists of a sequence of obstacle problems at each step that eventually converge to the solution.

REFERENCES

1. *Scheinkman JA, Xiong W.* Overconfidence and speculative bubbles. // Journal of Political Economy. 2003, Applicable Analysis, 2003, 111(6), pp. 1183–1220.

2. *Berestycki H, Monneau R, Scheinkman JA.* A non-local free boundary problem arising in a theory of financial bubbles. // Philos Trans R Soc Lond Ser A Math Phys Eng Sci. 2014;372(2028):20130404, 36.

3. *Barkhudaryan R, Juráš M, Salehi, M* Iterative scheme for an elliptic non-local free boundary problem. // 2015, Applicable Analysis, pp. 1–13.

A. G. Baskakov (Voronezh State University, Russia)
anatbaskakov@yandex.ru

HARMONIC AND SPECTRAL ANALYSIS OF BOUNDED SEMIGROUPS OF OPERATORS [1]

Let $\mathcal{X}$ be complex Banach space and $\operatorname{End}\mathcal{X}$ be a Banach algebra of bounded linear operators acting on $\mathcal{X}$.

By $C_b = C_b(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ denote the Banach space of bounded continuous functions on $\mathbb{J} = \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}$. By $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ denote the subspace of $C_b(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ of uniform continuous functions and let $C_0 = C_0(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ be subspace of $C_b(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ the vanishing at infinity functions.

Let $(S(\tau)x)(t) = x(t+\tau)$, $t \in \mathbb{J}$, $x \in C_b(\mathbb{J}, \mathcal{X})$, be a semigroup (group) of shift operators.

Definition 1. The number $\omega \in \mathbb{J}$ is called ε -period at infinity of $x \in C_b(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ if there exist a compact set $K = K_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ such that $\sup\limits_{t \in \mathbb{J} \setminus K_\varepsilon} \left\| x(t+\omega) - x(t) \right\|_{\mathcal{X}} < \varepsilon$.

By $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$ denote a set of ε -periods at infinity of function x.

[1] Ministry of Science and Education of Russia within the framework of a government request in the sphere of scientific activity for 2014-2016 (project no. 1110).

Definition 2. A function $x \in \mathbb{C}_{\mathrm{b,u}}$ is called *almost periodic at the infinity* (in Bohr sense) if for each $\varepsilon > 0$ there exists $l = l(\varepsilon) > 0$ such that each interval of length l includes at least one point of $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$.

Theorem 1. *Let $T : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathcal{X}$ be bounded strongly continuous semigroup of operators with generator A. Spectrum of A has property $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_1, \ldots, i\lambda_m\}$. Then semigroup T can be represented as $T(t) = \sum_{k=1}^m B_k(t)\mathrm{e}^{i\lambda_k t} + B_0(t), \quad t \geqslant 0$, where functions $B_k : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{X}$ are continuous in uniform operator topology and the functions $T(t)x : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{X}$, $x \in \mathcal{X}$, are almost periodic at infinity. Functions B_k, $0 \leqslant k \leqslant m$, have the following properties:*

1) Operators $B_k(t), \quad t_0 \leqslant t \quad 0 \leqslant k \leqslant m$ belong minimal closed subalgebra from $\operatorname{End}\mathcal{X}$ generated by operators $T(t), \quad t \geqslant t_0$.

2) $\lim\limits_{t\to\infty} \|B_0(t)\| = 0$.

3) Functions $B_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant m$ are slowly varying at infinity and can be extended on $\mathbb{C}$ to entire functions of exponential type with $\lim\limits_{t\to\infty} \|B_k'(t)\| = 0$.

4) $\lim\limits_{t\to\infty} \|T(t)B_k(t) - \mathrm{e}^{i\lambda_k t}B_k(t)\| = 0$.

5) $\lim\limits_{t\to\infty} \|B_k(t)B_p(t)\| = 0, \quad k \neq p$.

E. Bakhtigareeva (Moscow, Russia)
salykai@yandex.ru

AN OPTIMAL IDEAL SPACE FOR A CONE OF GENERALIZED DOUBLY MONOTONIC FUNCTIONS

Let $T_0 \in (0, \infty], \quad Y = Y(0, T_0)$ be an ideal space (shortly: IS), generated by an ideal quasinorm (shortly: IQN) ρ such that ρ is coordinated with the following order relation: for $f, g \in M_+(0, T_0)$

$$f \prec g \Leftrightarrow \int_0^t f d\tau \leq \int_0^t g d\tau, \quad t \in (0, T_0). \tag{1}$$

Let us fix $\beta \in (0, 1)$ and consider a cone

$$K_0 = \left\{ h \in Y : h \geq 0; \quad t^{-1}\int_0^t h d\tau \downarrow, \quad t^{-\beta}\int_0^t h d\tau \uparrow \right\}, \tag{2}$$

equipped with the functional $\rho:$

$$\rho_{K_0}(h) = \rho(h), h \in K_0. \tag{3}$$

Consider the operator $A_0 : M(0,T_0) \to M_+(0,T_0)$

$$(A_0 f)(t) = \left\| \tau^{-\beta}(t+\tau)^{\beta-1} \int_0^\tau |f| d\xi \right\|_{L_\infty(0,T_0)}, \quad t \in (0,T_0) \tag{4}$$

(norm in $L_\infty(0,T_0)$ is taken by τ).

Theorem 1. *Let $Y = Y(0,T_0)$ be an IS, generated by an IQN ρ, which is coordinated with order relation (1). Let K_0 be a cone (2). For $f \in M_+(0,T_0)$ consider the functional $\rho_0(f) = \rho(A_0 f)$. Here $A_0 f$ is an operator (4).*
Then, ρ_0 is an IQN, coordinated with order relation (1), and space

$$X_0 = X_0(0,T_0) = \{f \in M(0,T_0) : \quad \rho_0(|f|) < \infty\},$$

generated by ρ_0, is an IS, moreover $X_0 \subset Y$ and X_0 is an optimal IS with the norm, coordinated with order relation (1) for the embedding $K_0 \longmapsto X$.

REFERENCES

1. *Krein S. G., Petunin YU. I., Semenov E. M.* Interpolation of linear operators. Nauka, M., 1978 (in Russian).

V. I. Burenkov, T. V. Tararykova M. V. (Moscow, Russia; Cardiff, United Kingdom)
burenkov@cf.ac.uk, tararykovat@cf.ac.uk

AN ANALOGUE OF YOUNG'S INEQUALITY FOR CONVOLUTIONS FOR GENERAL MORREY-TYPE SPACES

Let $B(x,r)$ denote the open ball in $\mathbb{R}^n$ of radius $r > 0$ centered at a point $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < p, \theta \le \infty$ and let w be a non-negative Lebesgue measurable function on $(0,\infty)$. The global Morrey-type space $GM_{p\theta,w(\cdot)} \equiv GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ is the space of all functions f Lebesgue measurable on $\mathbb{R}^n$ with finite quasi-norm

$$\|f\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\| w(r) \|f\|_{L_p(B(x,r))} \right\|_{L_\theta(0,\infty)}.$$

If $\theta = \infty$ and $w(\cdot) = r^{-\lambda}$, then for $0 < \lambda \le \frac{n}{p}$

$$GM_{p\infty,r^{-\lambda}} \equiv M_p^\lambda$$

is the classical Morrey space.

For Lebesgue measurable functions f_1, f_2 consider their convolution

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x-y) f_2(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Under minimal natural assumptions on functions w_1 and w_2 holds the following analogue of Young's inequality. Let

$$1 \le p_1, p_2 \le p \le \infty, \quad p_1 \le \theta_1 \le \infty, \; p_2 \le \theta_2 \le \infty, \quad 0 \le \alpha_1, \alpha_2 \le 1\,,$$

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p} + 1, \qquad \frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} = \frac{1}{p}, \qquad \frac{\alpha_1}{\theta_1} + \frac{\alpha_2}{\theta_2} = \frac{1}{\theta}\,,$$

$$w(r) = w_1^{\alpha_1}(r) w_2^{\alpha_2}(r), \quad r > 0\,.$$

Then

$$\|f_1 * f_2\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}} \le \|f_1\|^{\alpha_1}_{GM_{p_1\theta_1, w_1(\cdot)}} \|f_1\|^{1-\alpha_1}_{L_{p_1}} \|f_2\|^{\alpha_2}_{GM_{p_2\theta_2, w_2(\cdot)}} \|f_2\|^{1-\alpha_2}_{L_{p_2}}\,.$$

In particular, for $0 \le \lambda_1 \le \frac{n}{p_1}, 0 \le \lambda_2 \le \frac{n}{p_2}$

$$\|f_1 * f_2\|_{M_p^{\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2}} \le \|f_1\|^{\alpha_1}_{M_{p_1}^{\lambda_1}} \|f_2\|^{\alpha_2}_{M_{p_2}^{\lambda_2}}\,.$$

E. Burtseva (Luleå, Sweden) and N. Samko (Luleå, Sweden)
Evgeniya.Burtseva@ltu.se, Natasha.Samko@ltu.se

ON THE WEIGHTED BOUNDEDNESS OF POTENTIAL OPERATORS IN MORREY TYPE SPACES

Let $0 < \alpha < n, \; 1 < p < \frac{n}{\alpha}$. The Riesz potential operator is defined by the following formula:

$$I^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(t)\, dt}{|x-t|^{n-\alpha}}, \; 0 \le \alpha < n.$$

Let $w \in V_-^\mu \cup V_+^\mu, \; \mu = min\{1, n-\alpha\}$. The definition of the classes $V_\pm^\mu$ you can see, for instance, in [L.E.Persson, N.Samko, 2011].

In this talk we present our recent results on the boundedness of the weighted Riesz potential operator $wI^\alpha \frac{1}{w}$ from the generalized Morrey space $L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ to Orlicz-Morrey space $L^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$.

Due to the classes of the weights we use in our study, the weighted potential operator is point wisely estimated by non-weighted one and some weighted Hardy operators.

Thus the question of the boundedness of the weighted potential operator is reduced to the question of the boundedness of the non-weighted one and weighted Hardy operators in such spaces.

There are known results on the boundedness of the weighted or non-weighted potential operators in generalized Morrey spaces. We refer, for instance, to the paper [L.E.Persson, N.Samko, 2011] and the references therein. But later we discovered that it is more natural to study such a boundedness from generalized Morrey spaces to Orlicz-Morrey spaces.

There are also known results on the bondedness of potential operators in Olrlicz-Morrey spaces, but only under Spanne type conditions, we refer to the papers of V. Guliev and others, for instance [Guliyev V. and Deringoz F., 2014]. Our aim is to study the weighted potential operator in such spaces but in terms of Adam's type setting, which, as it is known, are more precise. The paper with our new results is submitted for publication.

Б. Г. Вакулов, Ю. Е. Дроботов (Ростов-на-Дону)
bvak1961@bk.ru, yu.e.drobotov@yandex.ru

О ДЕЙСТВИИ ПОТЕНЦИАЛОВ РИССА БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕННЫХ ПОРЯДКОВ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

В рамках представленной работы рассмотрен потенциал Рисса переменного порядка, имеющий вид

$$\left(I^{\alpha(\cdot)}f\right)(x)=\int\limits_{\Omega}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha(x)}}dy,$$

где $\forall x\in\Omega\ \alpha(x)\neq n,n+2,n+4,\ldots$. В качестве Ω рассмотрены $n-$мерная гиперсфера $\mathbb{S}_n$ и пространство $\dot{\mathbb{R}}^{n+1}=\mathbb{R}^{n+1}\cup\{\infty\}$.

В работе [1] исследовались условия ограниченности оператора $I^{\alpha(\cdot)}$ в обобщенных пространствах Гельдера с переменной характеристикой $H^{\omega(\cdot)}(\mathbb{S}_n)$, состоящих, как известно, из функций f, непрерывных на $\mathbb{S}_n$ и таких, что $\forall x\in\mathbb{S}_n$ $M_r(f,t,x)\le c\omega(t,x)$, где $M_r(f,t,x)$ – локальный модуль непрерывности функции $f(x)$, $t\in T\subseteq\mathbb{R}$, а постоянная $c>0$ не зависит от x и t.

Центральным результатом исследования, представленного настоящим докладом, являются теоремы типа Харди–Литтлвуда–Соболева об ограниченном действии оператора $I^{\alpha(\cdot)}$ из $L^p(\mathbb{S}_n,\rho_1)$ в весовое пространство переменной гельдеровости $H^{\omega(\cdot)}(\mathbb{S}_n,\rho_2)$, где $\omega(x,t)=t^{\lambda(x)}$, $\lambda(x)=\alpha(x)-\frac{n}{p}<1$, ρ_1 и ρ_2 – весовые радиально осциллирующие функции из специальных функциональных классов типа Зигмунда–Бари–Стечкина.

С применением стереографической проекции доказываются аналогичные результаты для случая $\Omega=\mathbb{R}^{n+1}$ в терминах введенных в [2] весовых классов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *N. Samko, B. Vakulov*, Spherical fractional and hypersingular integrals of variable order in generalized Hölder spaces with variable characteristic // Math. Nachr., 2011. Vol. 284, Issue 2–3. Pp. 355–369.

2. *Б. Г. Вакулов, Ю. Е. Дроботов*, Потенциалы Рисса переменного порядка по $\mathbb{R}^n$ в пространствах обобщенной и переменной гельдеровости со специальными весами // Мехмат: студенческая наука – 2015. Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2015. С. 78–80.

A. M. Golovina, D. Borisov, P. Exner (Moscow, Russia)
nastya_gm@mail.ru

THE RESONANCES OF THE LAPLACIAN IN A WAVEGUIDE WITH NONLOCAL PERTURBATIONS OF BOUNDARY CONDITIONS

Let $\Pi := \{x : -\infty < x_1 < +\infty, 0 < x_2 < \pi\} \subset \mathbb{R}^2$, $\gamma_+ := \{a < x_1 < \ell_+,\ x_2 = 0\}$, $\gamma_- := \{-\ell_- < x_1 < -a,\ x_2 = 0\}$ where $a > 0$, $\ell_\pm$ are some fixed constants. The remaining part of the lower boundary Π consisting of three intervals separated by $\gamma_\pm$ we denote as Γ, and the whole upper boundary as γ. We consider the general problem $(-\Delta - \lambda)u = 0$, $u|_{\gamma_\pm} = 0$, $u|_\gamma = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|_\Gamma = 0$, with the behavior at infinity prescribed as $u(x) = C_+ e^{i\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}x_1} \cos\frac{x_2}{2} + O(e^{-\mathrm{Re}\sqrt{\frac{9}{4}-\lambda}x_1})$ for $x_1 \to +\infty$, $u(x) = C_- e^{-i\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}x_1} \cos\frac{x_2}{2} + O(e^{\mathrm{Re}\sqrt{\frac{9}{4}-\lambda}x_1})$ for $x_1 \to -\infty$. The choice of the square-root branch is fixed by the relation $\sqrt{1} = 1$, furthermore $C_\pm$ are some constants and $\lambda \in \mathbb{C}$ is the spectral parameter. The main object of our interest are resonances (the values of λ, for which the general problem has a nontrivial solution) of the general problem situated in the lower complex halfplane in the vicinity of the segment $[\frac{1}{4}, 1]$ for large values of the barrier lengths $\ell_\pm$, in particular, their asymptotic behavior as those lengths tend to infinity.

To formulate of main result we need additional problem: $-\Delta\psi = \lambda\psi$, $\psi|_\gamma = 0$, $\psi|_{\gamma_a} = 0$, $\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\Big|_{\Gamma_a} = 0$, $\Gamma_a := \{|x_1| < a,\ x_2 = 0\}$, γ_a is the remaining part of the lower boundary Π. It is well known [1] that the additional problem has for any $a > 0$ a nonempty discrete spectrum consisting of a finite number of eigenvalues $\lambda_j \in (\frac{1}{4}, 1)$, $j = 1, \ldots, n$.

Theorem 1. *For all $\ell_\pm$ large enough there is a unique resonance Λ_j of the general problem in the vicinity of each point λ_j, $j = 1, \ldots, n$, and a unique nontrivial solution of equation of the general problem corresponds to Λ_j. The corresponding resonance asymptotics is given by the formula*

$$\Lambda_j(\ell) = \lambda_j - k_j \pi \sqrt{1 - \lambda_j} |\Psi_j|^2 \Big(\mathrm{e}^{-2\sqrt{1-\lambda_j}\,\ell_+} + \mathrm{e}^{-2\sqrt{1-\lambda_j}\,\ell_-} \Big)$$
$$+ \mathcal{O}\Big(\ell_+^2\, \mathrm{e}^{-3\sqrt{1-\lambda_j}\,\ell_+} + \ell_-^2\, \mathrm{e}^{-3\sqrt{1-\lambda_j}\,\ell_-} \Big), \ \textit{where } k_j \in \mathbb{C},\ \Psi_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

REFERENCES

1. *Borisov D., Exner P. and Gadyl'shin R.* Geometric coupling thresholds in a two-dimensional strip // Journal of Mathematical Physics. 2002. V. 43, № 12. C. 6265–6278.

M. Goldman (Moscow, Russia)
seulydia@yandex.ru

ESTIMATES FOR THE NORMS OF MONOTONE OPERATORS ON WEIGHTED ORLICZ-LORENTZ CLASSES

For monotone operator P we consider the restriction on the cone Ω of nonnegative decreasing functions in the weighted Orlicz space $L_{\Phi,\nu}$ with general weight ν and general Young function Φ where the norm is given by

$$\|f\|_{\Phi,\nu} = \inf\left\{\lambda > 0 : \quad \int\limits_0^\infty \Phi\left(\lambda^{-1}|f(x)|\right)\nu(x)dx \leq 1\right\}.$$

For ideal space Y we obtain the order-sharp estimates of the norm

$$\|P\|_{\Omega\to Y} = \sup\left\{\|Pf\|_Y : \quad f \in \Omega; \|f\|_{\Phi,\nu} \leq 1\right\}.$$

By the appropriate discretization procedure the problem has been reduced to the estimates of operator P on some cone of nonnegative step - functions. Also we obtain the related estimates for the norm $\|P\|_{\Lambda_{\Phi,\nu}\to Y}$ where $\Lambda_{\Phi,\nu}$ is the weighted Orlicz-Lorentz class with $\|f\|_{\Lambda_{\Phi,\nu}} = \|f^*\|_{\Phi,\nu}$. Here f^* is the decreasing rearrangement of f with respect to Lebesgue measure on $(0,\infty)$. As an application we give sharp description of the associate (Köthe-dual) space $\Lambda'_{\Phi,\nu}$.

REFERENCES

1. *Krein S. G., Petunin YU. I., Semenov E. M.* Interpolation of linear operators. Nauka, M., 1978 (in Russian).

B. I. Golubov (Moscow, Russia)
golubov@mail.mipt.ru

DYADIC DERIVATIVES AND INTEGRALS

The notion of dyadic derivative was introduced by J.E. Gibbs in 1967. Since then this notion was generalized in various directions. Also was introduced and studied the dyadic integral. The big contribution to the theory of dyadic differentiation and integration was inserted by P.L. Butzer and his pupils. In detail the properties of dyadic derivatives and integrals of natural or fractional positive order are considered in the monograph [1]. Now the bibliography on dyadic derivatives and dyadic integrals contains more then

200 references (see [2], [3]). In our talk we will formulate the results related to dyadic derivatives and integrals.

REFERENCES

1. *Golubov B. I.* Elements of dyadic analysis (in Russian). LKI Publishers, Moscow, 2016. – 208 p.
2. *Stancovic R. S., Butzer P. L., Shipp F., Wade W. R., Su W., Endow Y., Fridli S., Golubov B. I., Pichler F.* Dyadic Walsh analysis from 1924 onwards Walsh-Gibbs-Butzer dyadic differentiation in science, vol. 1: Foundations. Atlantis Press, Paris, 2015. – 455 p.
3. *Stancovic R. S., Butzer P. L., Shipp F., Wade W. R., Su W., Endow Y., Fridli S., Golubov B. I., Pichler F.* Dyadic Walsh analysis from 1924 onwards Walsh-Gibbs-Butzer dyadic differentiation in science, vol. 2: Extensions and Generalizations. Atlantis Press, Paris, 2015. – 360 p.

А. П. Гринько (Брест)
agrinko_1999@yahoo.com

ОБОБЩЁННЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА АБЕЛЯ

Настоящая работа посвящена решению обобщенных уравнений Абеля вида:

$$\left(\rho^{-\beta} e^{-\nu\rho} \Phi_{a+}^{\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\nu} \phi\right)(x) \equiv$$

$$\equiv \frac{(x-a)^{-\beta}}{\Gamma(\alpha)\, e^{\nu(x-a)}} \int\limits_a^x \Phi_1\left(\gamma,\ \beta;\ \alpha;\ \frac{x-t}{x-a};\ \nu(x-t)\right) \frac{\phi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x)\,, \qquad (1)$$

$$\Phi_1(\gamma,\ \beta;\ \alpha;\ w;\ z) = \sum_{i,\,k=0}^{+\infty} \frac{(\gamma)_{i+k}(\beta)_i}{(\alpha)_{i+k}} \frac{z^k}{k!} \frac{w^i}{i!}, |w| < 1, |z| < +\infty \qquad (2)$$

- гипергеометрическая функция Гумберта.

В данной работе получены явные решения интегральных уравнений (1) в пространстве суммируемых функций, в окрестности конечной точки вещественной оси, выражаемые в терминах гипергеометрических функций (2):

$$\left(\rho^{-\beta} e^{-\nu\rho} \Phi_{a+}^{\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\nu} f\right)^{-1}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \Big(e^{\nu\rho}\rho^{\beta}$$

$$\int\limits_a^x \Phi_1\left(1-\alpha+\gamma,\ -\beta;\ 1-\alpha;\ \frac{x-t}{x-a};\ -\nu(x-t)\right) \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}\Big). \qquad (3)$$

Теорема. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $-\infty < a < b < +\infty$, $\gamma, \beta, \nu \in R$. *Для того чтобы уравнения типа Абеля (1) имели и при том единственное суммируемое решение на отрезке задаваемые равенствами (3) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\rho^{\beta} \Phi_{a+}^{1-\alpha,-\beta,1-\alpha+\gamma,-\nu} f(x) \in AC[a;b]\,, \rho^{\beta} \Phi_{a+}^{1-\alpha,-\beta,1-\alpha+\gamma,-\nu} f(a) = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения // Мн.,(1987).

S. M. Grudsky (Russia, Mexico)
grudsky@math.cinvestav.mx

UNIFORM INDIVIDUAL ASYMPTOTICS FOR THE EIGENVALUES AND EIGENVECTORS OF LARGE TOEPLITZ MATRICES

The asymptotic behavior of the spectrum of large Toeplitz matrices has been studied for almost one century now. Among this huge work, we can find the Szegö theorems on the eigenvalue distribution and the asymptotics for the determinants, as well as other theorems about the individual asymptotics for the smallest and largest eigenvalues.

Results about uniform individual asymptotics for all the eigenvalues and eigenvectors appeared only five years ago. The goal of the present lecture is to review this area, to talk about the obtained results, and to discuss some open problems.

This review is based on joint works with Manuel Bogoya, Albrecht Böttcher, and Egor Maximenko.

O. A. Ivanova (Rostov on Don, Russia)
ivolga@sfedu.ru
S. N. Melikhov (Rostov on Don, Vladikavkaz, Russia)
melih@math.rsu.ru

ON THE COMPLETENESS OF ORBITS OF A POMMIEZ OPERATOR

We study cyclic vectors of a Pommiez operator associated with a function g_0 which is given by

$$D_{0,g_0}(f)(t) := \begin{cases} \frac{f(t)-g_0(t)f(0)}{t}, & t \neq 0, \\ f'(0) - g_0'(0)f(0), & t = 0. \end{cases}$$

Here a function g_0 with $g_0(0) = 1$ belongs to some weighted (LF)-space E of entire functions. The operator D_{0,g_0} is linear and continuous in E. We prove abstract sufficient and necessary conditions for the completeness of the system $\{D^n_{0,g_0}(f) : n \geq 0\}$ in E and apply them to the space $E_Q := E$ which is the realization (with the help of the Laplace transform) of the strong dual of the (PLB)-space $H(Q)$ of germs of all functions analytic on a convex locally closed set $Q \subset \mathbb{C}$ containing 0.

Let $e_\lambda(z) := \exp(\lambda z)$, $\lambda, z \in \mathbb{C}$. The main result is the following statement.

Theorem. *(I) Suppose that the function g_0 has infinitely many zeros. The following assertions are equivalent:*

(i) f is a cyclic vector of D_{0,g_0} in E_Q.
(ii) Functions f and g_0 do not have common zeros.

(II) Suppose that $g_0 = Pe_\lambda$ for some $\lambda \in Q$ and some polynomial P with $P(0) = 1$. The following assertions are equivalent:
(i) f is a cyclic vector of D_{0,g_0} in E_Q.
(ii) Functions f and g_0 do not have common zeros and f is not a function of the form Re_λ where R is a polynomial.

As a consequence we describe proper closed D_{0,g_0}-invariant subspaces of E_Q when the function g_0 has no zeros.

А. С. Калитвин, А. И. Иноземцев (Липецк)
kalitvinas@mail.ru, inozemcev.a.i@gmail.com

О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ С МНОГОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ [1]

В работе рассматривается оператор $I-K$, где $K = K_1 + K_2 + K_{12}$,

$$(K_1x)(t_1,t_2,t_3) = \int_a^b k_1(t_1,t_2,t_3,\tau_1)\,x(\tau_1,t_2,t_3)\,d\tau_1,$$

$$(K_2x)(t_1,t_2,t_3) = \int_c^d k_2(t_1,t_2,t_3,\tau_2)\,x(t_1,\tau_2,t_3)\,d\tau_2,$$

$$(K_{12}x)(t_1,t_2,t_3) = \int_a^b\int_c^d k_{12}(t_1,t_2,t_3,\tau_1,\tau_2)\,x(\tau_1,\tau_2,t_3)\,d\tau_1 d\tau_2.$$

Пусть ядра k_1, k_2, k_{12} непрерывны, тогда операторы K_1, K_2, K_{12} действуют в $C(D) = C([a,b]\times[c,d]\times[e,f])$ [1]. Из обратимости операторов $I-K_1$, $I-K_2$ в $C(D)$, следует, что $I-K = (I-K_1)(I-K_2)(I-(I-K_2)^{-1}(I-K_1)^{-1}(K_1K_2 - K_{12}))$ и $(I-K_1)^{-1} = I + R_{k_1}$, $(I-K_2)^{-1} = I + R_{k_2}$, где $(R_{k_1}\,x)\,(t_1,t_2,t_3) = \int_a^b r_{k_1}(t_1,t_2,t_3,\tau_1)\,x(\tau_1,t_2,t_3)\,d\tau_1$, $(R_{k_2}\,x)(t_1,t_2,t_3) = \int_c^d r_{k_2}(t_1,t_2,t_3,\tau_2)\,x(t_1,\tau_2,t_3)\,d\tau_2$. Тогда $I-K = I-H$, где $H = K_1K_2 - K_{12} + R_{k_2}K_1K_2 - R_{k_2}K_{12} + R_{k_1}K_1K_2 - R_{k_1}K_{12} + R_{k_2}R_{k_1}K_1K_2 - R_{k_2}R_{k_1}K_{12}$.

Справедлива

Теорема. *В $C(D)$ фредгольмовость оператора $I-K$ с непрерывными ядрами равносильна его обратимости и обратимости операторов $I-K_1$, $I-K_2$ и $I-H$.*

Заметим, что оператор K принципиально отличается от оператора $(\tilde{K}x)(t,s) = \int_T k_1(t,s,\tau)\;x(\tau,s)\,d\tau + \int_S k_2(t,s,\sigma)\;x(t,\sigma)\,d\sigma + \iint_{T\times S} k_3(t,s,\tau,\sigma)\;x(\tau,\sigma)\,d\tau d\sigma$, рассмотренного в [1], т.к. фредгольмовость в $C(T\times S)$ оператора $I-\tilde{K}$ с непрерывными ядрами и компактными множествами T и S с непрерывными лебеговыми

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (Госзадание, проект № 2015/351, НИР № 1815).

мерами равносильна обратимости операторов $I - K_1$ и $I - K_2$, где K_1 и K_2 — операторы с ядрами $k_1(t,s,\tau)$ и $k_2(t,s,\sigma)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами. – Липецк: ЛГПУ, 2006. – 177 с.

L. P. Castro (Aveiro, Portugal)
castro@ua.pt

CONVOLUTION TYPE OPERATORS WITH SYMMETRY IN BESSEL POTENTIAL SPACES

Convolution type operators with symmetry appear naturally in boundary value problems for elliptic PDEs in symmetric or symmetrizable domains. They are defined as truncations of translation invariant operators in a scale of Bessel potential spaces that are convolutionally similar to subspaces of even or odd functionals. We will consider a class of these operators which is closely related to the Helmholtz equation in a quadrant, where a possible solution is symmetrically extended to a half-plane. For such operators, we will present characterizations of their normal solvability, Fredholm property, generalized (and one-sided) invertibility. For the situation where we do not have the Fredholm property, a normalization procedure is introduced. Moreover, an asymmetric factorization is also proposed. This turns possible the representation of consequent resolvent operators in closed analytic form. The talk is based on joint works with F.-O. Speck.

А. В. Козак, Б. Я. Штейнберг, О. Б. Штейнберг (Южный федеральный университет, Россия)
avkozak@aaanet.ru idento@mail.ru borsteinb@mail.ru olegsteinb@gmail.com

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СМАЗАННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ.

В работе рассматривается задача восстановления смазанного изображения, когда характер смаза известен. В простейшем случае это равномерный горизонтальный смаз изображения с фиксированным шагом. Такой смаз возникает, например, при съемке равномерно вращающейся камерой. Для изображения, заданного матрицей цветов, это означает, что каждая строка матрицы цветов сдвигается на один пиксель фиксированное число раз, полученные строки усредняются и обрезаются до первоначального размера. Эти действия равносильны умножению матрицы цветов на теплицеву матрицу специального вида, которую будем называть матрицей смаза. Для восстановления смазанного изображения необходимо решить систему уравнений с матрицей смаза. Если смазывается одиночный кадр, то система уравнений получается неопределенной и однозначно восстановить изображение невозможно. Если же имеется серия смазанных кадров, из которых можно склеить цилиндрическую панораму, то система уравнений при выполнении некоторых условий определенная (величина смаза и размерность панорамы по горизонтали взаимно простые числа). Практические расчеты показали, что изображения даже в таком случае восстанавливается плохо. Причиной этого является плохая обусловленность матрицы смаза и большие погрешности в исходных данных при оцифровке изображений. В работе проведено детальное исследование числа обусловленности матрицы смаза. Установлена зависимость числа обусловленности от величины смаза и размерности изображения, получены асимптотические формулы, проведены оценки погрешностей. Исследования показали, что при 8-битовом представлении цвета восстановление изображения практически невозможно, а при 16-битовом изображение прекрасно восстанавливается.

Разработан быстрый алгоритм решения рассматриваемого уравнения, ориентированный на лучшую погрешность округления, чем в предыдущей статье. Алгоритм программно реализован и с ним проведены численные эксперименты.

В. Н. Козлов (Санкт-Петербург)
saiu@ftk.spbstu.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ ЛОКАЛЬНО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ

Исследованы условия сжатия оператора системы (ОС)

$$x_{k+1} = \bar{H}\,x_k + \gamma F_u T\tilde{\theta}P^0 C\,\eta_k \in R^n,\ \ y_k = Cx_k \in R^{n_y},\ \ x_{k0} = x^0,$$

где параметр $\tilde{\theta} = 1 - 2\theta,\ \ \theta \in [0,\ \ 1]$, а управления определены проектором P^0 на ядро оператора А, $P_A = A^T\bar{A}$, $\bar{A} = \left(AA^T\right)^{-1}$, $A = (E_n\,|-cF_u)$. Допустимое (оптимальное) управление

$$u_{k*} = \gamma T \arg\min\Big\{\phi = \|z_k - C_k\|_2^2\,,\ z_k = (y_{k+1}\,|u_k)^T\ \ |Az_k = b_k = \\ = cHx_k,\ A = \left(E_{n_y}\,|-cF_u\right),\ \ \|z_k\|_2^2 \le r^2\Big\} = \gamma T\left(P_A b_k + \tilde{\theta}P^0 C_k\eta_k\right), \\ T = \left(0_{n_y\times n_u}\,|E_{n_u\times n_u}\right),\ \eta_k = \rho^{-1/2}\left(r^2 - \|P_A cHx_k\|_2^2\right)^{1/2}.$$

Утверждение.*Пусть:*

1). Для ОС пара $\left(\bar{H}, F_u\right)$ *управляемая по Р. Калману.*

2). Оператор $\bar{H} = (E_n + \gamma_0 F_u T P_A c)\, H, \quad \|H\| < 1-$ *устойчивый.*

3). Нелинейная часть $u_{k*} = \gamma T \tilde{\theta} P^0 C_k \eta_k$ *в ОС, где* $\gamma \in R,\ \tilde{\theta} = 1-2\theta,\ \theta \in [0,\ 1]$, $\|T\| \le 1$ *учитывает ограничения на координаты и управления.*

4). ОС имеет стационарную точку x_*.

5). Инвариантное множество $S\,(0, r_1) = r_1 = r/\left(\|c\| \cdot \|H\| \cdot \left\|\bar{A}\right\|\right)$.

6). ОС, регуляризованный по $\theta \in [0,\ 1]$ *проектором*

$$p\,(\theta) = 0,5\,(|\theta| - |\theta - 1| - 1) \in [0,\ 1] \in R \quad \text{и} \quad \eta_k = \rho^{-1/2}\alpha_k^{1/2},$$

$$\alpha_k^{1/2} = \left[r^2 - p_2\left(\|\, P_A c\, H\, x_k\,\|^{\,2}\right)\right]^{1/2} \le L_0 \left|\, \|\, P_A c\, H\, x_k\,\|^{\,2} - \|\, P_A c\, H\, x_*\,\|^{\,2}\right|,$$

$k = 1, 2,\ \ldots$, *реализуют регулярность ОС в силу*

$$p_1\,(q_k) = 0,5\left(\left|q_k^T q_k - \varepsilon^2\right| - \left|q_k^T q_k - (r-\varepsilon)^2\right| + \varepsilon^2 + (r-\varepsilon)^2\right).$$

Тогда, если

$$|\gamma| < \left[1 - \left\|\bar{H}\,(\gamma_0)\right\|\right] \cdot \left[2\left|\tilde{\theta}\,(L_\theta)\right| \cdot \|F_u\| \cdot \|T\| \cdot \left\|P^0 C_k\right\| \rho^{-1/2} L_0\, L_1 r\, \|P_A\|\, \|c\|^{\,2}\, \|H\|^2\right]^{-1},$$

то оператор системы с регуляризацией является устойчивым на оценках инвариантного множества оператора, включающего $x_{k0},\ x_k,\ x_*,\ C_k \in S\,(0_n,\ r_1)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Козлов В. Н.*, Негладкие системы, операторы оптимизации и устойчивость. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012.

В. Н. Козлов, А. А. Ефремов (Санкт-Петербург)
saiu@ftk.spbstu.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ БИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Исследуется устойчивость решения задачи Коши, описывающей физические процессы дифференциальным билинейным оператором с блочными матрицами

$$\begin{pmatrix} I_d' \\ I_q' \\ E_{af}' \\ E_{rd}' \\ E_{rq}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & -X_q\Omega/\omega_s & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & -\Omega/\omega_s \\ -X_d\Omega/\omega_s & R & \Omega/\omega_s & \Omega/\omega_s & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & -R_f T_d & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & -T_{rd} & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & -T_{rq} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_d \\ I_q \\ E_{af} \\ E_{rd} \\ E_{rq} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $\Omega(t) = diag\ \omega_i(t)\ \in R^{n\times n} \times C^1[t_0,\ T]$, $\Omega' = f(\Omega, u)$, $\Omega(0) = \Omega_0$; $I_d(t_0) = I_{d0}$, $I_q(t_0) = I_{q0}$, $E_{af}(t_0) = E_{af0}, E_{rd}(t_0) = E_{rd0}$, $E_{rq}(t_0) = E_{rq0} \in R^n$, $\omega_s^{-1} \in R$; матрицы $R,\ R_f,\ X_d,\ X_q,\ T_d,\ T_{rd}, T_{rq} \in R^{n\times n}$ - диагональные.

В (1) имеем $E_{af}(t) = e^{A_1 t}E_{af}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A_1(t-\tau)}\,v_3(\tau)\,d\tau$, $E_{rd}(t) = e^{-T_{rd}t}\,E_{rd}(t_0)$, $E_{rq}(t) = e^{-T_{rq}t}E_{rq}(t_0)$, преобразующие (1) с учетом $\Omega(t) = \Omega(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\Omega(\tau))\,d\tau$ к задаче для дифференциального оператора

$$\begin{gathered}\begin{bmatrix} I'_d \\ I'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_d & -X_q\,\Omega\omega_s^{-1} \\ -X_d\,\Omega\omega_s^{-1} & R_q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_d \\ I_q \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} -\Omega(t)\,\omega_s^{-1}E_{rq}(t) \\ \Omega(t)\,\omega_s^{-1}\left[E_{af}(t) + E_{rq}(t)\right] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} I_d(t_0) = I_{d0} \\ I_q(t_0) = I_{q0} \end{bmatrix}.\end{gathered} \tag{2}$$

Задача (2) определяет редуцированные интегральные уравнения типа В. Вольтерра

$$\begin{gathered}\begin{bmatrix} I_d(t) \\ I_q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{d0} \\ I_{q0} \end{bmatrix} + \int\limits_{t_0}^{t} \left\langle \begin{bmatrix} R_d & -X_q\,\Omega\omega_s^{-1} \\ -X_d\,\Omega\omega_s^{-1} & R_q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_d(\tau) \\ I_q(\tau) \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} -E_{rq}(t)\,\Omega\ \omega_s^{-1}\left[e^{-T_{rq}\tau}E_{rq}(t_0)\right] \\ \Omega\ \omega_s^{-1}\quad \left[E_{af}(t) + E_{rd}(t)\,e^{-T_{rd}\tau}E_{rd}(t_0)\right] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\rangle d\tau.\end{gathered} \tag{3}$$

Для сжимающих операторов (3) разработаны устойчивые разностные схемы. Для (3) используется анализ сжатия конечной степени этого оператора. Вычисление степеней (3) и анализ условий их сжатия выполнены в $R^n \times C[t_0,\ T]$, а устойчивость и диссипативность – в пространстве $R^n \times L^2[t_0,\ T]$.

Копачевский Н. Д., Радомирская К. А. (Симферополь)
kopachevsky@list.ru, radomirskaya@mail.ru

ОБ АБСТРАКТНЫХ КРАЕВЫХ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ СОПРЯЖЕНИЯ [1]

Данный доклад посвящен разработке общего подхода к изучению абстрактных смешанных краевых и спектральных задач сопряжения, а также применению этого подхода к различным конфигурациям пристыкованных областей в задачах сопряжения с использованием обобщенной формулы Грина в основном для операто-

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00066, выполняемого в Воронежском госуниверситете).

ра Лапласа. Другие аналогичные задачи математической физики, гидродинамики, теории упругости и т.д. исследуются по этой предлагаемой общей схеме.

В первой части доклада излагаются без доказательств теоремы о существовании абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств и абстрактного оператора следа, а также аналогичные факты для абстрактных смешанных краевых задач. Приводятся формулировки обобщенной формулы Грина на основе оператора Лапласа.

Во второй части приводится общая схема рассмотрения абстрактных краевых задач сопряжения на примере конфигурации пристыкованных областей, которую авторы для простоты называют "дважды разрезанный банан".

В третьей части доклада эта схема реализуется для этой конфигурации и оператора Лапласа. Далее рассматривается другие примеры областей.

Последняя часть доклада посвящена изучению спектральных проблем для смешанных краевых задач в одной области, а также аналогичных спектральных задач сопряжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Копачевский Н.Д., Радомирская К.А.* Абстрактные смешанные краевые задачи сопряжения // Международная научная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - V"(Ростов-на-Дону), 2015. С. 211.

2. *Копачевский Н.Д., Радомирская К.А.* Абстрактные краевые и спектральные задачи сопряжения // XXVI Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (Батилиман(Ласпи)), 2015. С. 52.

М. Г. Кот (Минск)
mtorkaylo@mail.ru

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРОВ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДЕЛЬТА-ОБРАЗНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Дифференциальные уравнения, содержащие в качестве коэффициента δ-функцию Дирака и записываемые в виде

$$-\Delta u + a\delta u = f, \tag{1}$$

возникают в разных приложениях и интенсивно изучаются. Эта запись уравнения является символической, так как произведение δu не определено в теории обобщенных функций. Один из основных подходов к определению понятия решения уравнения и построению таких решений основан на аппроксимации выражения в левой части (1) семейством корректно заданных операторов L_ε, зависящих от малого параметра ε, и затем нахождение предела резольвент. Если такой предел существует, то операторнозначная функция $R(\lambda)$ оказывается резольвентой некоторого предельного оператора, который соответствует рассматриваемой аппроксимации формального выражения.

В данной работе мы исследуем поведение собственных значений аппроксимирующих операторов L_ε. Эти собственные значения определяются из уравнения вида

$$f(\varepsilon, \lambda) = 0, \tag{2}$$

где f есть аналитическая функция двух переменных, которая строиться по заданной аппроксимации. Благодаря тому, что эта аналитическая функция имеет специальный вид, удается исследовать поведение различных ветвей решения с помощью метода диаграмм Ньютона, аналогично классическому случаю, когда f есть полином. Наиболее интересным оказывается т.н. случай резонанса, когда предельный оператор имеет одно собственное значение. В этом случае существует одна ветвь решения уравнения (2), имеющая конечный предел и стремящаяся при $\varepsilon \to 0$ к собственному значению предельного оператора, а остальные ветви уходят на бесконечность со скоростью $\frac{1}{\varepsilon}$.

Е. М. Кузьменко, С. И.Смирнова (Симферополь)
kuzmenko.e.m@mail.ru, si_smirnova@mail.ru

НЕГЛАДКИЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Недавно полученные результаты И.В. Орлова о негладкой обратимости (см. [1]) дали возможность обобщить на субгладкий случай метод Лагранжа–Люстерника поиска условного экстремума. Опираясь на эту технику, мы рассматриваем задачу об обобщенном условии транверсальности следующего вида:

$$\Phi(x_1, y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y\prime(x))\, dx \to \mathrm{extr};$$

$$G(x_1, y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} g(x, y(x), y\prime(x)) dx = 0 \ (f, g \in C^1_{sub}),$$

а также более общие задачи подобного типа. Отметим, что уравнение связи здесь обобщает классическое условие вида $y(x_1) = \varphi(x_1)$ и объединяет обобщенные задачи с подвижной границей с негладкими задачами изопериметрического типа.

Решение выражается в терминах функции $f + \lambda g$ (λ — множитель Лагранжа) и разбивается на "включение Эйлера–Лагранжа обобщающее соответствующее уравнение, и "включение трансверсальности также существеннно обобщающее классическое условие.

Рассмотрен ряд частных случаев и примеров. Особое внимание уделено случаям, связанным с модуляцией интегрантов, например следующему:

$$\Phi(x_1, y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y\prime(x))dx \to \text{extr};$$

$$G(x_1, y) = \int_{x_0}^{x_1} |g(x, y(x), y\prime(x))|dx = \gamma(x_1)\ (f, g \in C^1),$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Орлов И. В.* Теоремы об обратной и неявной функциях в классе субгладких отражений // Математические заметки, 99:4 (2016) С. 631–634.

2. *Орлов И. В.* Введение в сублинейный анализ // Современная математика. Фундаментальное направление.,Т53 (2014). С. 64–132

М. В. Кукушкин (Железноводск)
Kukushkinmv@rambler.ru

СВОЙСТВА ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ДРОБНОДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ.

Банаховы пространства дробнодифференцируемых функций изучались еще Киприяновым И.А., им же доказаны теоремы вложения банаховых пространств дробнодифференцируемых функций в пространство Соболева.

В работе [1] построено гильбертово пространство дробнодифференцируемых функций $N_{\alpha,c}(a,b)$, путем определения на множестве $I^{\alpha}_{a+}(L_{\theta})$ скалярного произведения:
$\langle u, v\rangle_{\alpha,c} = \frac{1}{2}\langle u, cD^{\alpha}_{ax}v\rangle_0 + \frac{1}{2}\langle v, cD^{\alpha}_{ax}u\rangle_0,\ c \in I^{\alpha}_{b-}(L_q)^+,\ 2/\theta + 1/q \le 1 + 2\alpha,\ \alpha \in (0,1),$ и последующего пополнения полученного унитарного пространства. Доказываются теоремы являющи-еся аналогами теорем классической теории энергетических пространств.

Гильбертово пространство $N_{\alpha,1}(0,1),\ \alpha \in (0,1)$ рассматривается в [2], где получено представление для нормы на множестве $I^{\alpha}_{0+}(C[0,1])$ в виде

$$\|u\|_{\alpha,1} = \frac{1}{2}\left\{a^0_0 a^2_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a^0_n \left[a^2_n + b^2_n\right]\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$a^0_0 > 0,\ a^0_n \ge 0.$$

В данной работе доказываются утверждения позволяющие получить аналогичное представление для нормы в пространстве $N_{\alpha,1}(a,b)$, для функций из класса

$I^{\alpha}_{a+}(L_{\theta}(a,b))$, $\theta > 2/(1+\alpha)$, $\alpha \in (0,1)$. Доказана теорема о полноте показывающая, что идеальные эллементы унитарного пространства $\tilde{N}_{\alpha,1}(a,b)$, $2/(1+\alpha) < \theta \leq 2$, $\alpha \in (0,1)$ также принадлежат классу $I^{\alpha}_{a+}(L_{\theta}(a,b))$.

Теорема 1. *Пусть $\alpha \in (0,1)$, $2/(1+\alpha) < \theta \leq 2$. Тогда пара: билинейная форма $\langle u,v\rangle_{\alpha,1} = \frac{1}{2}\langle u, D^{\alpha}_{ax}v\rangle_0 + \frac{1}{2}\langle v, D^{\alpha}_{ax}u\rangle_0$, и множество $I^{\alpha}_{a+}(L_{\theta}(a,b))$ образует гильбертово пространство.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кукушкин М. В.* О весовых пространствах дробнодифференцируемых функций // тез. докл. Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна-2016». Воронеж, 2016. С. 248–252.

2. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит. 2003.

S. N. Melikhov (Rostov on Don, Vladikavkaz, Russia)
melih@math.rsu.ru
L. V. Stefanenko (Rostov on Don, Russia)
stefanenko.lv@mail.ru

ON THE SCHWARTZ PROBLEM FOR CONVOLUTION OPERATORS

Let Q be a proper convex subset of $\mathbb{C}$ with non-empty interior which has a countable neighborhood basis of convex domain. Denote by $A(Q)$ the space of germs of all analytic functions on Q with its natural inductive limit topology. For a convex set K in $\mathbb{C}$, for an analytic functional μ which is carried by K a continuous linear convolution operator

$$T_{\mu} : A(Q+K) \to A(Q)$$

is defined by $T_{\mu}(f)(z) := \mu_t(f(t+z))$. It is characterized when surjective operator $T_{\mu} : A(Q+K) \to A(Q)$ has a continuous linear right inverse R. Similar problem was posed in the early fifties by L. Schwartz for linear differential operators $P(D)$ in $C^{\infty}(\Omega)$ where Ω is an open subset of $\mathbb{R}^N$. This problem was solved by R. Meise, B.A. Taylor and D. Vogt in the late eighties of the last century.

It is shown that R exists if and only if the distribution of zeros of the entire function $\hat{\mu}(z) := \mu_t(\exp(tz))$ satisfies certain conditions of the boundary behavior of the analytic univalent functions of the unit disc $\mathbb{D}$ on the interior of Q and of the complement of closed unit disc $\overline{\mathbb{D}}$ on the complement $\overline{Q}$. For example, if the boundary of Q of class C^2 each surjective operator $T_{\mu} : A(Q+K) \to A(Q)$ has a continuous linear right inverse.

Previously, this problem was solved when Q is a convex domain, a convex compact set and a convex locally closed set (see [1]).

REFERENCES

1. *Melikhov S. N., Momm S.* Analytic solutions of convolution equations on convex sets with an obstacle in the boundary // Math. Scand. 2000. Vol. 86. P. 293–319.

В. А. Мозель (Одесса)
mozel@ukr.net

ОБ ОДНОЙ БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С АВТОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть G - известная некоммутативная группа Шоттки, порождённая двумя образующими (см., напр., монографию 1.) Пусть, далее, $A=\sum\limits_{g} a_g W_g$. Пусть также норма в алгебре определяется правилом: $|||A|||_1=\sum\limits_{g\in G} \sup_z : |a_g(z)|$. Пусть также коэффициенты задаются на абсолюте в смысле геометрии Лобачевского - Бойяи и постоянны на ортогональных к абсолюту дугах. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть группа G удовлетворяет указанным выше свойствам. Тогда оператор $A=\sum\limits_{g\in G} a_g W_g$ фредгольмов (нётеров) в банаховом пространстве $L_p(D)$, $p>1$ (здесь D — единичный круг в комплексной плоскости), если и только если его символ (см., напр., статью Н. Л. Василевского, указанную ниже) невырожден, т.е. на границе единичного круга каждая из двух его частей отлична от нуля. (См., кроме того, известную в своё время совместную работу С. Г. Крейна и В. Н. Ушаковой, также указанную ниже).*

Замечение. *Автоморфные функции, указанные выше, известны достаточно давно. См., напр., книгу В. В. Голубева, цитируемую ниже, а также первую часть монографии Б. В. Шабата, тоже приведенную ниже.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бердон А.* Геометрия дискретных групп.– М. : Наука. Гл. ред. физ-мат. лит, 1986. - 304 с. (- С. 99).
2. *Василевский Н. Л.* Символы операторных алгебр // ДАН СССР. 1977. Т. 235, № 1. - С. 15–18.
3. *Крейн С. Г., Ушакова В.Н.* Математический анализ элементарных функций.– Изд. 2-е . – М. : Наука, 1966 . – 184 с.
4. *Голубев В. В.* Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции.– М. : Физматгиз, 1961. - 456 с. (- С. 260 и ниже.)
5. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч.1. Функции одного переменного: Учебник для университетов.– Изд. 3-е . – М. : Наука, 1985 . - С. 253–256.

М. А. Муратов, Ю. С. Пашкова (Крымский федеральный университет, Россия), Б. А. Рубштейн (Университет Бен-Гуриона в Негеве, Израиль)
mamuratov@gmail.com, j.pashkova@gmail.com, benzion@math.bgu.ac.il

ПОРЯДКОВАЯ СХОДИМОСТЬ ЧЕЗАРОВСКИХ СРЕДНИХ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $(\mathbb{R}^+, m)$ — полупрямая $[0, \infty)$ с обычной мерой Лебега m и $\mathbf{L}_0(\mathbb{R}^+, m)$ — пространство всех конечных почти всюду на $\mathbb{R}^+$ измеримых вещественных функций, $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^+, m)$, $1 \le p \le \infty$, $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ — симметричное пространство функций из $\mathbf{L}_0(\mathbb{R}^+, m)$, f^* — убывающая перестановка функции $|f|$, $f^{**}(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f^*(u)\,du, x \in (0, +\infty)$, $\mathbf{E_H} = \{f \in \mathbf{E}\colon f^{**} \in \mathbf{E}\}$ и $\mathcal{R}_0 = \{f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty : f^*(+\infty = 0)\}$.

Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{E}$ называется (o)-сходящейся к $f \in \mathbf{E}$, если существуют такие $0 \le g_n \in \mathbf{E}$, что $|f_n - f| \le g_n \downarrow 0$.

Для каждого положительного $(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$-сжатия $\alpha : \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \to \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ определены чезаровские средние

$$A_{n,\alpha} f = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha^{k-1}(f),\ f \in \mathbf{E}$$

Теорема 1. *Если $f \in \mathbf{E_H} \cap \mathcal{R}_0$, то для любого положительного $(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$-сжатия α последовательность чезаровских средних $\{A_{n,\alpha} f\}$ (o)-сходится в $\mathbf{E}$.*

Теорема 2. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) Последовательность $\{A_{n,\alpha} f\}$ (o)-сходится в $\mathbf{E}$ для любой функции $f \in \mathbf{E}$ и любого положительного $(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$-сжатия α;

(2) $\mathbf{E} = \mathbf{E_H} \cap \mathcal{R}_0$;

(3) $p_{\mathbf{E}} > 1$ and $1 \notin \mathbf{E}$, где $p_{\mathbf{E}}$ — нижний индекс Бойда с.п. $\mathbf{E}$.

Пусть $\mathcal{M}$ — конечная алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве H, τ — точный нормальный конечный след на $\mathcal{M}$, $\mathbf{S}(\mathcal{M}, \tau)$ — $*$-алгебра всех τ-измеримых операторов, присоединенных к $\mathcal{M}$ и $\mathbf{L}_p(\mathcal{M}, \tau) \subseteq \mathbf{S}(\mathcal{M}, \tau), 1 \le p < \infty$ — пространство операторов. интегрируемых с p-й степенью.

Теорема 3. *Пусть $\alpha : \mathbf{L}_p(\mathbf{M}, \tau) \to \mathbf{L}_p(\mathcal{M}, \tau)$ положительное сжатие, $2 \le p < \infty$. Тогда для каждого $T \in \mathbf{L}_p(\mathcal{M}, \tau)$ последовательность $\{A_{n,\alpha} T\}$ (o)-сходится в $\mathbf{L}_p(\mathcal{M}, \tau)$.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Муратов М. А., Пашкова Ю.С, Рубштейн Б. А.* Порядковая сходимость в эргодических теоремах в перестановочно-инвариантных пространствах. Доповіді Національної Академії наук України. 2011. № 7. С. 23–26.

2. *Muratov M, Pashkova J., Rubshtein B.* Order Convergence Ergodic Theorems in Rearrangement Invariant Spaces. Operator Theory: Advances and Applications. 2013. vol. 227, P. 123–14.

3. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. 1978. Москва, Наука. С. 400.

4. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces II. Function Spaces. 1979. Springer. P 327.

5. *Муратов М. А., Чилин В. И.* Порядковая сходимость в индивидуальной эргодической теореме для некоммутативных пространств L_p измеримых операторов. Ученые записки Таврического национального университета имени В.И.Вернадского. 2003. Т. 16 (55), № 1. С. 17–23.

М. А. Муратов(Крымский федеральный университет, Россия),
Б. А. Рубштейн (Университет Бен-Гуриона в Негеве, Израиль)
mamuratov@gmail.com, benzion@math.bgu.ac.il

МИНИМАЛЬНОСТЬ, УСЛОВИЕ (C) И ТЕОРЕМА ВЛОЖЕНИЯ $\Lambda^0_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{X} \subseteq \mathbf{M}_{V_*}$

Пусть $(\mathbb{R}^+, m)$ — полупрямая $[0, \infty)$ с обычной мерой Лебега m и $\mathbf{L}_0(\mathbb{R}^+, m)$ — пространство всех конечных почти всюду на $\mathbb{R}^+$ измеримых вещественных функций, $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^+, m)$, $1 \le p \le \infty$, $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ — симметричное пространство (с.п.) функций из $\mathbf{L}_0(\mathbb{R}^+, m)$.

Пусть $\mathbf{X}^0 = cl_{\mathbf{X}}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$ — замыкание $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty$ в пространстве $\mathbf{X}$ с индуцированной из $\mathbf{X}$ нормой $\|f\|_{\mathbf{X}^0} = \|f\|_{\mathbf{X}}, \quad f \in \mathbf{X}^0$. Тогда $(\mathbf{X}^0, \|\cdot\|_{\mathbf{X}^0})$ — с.п. Если $\mathbf{X}^0 = \mathbf{X}$, то с.п. $\mathbf{X}$ называется *минимальным*.

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{X}$ — минимальное с.п. (возможно, несепарабельное). Тогда в $\mathbf{X}$ выполнено условие (C), т.е. если $\{f_n\} \subset \mathbf{X}$, $0 \le f_n \uparrow f \in \mathbf{X}$, то $\sup\limits_n \|f_n\|_{\mathbf{X}} = \|f\|_{\mathbf{X}}$*

Пусть $(\mathbf{X}^1, \|\cdot\|_{\mathbf{X}^1})$ — с.п., ассоциированное с с.п. $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$, а $(\mathbf{X}^{11}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}^{11}})$ — второе ассоциированное. Известно, что $\mathbf{X}^0 \subseteq \mathbf{X} \subseteq \mathbf{X}^{11}$, причем $\|f\|_{\mathbf{X}^{11}} \le \|f\|_{\mathbf{X}}$ для любой $f \in \mathbf{X}$.

Следствие. *(1). Для каждой функции $f \in \mathbf{X}^0$ имеет место равенство: $\|f\|_{\mathbf{X}^0} = \|f\|_{\mathbf{X}} = \|f\|_{\mathbf{X}^{11}}$.*

(2). Для каждой функции $f \in \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty$ имеет место неравенство: $\|f\|_{\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty} \ge (\varphi_{\mathbf{X}}(1))^{-1}\|f\|_{\mathbf{X}} \ge \|f\|_{\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty}$.

(3). $\mathbf{X}^0 = cl_{\mathbf{X}}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty) = cl_{\mathbf{X}^{11}}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty) = (\mathbf{X}^{11})^0$.

Теорема 2. *Пусть $\mathbf{X}$ с.п. с фундаментальной функцией $\varphi_{\mathbf{X}} = V$, $\widetilde{V}$ — ее наименьшая вогнутая мажоранта и $V_*(x) = \dfrac{x}{V(x)}$, $x > 0$. Тогда $\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{X}^0 \subseteq \mathbf{X} \subseteq \mathbf{X}^{11} \subseteq \mathbf{M}_{V_*}$, причем $\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}} = \|f\|_{\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}}} \ge \|f\|_{\mathbf{X}^0} = \|f\|_{\mathbf{X}}$ для $f \in \mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}}$ и $\|f\|_{\mathbf{X}} \ge \|f\|_{\mathbf{X}^{11}} \ge \|f\|_{\mathbf{M}_{V_*}}$ для $f \in \mathbf{X}$, где $\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}$ и $\mathbf{M}_{V_*}$ соответствующие пространства Лоренца и Марцинкевича.*

В случае, когда $V(\infty) = \infty$, пространство Лоренца $\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}$ — минимально, поэтому $\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}} = \mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{X} \subseteq \mathbf{M}_{V_*}$.

В случае, когда $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{11}$, пространство $\mathbf{X}$ — максимально, поэтому $\mathbf{\Lambda}^{11}_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{X}^{11} \subseteq \mathbf{M}^{11}_{V_*}$ и значит $\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{X} \subseteq \mathbf{M}_{V_*}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. 1977. Москва. Наука. С 744.
2. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. 1978. Москва, Наука. С. 400.
3. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces II. Function Spaces. 1979. Springer. P. 327.
4. *Bennet C., Sharpley R.* Intropolation of operators. 1988. London. Academic Press. P. 469.

5. *Рубштейн Б. А., Грабарник Г. Я. Муратов М. А., Пашкова Ю.С, Рубштейн Б. А.* Введение в теорию симметричных пространств измеримых функций. 2014. Симферополь. Т. 1. С. 204.

И. В. Орлов (Симферополь)
igor_v_orlov@mail.ru

СУБ-ОБРАТИМОСТЬ КОМПАКТНОЗНАЧНЫХ СУБЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ И СУБГЛАДКАЯ ФОРМА ТЕОРЕМ ОБ ОБРАТНОЙ И НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ [1]

В первой части доклада рассмотрены сублинейные операторы с компактными выпуклыми значениями. С таким оператором связан пакет так называемых базисных селекторов, образующих компактное выпуклое множество в классическом пространстве линейных операторов. Тем самым вопрос о многозначной обратимости сводится к обычной обратимости пакета базисных селекторов. Применение теоремы Крейна-Мильмана позволило достаточно детально исследовать такую суб-обратимость (см. [1]).

Опираясь на эти результаты, во второй части доклада мы рассматриваем вопрос об однозначной обратимости так называемых субгладких отображений, используя аппарат компактных субдифференциалов. Получена субгладкая форма теорем об обратной и неявной функции, рассмотрен ряд частных случаев и примеров (см. [2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Orlov I. V., Smirnova S. I.* Invertibility Of Multivalued Sublinear Operators // Euras. Math. Journal. 2015. V. 6, № 4. C. 44–58.

2. *Орлов И. В.* Теоремы об обратной и неявной функциях в классе субгладких отображений // Матем. заметки. 2016. Т. 99, № 4. С. 631–634.

L. E. Persson (Sweden)
lars-erik.persson@ltu.se

MY LIFE WITH HARDY AND HIS INEQUALITIES

In this lecture I will present some important steps concerning prehistory, history and current status of Hardy type inequalities. My mainreference is my recent Lecture Notes from College de France [1]. Especially, I will present some new results which can not be found in my books on the subject. In particular, I will present a fairly new convexity approach to consider Hardy type inequalities which was not discovered by Hardy himself and which give simple proofs and equivalence of powerweighted forms

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00066, выполняемый в Воронежском госуниверситете.)

of Hardy's inequality with sharp constants. in this connection I will focus on my recent results with N. Samko and S. Samko.

REFERENCES

1. *Persson L. E.* Lecture Notes, College de France, Paris, November, 2015. – 74 p.

M. A. Pliev (Vladikavkaz, Russia)
maratpliev@gmail.com

DOMINATION PROBLEM FOR AM-COMPACT ABSTRACT URYSON OPERATORS

The theory of orthogonally additive operators in vector lattices is a growing field of investigations (see for instance [1-3].) The reader is assumed to be familiar with the theory of vector lattices (see [4]).

Let E be a vector lattice, and let F be a real linear space. An operator $T : E \to F$ is called *orthogonally additive* if $T(x + y) = T(x) + T(y)$ for every disjoint elements $x, y \in E$.

Let E and F be vector lattices. An orthogonally additive operator $T : E \to F$ is called *order bounded*, if T maps order bounded sets in E to order bounded sets in F.

The set of all abstract Uryson operators from E to F is denoted by $\mathcal{U}(E, F)$.

Let E be a vector lattice and F a Banach space. An orthogonally additive operator $T : E \to F$ is called *AM-compact*, if for every order bounded set $M \subset E$ its image $T(M)$ is a relatively compact set in F.

Theorem 1. *Let E be Dedekind complete vector lattice, F be a Banach lattice with an order continuous norm, and $T \in \mathcal{U}_+(E, F)$ be an AM-compact operator. Then every operator $S \in \mathcal{U}_+(E, F)$, such that $0 \le S \le T$ is AM-compact.*

REFERENCES

1. *V. Mykhaylyuk, M. Pliev, M. Popov, O. Sobchuk* Dividing measures and narrow operators. // Studia Math. 231 (2015), P. 97–116.
2. *M. A. Pliev, M. M. Popov* On the extension of abstract Uryson operators. // Siberian Math. J. DOI: 10.17377 / smzh. 2060.01.001.
3. *M. A. Pliev* Narrow orthogonally additive operators. // Positivity 18, vol. 4, (2014), P. 641–667.
4. *C. D. Aliprantis O. Burkinshaw* Positive Operators, Springer, Dordrecht. 2006.

D. M. Polyakov (Voronezh)
DmitryPolyakow@mail.ru

ON SPECTRAL PROPERTIES OF 1D SCHRÖDINGER OPERATOR[1]

We consider the operators $L_\theta : D(L_\theta) \subset L_2[0, \omega] \to L_2[0, \omega]$, $\theta \in [0, 1]$, $\omega > 0$, determined by the following differential expressions

$$l(y) = -y'' - vy, \quad \text{where} \quad v \in L_2[0, \omega].$$

[1]The work was supported by Russian Science Foundation (project №14-21-00066 was carried out in Voronezh State University).

The domain $D(L_\theta) = \{y \in W_2^2[0,\omega] : y(\omega) = e^{i\pi\theta}y(0), y'(\omega) = e^{i\pi\theta}y'(0)\}$, $\theta \in [0,1]$. The eigenfunctions of the second order differential operator have the form $e_n(t) = e^{i\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega}}$, where $n \in \mathbb{Z}_+$ for $\theta \in \{0,1\}$ and $n \in \mathbb{Z}$ for $\theta \in (0,1)$. The Riesz projections are defined as $\mathbb{P}_n x = (x, e_{-n-\theta})e_{-n-\theta} + (x, e_n)e_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, for $\theta \in \{0,1\}$ and $P_{n,\theta}x = (x, e_n)e_n$, $n \in \mathbb{Z}$, for $\theta \in (0,1)$, $x \in L_2[0,1]$.

Let $m \in \mathbb{Z}_+$ be some number. The spectrum $\sigma(L_\theta)$ has the following representation

$$\sigma(L_\theta) = \sigma_{(m)} \cup (\cup_{n \geqslant m+1}\sigma_n). \tag{1}$$

Here, $\sigma_{(m)}$ is a finite set and $\sigma_n = \{\widetilde{\lambda}_n\}$, where $\widetilde{\lambda}_n$ is an eigenvalue of operator L_θ (see [1]). Further, for $\theta \in \{0,1\}$, by $\mathbb{P}_{(m)}$ we denote the projection $\sum\limits_{s=0}^{m} \mathbb{P}_s$ and by $P_{(m)}$ we denote the projection $\sum\limits_{s=-m}^{m} P_{s,\theta}$ for $\theta \in (0,1)$. Let $\Omega \subset \mathbb{Z}_+ \setminus \{0,\dots,m\}$ for $\theta \in \{0,1\}$ and $\Omega \subset \mathbb{Z} \setminus \{-m,\dots,m\}$ for $\theta \in (0,1)$. For the sets $\Delta = \Delta(\Omega) = \{\lambda_n, n \in \Omega\}$, $\widetilde{\Delta} = \widetilde{\Delta}(\Omega) = \cup_{n\in\Omega}\sigma_n$ the Riesz projections $P(\Delta, L_\theta^0)$, $P(\widetilde{\Delta}, L_\theta)$ are defined as $P(\Delta, L_\theta^0)x = \sum\limits_{n\in\Omega} \mathbb{P}_n x$, $P(\widetilde{\Delta}, L_\theta)x = \sum\limits_{n\in\Omega} \widetilde{\mathbb{P}}_n x$, $x \in L_2[0,\omega]$. Here, $\widetilde{\mathbb{P}}_n$ is constructed by the set σ_n. For $\theta \in (0,1)$ these projections are defined in a similar way.

Theorem 1. *There exists a number $m \in \mathbb{Z}_+$ such that the spectrum $\sigma(L_\theta)$ has the form (1). We get the following estimates for spectral projections:*

$$\|P(\widetilde{\Delta}, L_\theta) - P(\Delta, L_\theta^0)\|_2 \leqslant \frac{M}{k^{\frac{1}{2}}(\Omega)}.$$

Here $M > 0$ is some constant and $k(\Omega) = \min\limits_{n\in\Omega} |n|$

REFERENSES

1. *Baskakov A. G., Polyakov D. M.* Spectral properties of the Hill operator // Mathematical Notes. 2016. V. 99, № 4. C. 114–118.

Д. А. Полякова (Ростов-на-Дону, Владикавказ)
forsites1@mail.ru

О РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ РУМЬЕ

В работе рассматриваются пространства ультрадифференцируемых функций Румье на конечном интервале $I = (-a, a)$:

$$\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I) = \Big\{ f \in C^\infty(I) \,\Big|\, \forall m \in \mathbb{N} \ \ \exists n \in \mathbb{N} : \\ |f|_{n,m} = \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sup_{|x|\le a_m} |f^{(j)}(x)| e^{-q_n \varphi^*_\omega(j/q_n)} < \infty \Big\}.$$

Здесь $q \ge 0$ — заданное число; $\infty > q_n \downarrow q$; $0 < a_m \uparrow a$; ω — весовая функция; $\varphi^*_\omega(y) = \sup\{xy - \omega(e^x) : x \ge 0\}$, $y \ge 0$. При $q = 0$ соответствующее пространство называется пространством минимального типа, при $q > 0$ — нормального типа.

В пространстве $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)$ исследуется система из p, $p \in \mathbb{N}$, уравнений свертки

$$T_{\mu_i} f = h_i\,,\ 1 \le i \le p\,. \tag{1}$$

Здесь μ_i — символы уравнений свертки, т. е. функции из множества

$$M = \Big\{ \mu \in H(\mathbb{C}) \,:\, \forall \varepsilon > 0 \ \ \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|}{e^{\varepsilon\omega(z)+\varepsilon|\operatorname{Im} z|}} < \infty \Big\}\,;$$

T_{μ_i} — операторы свертки с символами μ_i, действующие линейно и непрерывно в пространстве $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)$, $1 \le i \le p$. Положим $\mu := (\mu_1, \dots, \mu_p)$, $T_\mu f := (T_{\mu_1} f, \dots, T_{\mu_p} f)$. Тогда оператор T_μ действует линейно и непрерывно из $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)$ в $\big(\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)\big)^p$.

Теорема 1. *Если для символов $\mu_1, \dots, \mu_p$ выполняется условие*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists B > 0 :\ \sum_{i=1}^{p} |\mu_i(z)| \ge B\, e^{-\varepsilon\omega(z)-\varepsilon|\operatorname{Im} z|}\,,\ z \in \mathbb{C}\,,$$

то $\ker T_\mu = \{0\}$ и $\operatorname{Im} T_\mu$ замкнут в $\big(\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)\big)^p$, т. е. система (1) однозначно и нормально разрешима в $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)$.

Исследование основано на результатах работы [1].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Полякова Д. А.* О разрешимости неоднородного уравнения Коши-Римана в пространствах функций с системой равномерных весовых оценок // Изв. вузов. Матем. 2015. № 10. С. 77–82.

В. А. Попов (Москва, Россия)
vlapopov@gmail.com

УСЛОВИЕ ЗАМКНУТОСТИ ПОДГРУППЫ, ОПРЕДЕЛЯЕМОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ПОДАЛГЕБРОЙ АЛГЕБРЫ ИНФИНИТЕЗЕМАЛЬНЫХ ИЗОМЕТРИЙ

Теорема. *Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли всех векторных полей Киллинга на римановом вещественно аналитическом многообразии M, $\mathfrak{h}$ – её стационарная подалгебра в* *некоторой точке $p \in M$, G – группа, порожденная алгеброй $\mathfrak{g}$ и H – подгруппа, порождённая подалгеброй $\mathfrak{h}$. Если H не замкнута в G, то алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$ обладают следующими свойствами.*

1. $\mathfrak{g}$ имеет ненулевой центр $\mathfrak{z}$.

2. Существует векторное поле $Z \in \mathfrak{z}$, не принадлежащее коммутанту алгебры $\mathfrak{g}$, $Z \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, следовательно, существует подалгебра $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ такая, что $\mathfrak{g}_0 \bigoplus tZ = \mathfrak{g}$. Для любой такой подалгебры имеет место равенство $dim(\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{h}) = dim\mathfrak{h} - 1$.

Приведём идею доказательства теоремы. Рассмотрим замыкание $\overline{H}$ группы H в G и подалгебру Ли $\overline{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{g}$ подгруппы $\overline{H} \subset G$. Подалгебра $\mathfrak{h}$ является нормальной подалгеброй алгебры $\overline{\mathfrak{h}}$. Рассмотрим однопараметрическую подгруппу $\overline{h}_t \in \overline{H}$, $\overline{h}_t \notin H$. Тогда внутренний автоморфизм $x \mapsto \overline{h}_t x h_t^{-1}$, $x \in G$, являются пределом последовательности внутренних автоморфизмов $x \mapsto h_n x \overline{h}_t^{-1}$, $h_n \in H$. Так как внутренние автоморфизмы $x \mapsto h_n x h_n^{-1}$ определяют изометрии $x \mapsto h_n x$ шара $B \subset M$, то внутренний автоморфизм определяет изометрию $x \mapsto \overline{h}_t x \overline{h}_t^{-1}$ шара B. Тогда для всех достаточно малых t определена локальная изометрия $x \mapsto \overline{h}_t x$ и, следовательно, локальная изометрия $x \mapsto x\overline{h}_t$. Таким образом, умножения справа на элементы локальной однопараметрической группы $\overline{h}_t$ порождает векторное поле Киллинга, коммутирующее со всеми элементами алгебры $\mathfrak{g}$.

Как было показано выше, группа G содержит однопараметрическую подгруппу z_t умножений справа на $\overline{h}_t \in G \subset AutG$. Если $\overline{h}_t \in (G;G)$, то $z_t \notin (G;G)$ (автоморфизм, порождённый умножением справа не может быть равным автоморфизму, порождённому умножением слева). Если $\overline{h} \notin (G;G)$, то существует подгруппа $G_0 \subset G$ коразмерности 1 такая, что $z_t \notin G_0$. Следовательно, группа G является прямым произведением группы G_0 и однопараметрической подгруппы $exp(tz)$. Локально действие $exp(tz)$ на многообразии M совпадает с локальной изометрией $x \mapsto x\overline{h}_t$ (умножением справа). Поэтому $G_0 p$ содержит открытую окрестность точки $p \in M$ и, следовательно, $dim(G_0 \cap H) = dimH - 1$.

И. А. Романенко (Симферополь)
rom.igor.alex@gmail.com

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ С СУБГЛАДКИМ ИНТЕГРАНТОМ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА $W^{1,p}[a;b]$

Для вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}[a;b]$ с интегральным индексом $1 \leq p < \infty$ вводится последовательность доминантных оценок роста обобщенного градиента соответствующего порядка от субгладкого интегранта. Доказаны субнепрерывность и субдифференцируемость вариационного функционала в C^1-гладких точках пространств Соболева при попадании интегранта в соответствующий класс доминантных оценок. Применение данного аппарата к исследованию экстремальных вариационных задач в пространствах Соболева позволяет определить экстремали вариационных функционалов с субгладким интегрантом (одномерный случай). Рассмотрен ряд примеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Орлов И. В.* Введение в сублинейный анализ. СМФН. 2014. Т. 53. С. 64–132.

2. *Орлов И. В., Романенко И. А.* Доминантные оценки роста интегранта и гладкость вариационных функционалов в пространствах Соболева. Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 422–432.

С. А. Рощупкин (Елец, Россия)
roshupkinsa@mail.ru

ПСЕВДОЛОКАЛЬНОСТЬ ОПЕРАТОРОВ КИПРИЯНОВА-КАТРАХОВА

Следуя [1], *смешанным полным прямым и обратным преобразованием Фурье-Бесселя* функции u назовем соответственно выражения

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{F}_B[u](\xi) = \int\limits_{R_N} \mathbf{j}_\gamma(x',\xi') e^{-i\langle x'',\, \xi''\rangle}\, u(x)\, \prod\limits_{i=1}^{n} (x_i^2)^{\gamma_i/2}\, dx, \\ \mathcal{F}_B^{-1}[f](x) = C_\gamma \mathcal{F}_B[f](-x)\,, \end{array}\right| ,$$

где $\mathbf{j}_\gamma(x',\xi') = \prod\limits_{i=1}^{n} \left(j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i) - i\frac{x_i\xi_i}{\gamma_i+1} j_{\frac{\gamma_i+1}{2}}(x_i\xi_i)\right)$,

$x'\in R_n$, $x''\in R_{N-n}$, а $j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(t)$ — j-функция Бесселя, связанная с функцией Бесселя первого рода $J_\nu(t)$ равенством $j_\nu(t) = 2^\nu \Gamma(\nu+1)\frac{J_\nu(t)}{t^\nu}$.

Класс одномерных сингулярных операторов на основе этого преобразования введен И.А. Киприяновым и В.В. Катраховым в [2].

Многомерным *оператором Киприянова-Катрахова* смешанного типа с символом $a(x;\xi)$ назовем оператор, действующий на функции из $S(R_N)$ по формуле

$$\mathcal{F}_B[Au](\xi) = \int\limits_{R_N} \mathbf{j}_\gamma(x',\xi')\, e^{-i(x',\, \xi')}\, a(x;\xi) u(x) \prod\limits_{i=1}^{n} (x_i^2)^{\gamma_i/2} dx.$$

Для любого вещественного числа s через $H_\gamma^s(R_N)$ обозначим класс функций $u\in H_\gamma^s :\ \{\|u\|_{s,\gamma}^2 = \int (1+|\xi|^2)^s\, |\mathcal{F}_B[u](\xi)|^2\, (\xi')^\gamma\, d\xi\}$. Канонический сингулярный псевдодифференциальный оператор A с символом порядка однородности m имеет порядок m в H_γ^s: $\|Au\|_{s,\gamma} \le C\|u\|_{s+m,\gamma}$ (см. [1]).

Свойство псевдолокальности для рассмотренных операторов заключается в следующем (см. [3]): для произвольной области Ω^+ прилегающей к гиперплоскостям $x_i = 0,\ i = \overline{1,n}$ выполняется условие $u\in H_\gamma^s$, $u(x)=0$, $x\in\Omega^+ \Longrightarrow\ Au\in C^\infty(\Omega^+)$.

Теорема 1. *Канонический оператор Киприянова-Катрахова является псевдолокальным.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Катрахов В. В., Ляхов Л. Н.* Полное преобразование Фурье-Бесселя и алгебра сингулярных псевдодифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения, 2011. Т. 47, № 5. С. 681–695.
2. *Киприянов И. А., Катрахов В. В.* Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов // Матем. сб. 1977. Т. 104, № 6, с.49–68.
3. *Ляхов Л. Н.* О компактности и псевдолокальности сингулярных псевдодифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения, 1983. Т.19, № 6. С. 1025–1032.

N. Samko (Luleå, Sweden)
Natasha.Samko@ltu.se

WEIGHTED SINGULAR OPERATORS IN MORREY TYPE SPACES

We discuss recent results on weighted boundedness of Calderón-Zygmund singular operators in Morrey type spaces. The obtained conditions of the boundedness are given in terms of inclusion into generalized Morrey spaces of a certain function defined by parameters of the space and weight.

В. А. Слоущ (Санкт-Петербург, Россия)
v.slouzh@spbu.ru, vsloushch@list.ru

ОЦЕНКИ СИНГУЛЯРНЫХ ЧИСЕЛ ОКАЙМЛЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЙРИ

В $L_2(\mathbb{R})$ рассмотрим унитарное интегральное преобразование Эйри T, определенное равенством

$$Tu(x) := \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{Ai}(y-x)u(y)dy, \quad u \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R}).$$

Здесь $\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \cos(\frac{t^3}{3} + zt)dt$, $z \in \mathbb{R}$, — функция Эйри. Нас интересуют условия компактности, а также оценки сингулярных чисел оператора fTg при подходящих $f, g \in L_{2,loc}(\mathbb{R})$. Результаты такого рода могут быть полезны при исследовании спектра оператора Штарка $-\frac{d^2}{dx^2} + x$, возмущенного убывающим потенциалом.

Более точно, речь пойдет об условиях принадлежности оператора fTg стандартным классам Шаттена-фон-Неймана $\mathfrak{S}_p$ и классам Лоренца $\mathfrak{S}_{p,q}$. В случае $p > 2$ такие условия были получены в работе [1]. В настоящем докладе будут обсуждаться условия принадлежности операторов fTg классам $\mathfrak{S}_p$ и $\mathfrak{S}_{p,q}$ при $p \in (0, 2)$, $q \in (0, +\infty]$. В том числе мы обсудим условия ядерности операторов fTg.

REFERENCES

1. *Слоущ В. А.* Некоторые обобщения оценки Цвикеля для интегральных операторов. // Труды С.-Пб. мат. общ., т. 14 (2007), стр. 169-196.

Б. И. Сметанин (Ростов-на-Дону)
bismetanin@sfedu.ru

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В работе изложен метод построения собственных функций некоторых интегральных операторов осесимметричных смешанных задач механики сплошной среды, альтернативный известному методу [1]. Пусть $M_{2n-1}(r)$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ – многочлены по нечетным степеням $r \in [0, 1]$. При построении системы этих многочленов первые два многочлена выберем в виде: $M_1(r) = r$, $M_3(r) = \frac{5}{4}r^3 - r$. Свойство ортогональности многочленов приводит к рекуррентному соотношению

$$M_{2n-1}(r) = (A_n r^2 + B_n)M_{2n-3}(r) + (1 + B_n)M_{2n-5}(r) \quad (n = 3, 4, 5, ...),$$
$$A_n = \frac{(4n-3)(4n-5)}{2n(2n-1)}, \quad B_n = -\frac{4(n-1)(2n-3)}{(4n-3)(4n-7)}A_n.$$

Условие ортогональности многочленов $M_{2n-1}(r)$ получено в виде

$$\int\limits_0^1 w(r)M_{2m-1}(r)M_{2n-1}(r)dr = \frac{2\delta_{mn}}{n(2n-1)(4n-1)},$$

где δ_{mn}– символ Кронекера, $w(r) = r(1-r^2)^{-1/2}$; $m, n \in N$. Анализ полученных результатов приводит к выводу, что многочлены $M_{2n-1}(r)$ являются собственными функциями интегрального оператора $\Lambda M_{2n-1}(r)$, определяемого формулой

$$\Lambda M_{2n-1}(r) = \int\limits_0^1 w(y)M_{2n-1}(y)dy \int\limits_0^\infty J_1(uy)J_1(ur)du \quad (r \in [0, 1]),$$

где $J_1(z)$ – функция Бесселя. Формула для определения собственных значений λ_n оператора $\Lambda M_{2n-1}(r)$ получена в виде

$$\lambda_n = \frac{\pi(2n-1)!!(2n-3)!!}{2(2n)!!(2n-2)!!}, \quad n \in N.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344 с.

О. С. Старкова (Симферополь)
osstarkova@list.ru

ПОРЯДКОВЫЕ СВОЙСТВА НОРМЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА-ЛОРЕНЦА ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К ПОЛУКОНЕЧНОЙ АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА

Пусть $\mathcal{M}$ — полуконечная алгебра фон Неймана, $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ — решетка всех ортопроекторов в $\mathcal{M}$, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$ и $\mathbf{S}(\mathcal{M},\tau)$ — $*$-алгебра всех τ-измеримых операторов, присоединенных к $\mathcal{M}$.

Невозрастающей перестановкой оператора $T \in \mathbf{S}(\mathcal{M},\tau)$ называется функция $\mu(T)(t) = \inf\{\|TP\|_{\mathcal{M}} \colon P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}), \tau(P^{\perp}) \leqslant t\}$, $t > 0$.

Линейное подпространство $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{S}(\mathcal{M},\tau)$ с банаховой нормой $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$ называется симметричным пространством на $(\mathcal{M},\tau)$, если из $T \in \mathbf{E}$, $S \in \mathbf{S}(\mathcal{M},\tau)$ и $\mu(S)(t) \leq \mu(T)(t)$ для любого $t > 0$ следует, что $S \in \mathbf{E}$ и $\|S\|_{\mathbf{E}} \leq \|T\|_{\mathbf{E}}$.

Банахово пространство $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ называется вполне симметричным, если из того что $T \in \mathbf{E}$, $S \in \mathbf{S}(\mathcal{M},\tau)$ и $\int\limits_0^x \mu(T)(t)\,dt \leqslant \int\limits_0^x \mu(S)(t)\,dt$ для всех $x > 0$ следует, что $S \in \mathbf{E}$ и $\|S\|_{\mathbf{E}} \leq \|T\|_{\mathbf{E}}$.

Норма вполне симметричного пространства $\mathbf{E}$

— порядково непрерывна, если из $T_\alpha \downarrow 0$ в $\mathbf{E}$ следует, что $||T_\alpha||_{\mathbf{E}} \downarrow 0$;

— монотонно полна, если из $0 \leq T_\alpha \subset \mathbf{E}$, $\sup ||T_\alpha||_{\mathbf{E}} < \infty$ следует, что существует $\sup T_\alpha = T \in \mathbf{E}$ и $||T||_{\mathbf{E}} = \sup ||T_\alpha||_{\mathbf{E}}$.

Пусть Φ и W функции Орлича и Лоренца соответственно. Пространство Орлича-Лоренца определяется как множество

$$\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W} = \mathbf{\Lambda}_{\Phi,W}(\mathcal{M},\tau) = \{T \in \mathbf{S}(\mathcal{M},\tau) \colon \mu(T) \in \mathbf{\Lambda}_{\Phi,W}(0,\infty)\}$$

с нормой

$$\|T\|_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W}(\mathcal{M},\tau)} = \inf\left\{a > 0,\ \int\limits_0^\infty \Phi\Big(\frac{\mu(T)(t)}{a}\Big) dW(t) \leq 1\right\},$$

где $\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W}(0,\infty)$ — пространство Орлича-Лоренца на полупрямой $(0,\infty)$.

Теорема 1. $(\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W}, ||\cdot||_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W}})$ — *вполне симметричное пространство, норма которого монотонно полна.*

Теорема 2. *Если функция Орлича Φ удовлетворяет Δ_2 условию и W непрерывна в нуле, тогда пространство $(\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W}, ||\cdot||_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W}})$ обладает порядково непрерывной нормой.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Chilin V., Litvinov S.* Individual ergodic theorems in noncommutative Orlicz spaces // Positivity 2016. (Published online: 26 February 2016 DOI 10.1007/s11117-016-0402-8)

2. *Dodds P. G., Dodds T. K., Pegter B.* Fully symmetric operator spaces // Integr. Equat. Oper. Theor 1992. Vol. 15, P. 942-972.

3. *Муратов М. А., Чилин В. И.* Алгебры измеримых и локально измеримых операторов, Труды Института математики НАН Украины том 69, 2007. – 390 с.

Ф. С. Стонякин (Симферополь)
fedyor@mail.ru

ТЕОРЕМЫ ОТДЕЛИМОСТИ В СУБЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ КОНУСАХ [1]

В работе выделен класс сублинейных конусов, которые отличаются от выпуклых конусов отсутствием второго дистрибутивного закона. В терминах выпуклой и аффинной оболочек элемента такого конуса предложены соответствующие аналоги второго дистрибутивного закона. Построены примеры сублинейных конусов как обладающих, так и не обладающих такими свойствами. Введено понятие сублинейного нормированного конуса (СНК), отличительная черта которого — дополнительные аксиомы, которые могут не вытекать из стандартного набора, если СНК не есть линейное пространство.

В сублинейных конусах с выпуклым или аффинным аналогом второго дистрибутивного закона, а также с законом сокращения получен аналог теоремы Хана-Банаха о продолжении линейного функционала с сохранением выпуклой оценки, а также некоторые следствия — аналог леммы об опорном функционале и аналог теоремы о разделении точек линейными ограниченными функционалами.

На базе этого результата доказаны теоремы об отделимости в СНК, введено понятие сопряжённого конуса и пространства к СНК, доказана теорема о линейном, инъективном и изометричном вложении СНК в линейное нормированное пространство. Доказана возможность переноса полученных результатов в специальный класс СНК, не обладающих законом сокращения.

В качестве приложений на класс сепарабельных СНК перенесен аналог теоремы Данжуа-Юнг-Сакса о производных числах [1], что позволило перенести в класс СНК некоторые результаты теории компактных субдифференциалов первого и высших порядков [2].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Стонякин Ф. С.* Аналог теоремы Данжуа-Юнг-Сакса о контингенции для отображений в пространства Фреше и одно его приложение в теории векторного интегрирования // Труды Инст. прикл. мат. и мех. НАН Украины. 2010. Т. 20. С. 168 – 176.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских учёных – кандидатов наук (проект МК-2915.2015.1).

2. *Орлов И. В.* Введение в сублинейный анализ // Соврем. мат. Фундам. направл. 2014. Т. 53. С. 64 – 132.

А. С. Калитвин, Н. И. Трусова (Липецк)
kalitvinas@mail.ru, trusova.nat@gmail.com

СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАММЕРШТЕЙНА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ $C^{(1),n}(D)$ [1]

Рассмотрим систему
$$x(t,s) = (KFx)(t,s), \tag{1}$$
где $x(t,s) = (x_1(t,s),\dots,x_n(t,s))^T$, $K = (K_{ij})_{i,j=1}^n$,
$$(K_{ij}x_j)(t,s) = \int\limits_a^t l_{ij}(t,s,\tau) f_j(\tau,s,x_j(\tau,s))d\tau + \int\limits_c^s m_{ij}(t,s,\sigma) f_j(t,\sigma,x_j(t,\sigma))d\sigma +$$
$$+ \int\limits_a^t \int\limits_c^s n_{ij}(t,s,\tau,\sigma) f_j(\tau,\sigma,x_j(\tau,\sigma))d\tau d\sigma, \quad i = 1,...,n,$$
оператор суперпозиции $(Fx)(t,s) = (f_1(t,s,x_1(t,s)),...,f_n(t,s,x_n(t,s))^T$, $t \in [a,b]$, $\tau \in [a,t]$, $s \in [c,d]$, $\sigma \in [c,s]$, $u \in (-\infty,+\infty)$, $l_{ij}(t,s,\tau)$, $m_{ij}(t,s,\sigma)$ и $n_{ij}(t,s,\tau,\sigma)$ — вещественные функции. Через $C^{(1)}(D)$ обозначим пространство непрерывно дифференцируемых на $D = [a,b] \times [c,d]$ функций, а через $C^{(1),n}(D)$ - пространство вектор - функций $x = (x_1,\dots,x_n)$, где $x_j \in C^{(1)}(D)(j = 1,\dots,n)$.

Теорема 1. *Пусть l_{ij}, m_{ij}, n_{ij} – непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка по t и s функции, f_j – непрерывно дифференцируемые функции на $D \times (-\infty,+\infty)$ $(i,j = 1,\dots,n)$, удовлетворяющие условию Липшица по последней переменной. Тогда система (1) имеет в $C^{(1),n}(D)$ единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений.*

Отметим, что свойства линейных и нелинейных операторов и уравнений с частными интегралами в различных функциональных пространствах исследовались в [1-2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калитвин А. С.* Нелинейные операторы с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2014. – 208 с.

2. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра - Фредгольма с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2006. – 177 с.

[1]Работа поддержана Минобрнауки России (Госзадание, проект № 2015/351, НИР № 1815).

Р. М. Хакимов (Ташкент, Узбекистан)
rustam-7102@rambler.ru

СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ HARD-CORE МОДЕЛИ НА НЕКОТОРОМ ИНВАРИАНТЕ

Пусть $\tau^k = (V, L)$ есть дерево Кэли порядка $k \geq 1$. Известно, что τ^k можно представить как G_k - свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка (см.[4]). Пусть $\Phi = \{0, 1\}$ и $\sigma \in \Phi^V$-конфигурация. Конфигурация σ называется допустимой, если $\sigma(x)\sigma(y) = 0$ для любых соседних $\langle x, y\rangle$. Гамильтониан HC-модели определяется по формуле $H(\sigma) = J \sum\limits_{x\in V} \sigma(x)$, если $\sigma-$допустимая и $H(\sigma) = +\infty$, если $\sigma-$не допустимая.

Определение меры Гиббса и других понятий, связанных с теорией мер Гиббса, можно найти, например, в работе [4]. В работе [2] доказана единственность слабо периодической меры Гиббса для нормального делителя индекса два.

Известно [1], что каждой мере Гиббса для HC-модели можно сопоставлять совокупность величин $z_x = \{z_x, x \in G_k\}$, удовлетворяющих $z_x = \prod\limits_{y\in S(x)} (1 + \lambda z_y)^{-1}$, где $S(x)$- множество прямых потомков точки $x \in V$ и $\lambda > 0$- параметр.

Пусть $A \subset \{1, 2, ..., k+1\}$, $i = |A|-$мощность множества A и $I_2 = \{(z_1, z_2, z_7, z_8) \in R^4 : z_1 = z_7,\ z_2 = z_8\}$ инвариантное множество, определенное в работе [2]. Следующая теорема улучшает один из результатов работы [2]:

Теорема. *Пусть $k = 2, i = 1, \lambda_{cr} = 4$. Тогда для HC-модели в случае нормального делителя индекса четыре на I_2 при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют ровно три слабо периодические меры Гибсса, одна из которых является трансляционно-инвариантной, остальные две слабо периодическими (не периодическими).*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Suhov Yu. M., Rozikov U. A.* A hard-core model on a Cayley tree: an example of a loss network // Queueing Systems. 2004. **46** P. 197–212.

2. *Хакимов Р. М.* Единственность слабо периодической гиббсовской меры для HC-модели // Математические заметки. 2013. Т. 94, № 5. С. 796–800.

3. *Хакимов Р. М.* Слабо периодические меры Гиббса для HC-модели для нормального делителя индекса четыре // Украинский математический журнал. 2015. Т. 67, № 10. С. 1409–1422.

4. *Rozikov U. A.* Gibbs measures on Cayley trees. World Scientific. 2013.

А. В. Цыганкова (Симферополь)
tsygankova_a_v@mail.ru

НЕГЛАДКИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ В МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

Вариационные задачи с негладким интегрантом составляют важную часть современного вариационного исчисления. Так, например, введение модуля под знак классического вариационного функционала уже приводит к экстремальной задаче, которая не поддается исследованию классическими методами, ввиду нарушения гладкости интегранта.

В подобных ситуациях обычно применяются методы негладкого анализа, использующие различные типы субдифференциалов, каждый из которых имеет свои преимущества и свою разумную область применимости.

Данная работа посвящена приложениям K-субдифференциального исчисления к исследованию экстремальных вариационных задач с негладким (а именно субгладким) интегрантом (многомерный случай). Работа содержит вариационные приложения теории K-субдифференциалов первого порядка к экстремальным задачам с субгладким интегрантом. Получена оценка первого K-субдифференциала для вариационного функционала с субгладким интегрантом. Рассмотрены частные случаи, в том числе случай композиции субгладкой и гладкой функций. Получен компактный выпуклый аналог вариационного уравнения Эйлера-Остроградского. Разработанная методика позволяет найти в ряде случаев гладкую субэкстремаль, которая не поддается определению классическими методами, ввиду субгладкости интегранта. На базе теории K-субдифференциалов высших порядков, получена оценка второго K-субдифференциала вариационного функционала. С помощью этой оценки получен соответствующий аналог необходимого условия Лежандра. Также получен субгладкий аналог достаточного условия в терминах гессиана интегранта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Орлов И. В.* Введение в сублинейный анализ // Современная математика. Фундаментальные направления. 2014. Т. 53. С. 64–132.

2. *Orlov I. V., Tsygankova A. V.* Multidimensional variational functionals with subsmooth integrands // Eurasian Mathematical Journal. 2015. Vol. 6, № 3. P. 54–75.

Ali A. Shukur (Minsk, Belarus)
shukur.math@gmail.com

ON THE RIGHT-SIDE RESOLVENTS OF WEIGHTED SHIFT OPERATORS

A family of operators $R(\lambda)$ is said to be *Right-side resolvent* of a linear bounded operator B, if $(B-\lambda I)R(\lambda)=I$ and $R(\lambda)$ depend on λ analytically. If right-sided resolvent is defined on the unit circle then the resolvent can be represented by Laurent series

$$R(\lambda)=\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k B^{-k-1}(I-P)-\sum_{-\infty}^{-1}\lambda^k B^{-k-1}P,$$

where P is a bounded operator [1].

We consider discrete weighted shift operators acting on the space $l_2(\mathbb{Z})$ by $Bu(k) = a(k)u(k+1), \quad k \in \mathbb{Z}$ where $a(k)$ is a bounded sequence [2]. Now let

$$L_\eta = \{u \in l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^m) : \eta_0 u(0) + \eta_1 u(1) + ... + \eta_m u(m) = 0 \ \text{ for } \ m \geq 0\}.$$

Our problem is to construct right-sided resolvent defined on the unit circle such that $ImR(\lambda) = L_\eta$. The result in this talk formulated in the following theorem:

Theorem . Let $\lim_{k\to\pm\infty} |a(k)| = a(\pm\infty)$ and $a(-\infty) < 1 < a(+\infty)$. The right-sided resolvent $R(\lambda)$ exists if and only if $P_{m,\eta}(\lambda) \neq 0 \ \text{ for} |\lambda| = 1$, where $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda^k \eta_k}{\prod_{j=0}^{k-1} a(j)}$.

REFERENCES

1. *Antonevich A. B. E.V. Pantsialeyeva* Right-side resolvent of discrete weighted shift operators with matrix wights. // Journal PFMT 2013. 16, Vol. 3. P. 45–54.

2. *Antonevich A. B. Akhmatova A. A.* Spectral properties of discrete weighted shift operators // J. Tr. Ins. Math. 2012. 1, Vol. 20. P. 14–21.

А. Б. Шишкин (Славянск-на-Кубани)
shishkin-home@mail.ru

ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ СИММЕТРИЧНОЙ СВЕРТКИ

Пусть $\pi(z)$ — целая функция, $\mathbf{C}[\zeta]$ — кольцо многочленов, $\mathbf{C}[\pi(z)]$ — кольцо многочленов от $\pi(z)$. Линейный непрерывный оператор sym, действующий в пространстве целых функций, называется оператором π-симметризации, если $\operatorname{sym} 1 = 1$, $\operatorname{sym} \mathbf{C}[\zeta] = \mathbf{C}[\pi(z)]$. В докладе будут сформулированы достаточные условия на целую функцию $\pi(z)$ и на оператор sym, при которых любое решение для однородного уравнения π-симметричной свертки $\langle S, \operatorname{sym} f(z+h)\rangle = 0$ можно аппроксимировать элементарными решениями. Точнее, на функцию $\pi(z)$ накладываются ограничения типа оценок снизу, а для оператора sym предполагается выполненным следующее условие: для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \varlimsup_{z\to+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(\operatorname{sym} \zeta^n)(z)}{\exp \varepsilon |z|}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\varepsilon e}.$$

Полученный результат коренным образом расширяет семейство однородных уравнений типа свертки в пространствах аналитических функций (на выпуклых областях), решение которых получило исчерпывающее описание. Он потребовал серьезной подготовки и доказан по следующей схеме:

1) переход от задачи спектрального синтеза в пространствах аналитических функций к задаче локального описания в пространствах целых функций [1, теорема 3];

2) сведение задачи локального описания к проблеме полиномиальной аппроксимации в специальном весовом пространстве целых функций [1, теорема 4];

3) решение проблемы факторизации целых π-симметричных функций экспоненциального типа [2, теорема 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шишкин А. Б.* Проективное и инъективное описания в комплексной области. Двойственность // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, № 1. С. 47–65.

2. *Шишкин А. Б.* Факторизация целых симметричных функций экспоненциального типа // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, № 1. С. 42–68.

A. A. Shkalikov (Lomonosov Moscow State University)
shkalikov@mi.ras.ru; ashkaliko@yandex.ru

THE LIMIT SPECTRAL GRAPH IN THE SEMI-CLASSICAL APPROXIMATION FOR NON-SELF-ADJOINT STURM-LIOUVILLE PROBLEMS

The limit distribution of the discrete spectrum of the Sturm–Liouville problem with complex–valued analytic potential on an interval, on a half–axis, and on the entire axis is studied. It is shown that at large parameter values, the eigenvalues are concentrated near the so–called limit spectral graph; the curves forming this graph are classified. Asymptotics of the eigenvalues along curves of various types in the graph are calculated.

The talk is based on the joint papers with S.Tumanov.

М. А. Шубарин (Ростов-на-Дону)
mas102@mail.ru

ЧТО ТАКОЕ "ТУПИКОВОЕ" ПРОСТРАНСТВО

Тупиковые пространства в работах Б. С. Митягин [1] и Б. С. Митягин – Г. М. Хенкин [2] использовались для доказательства существования базиса в пространстве Фреше при дополнительном условии, которое описывается терминах принадлежности этого пространства пространственным идеалам $(\underline{DN})$ и $(\overline{\Omega})$.

Для локально выпуклых пространств E, F будем писать $E \hookrightarrow F$, если E является векторым подпространством в F, оператор вложения $j : E \to F$ непрерывен и образ этого оператора всюду плотен в F.

Пусть X — пространство Фреше, X_∞ — банахово пространство. Пространство X_∞ будем называть слабо тупиковым для X, если $X_\infty \hookrightarrow X$. Пространство X_∞ будем называть тупиковым для X, если $X_\infty \hookrightarrow X$ и существует "хорошее" семейство $[F_\tau]_{\tau\in(0,1)}$ интерполяционных функторов (определённых на категории *интерполяционных пар банаховых пространств) такое, что*

$$X = \lim_{\tau \in (0,1)} \mathrm{proj}\ F_\tau(X_0, X_\infty)$$

для подходящего банахова пространств X_0 такого, что $X \hookrightarrow X_0$. Пространство X_∞ будем называть сильно тупиковым для X, если выполняются следующие условия:

1. *X_∞ является слабо тупиковым для X;*
2. *$L(X_\infty, X_\infty) \subset L(X, X)$.*

В докладе предполагается ответить на следующий вопрос: при каких условиях для пространства Фреше существует тупиковое пространство?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Митягин Б. С.* Эквивалентность базисов в гильбертовых шкалах // Studia Math. 1970. v. 37. p. 111–137.
2. *Митягин Б. С., Хенкин Г. М.* Линейные задачи комплексного анализа // УМН. 1971. т. 26, вып. 4. С. 93–152.

Y. V. Elsaev (Grozny, Russia)
zelimus-951@mail.ru

THE DUAL SPACE FOR A HILBERT A-MODULE

The theory of Hilbert A-modules is widely represented in literature $[1-3]$. A Hilbert A-module E over a locally $C^\star$-algebra A (or a Hilbert A-module) is a linear space that is also a right A-module, equipped with an A-valued inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ that is $\mathbb{C}$-linear and A-linear in the second variable and conjugate linear in the first variable such that E is complete as topological vector space with the family of seminorms $\|x\|_\lambda = \|\langle x, x\rangle\|_\lambda^{\frac{1}{2}}$.

Let E be a Hilbert A-module over locally C^*-algebra A. The vector space of all continuous A-homomorphisms from E to A is called a *module dual* space for E and denoted by E'. By (H_A) is denoted a standard Hilbert A-module. Let A be a locally C^*-algebra with the family of seminorms $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. By $\mathcal{S}$ is a denoted a set of all sequences (y_n), $y_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, such that for every $\lambda \in \Lambda$ there exists C_λ, such that $p_\lambda\Big(\sum\limits_{i=1}^{k} y_i^* y_i\Big) \leq C_\lambda$; $k \in \mathbb{N}$.

Theorem 1. *Let A be a unital, locally $C^\star$-algebra with respect of the family of seminorms $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Then $(H_A)' = \mathcal{S}$.*

REFERENCES

1. *Мануйлов В. М., Троицкий Е. В.* $C^\star$-гильбертовы модули.—М.: Факториал, 2001.
2. *Joita M.* Hilbert modules over locally $C^\star$-algebras. University of Bucharest Press, 2006.
3. *Lance E. C.* Hilbert $C^\star$-modules. A toolkit for operator algebraists. Cambridge University Press, 1995.

М. У. Яхшибоев (Самаркандский филиал ТУИТ, Узбекистан)
yahshiboev@rambler.ru

ОПИСАНИЕ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ТЕРМИНАХ УСЕЧЕННЫХ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С “ ПЕРЕМЕННЫМ” УРЕЗАНИЕМ

В работе [1] рассматриваются различные способы урезания конструкций Маршо-Адамара-Чженя для дробного дифференцирования $\mathbf{D}_c^\alpha f$. В данной работе рассматривается описание дробного интеграла в терминах усеченных дробных производных с “переменным” урезанием.

Опредление. *Зафиксируем произвольную точку $c \in R_+^1$. Для функции $\varphi(x)$, заданной на полуоси $x \in R_+^1$ интеграл*

$$\left(I_c^\alpha \varphi\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} \int\limits_x^c \varphi(t) \left(\ln \frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} \frac{dt}{t}, & 0 < x < c, \\ \int\limits_c^x \varphi(t) \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{dt}{t}, & c < x < +\infty, \end{cases}$$

называется интегралом дробного порядка α $(\alpha > 0)$, по Адамару-Чженя.

Определение. *Зафиксируем произвольную точку $c \in R_+^1$. Для функции $f(x)$, заданной на полуоси R_+^1, выражение*

$$\left(\mathbf{D}_c^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \begin{cases} x\frac{d}{dx} \int\limits_c^x f(t) \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{-\alpha} \frac{dt}{t}, & c < x < +\infty, \\ -x\frac{d}{dx} \int\limits_x^c f(t) \left(\ln \frac{t}{x}\right)^{-\alpha} \frac{dt}{t}, & 0 < x < c, \end{cases}$$

будем называть дробной производной Адамара-Чженя порядка α, $\alpha \in (0,1)$.

Теорема.*Для того, чтобы $f(x)$ была представлена в виде $f = J_c^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_p^{loc}\left(R_+^1, \frac{dx}{x}\right)$, где $\alpha \in (0,1)$, $c \in R_+^1$, $1 \le p < +\infty$ необходимо и достаточно, чтобы $\left|\ln \frac{x}{c}\right|^{-\alpha} f(x) \in L_p^{loc}\left(R_+^1, \frac{dx}{x}\right)$ и в $L_p^{loc}\left(R_+^1, \frac{dx}{x}\right)$ существовал*

$$\lim_{\rho \to 1} \left(\mathbf{D}_{c,\rho}^\alpha f\right)(x), \text{ где } \rho = \rho(x) = \left|\ln \frac{x}{c}\right| \ln \frac{1}{\rho}, \ \frac{1}{e} < \rho < 1.$$

$$\varphi_\rho = \lim_{\rho \to 1} \left(\mathbf{D}_{c,\rho}^\alpha f\right)(x) = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)\left|\ln \frac{x}{c}\right|^\alpha} +$$

$$+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{\left|\ln \frac{x}{c}\right| \ln \frac{1}{\rho}}^{\left|\ln \frac{x}{c}\right|} \left[f(x) - f\left(x \cdot e^{-t sign\left(\ln \frac{x}{c}\right)}\right)\right] \frac{dt}{t^{1+\alpha}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Samko S. G, Yakhshiboev M. U.* A Chen-type Modification of Hadamard Fractional Integro-Differentiation. Operator Theory, Operator Algebras and Applications. Springer Basel, 2014. C. 325–339.

Секция II

Теория функций и теория аппроксимаций

A. V. Abanin (Rostov-na-Donu, Russia)
abanin@math.sfedu.ru

EFFECTIVE (SAMPLING) SETS FOR HORMANDER ALGEBRAS[1]

Sampling sets for Banach spaces of holomorphic functions in a domain Ω with uniform or integral weighted norm are those subsets S of Ω such that the similar norm defined by the restrictions of functions to S is equivalent to the original one.

They have been studied intensively by many authors (Domański, Lindström, Marco, Massaneda, Ortega-Cedrà, Seip, Thomas).

In the general setting of locally convex spaces the concept of sampling sets coincides with the notion of sufficient sets introduced by Ehrenpreis in 1970.

For weighted (LB)-spaces it is natural to use the concept of weakly sufficient sets given by Schneider in 1974.

In 1997 Horowitz et al. [1] defined sampling sets for the (DFS)-space $A^{-\infty}$ of holomorphic functions in the unit disk $\mathbb{D}$ with polynomial growth as those subsets S of $\mathbb{D}$ such that the types of any function from $A^{-\infty}$ on $\mathbb{D}$ and S coincide.

A year later Khoi and Thomas [2] showed that every sampling set for $A^{-\infty}$ is weakly sufficient for this space but the converse is not true.

We have recently revealed the topological structure of $A^{-\infty}$-sampling sets [3].

In this talk it will be presented a new approach to study sampling sets for Hörmander algebras of a general type. The family of Hörmander algebras is rather large and contains many well-known spaces; in particular, $A^{-\infty}$, the space of all entire functions of exponential type, and the space of Fourier transformations of distributions with compact support in the real line. It should be noted that from some reasons we prefer to use the term effective sets instead of sampling ones. Our main results show that effective (sampling) sets for a Hörmander algebra H is exactly universally weakly sufficient ones for the Hörmander spaces of mean type having H as the inductive limit space.

REFERENCES

1. *Horowitz C., Korenblum B., Pinchuk B.* Sampling sequences for $A^{-\infty}$ // Michigan Math. J. 1997. Vol. 44, № 2. P. 389–398.
2. *Khoi L. H., Thomas P.* Weakly sufficient sets for $A^{-\infty}(\mathbb{D})$ // Publ. Mat. 1998. Vol. 42, № 2. P. 435–448.
3. *Abanin A. V.* Sampling sets for the space of holomorphic functions of polynomial growth in a ball // Ufa Math. J. 2015. Vol. 7, № 4. P. 3–13.

[1]The research was supported by Russian Foundation for Basic Research under Project 15-01-01404

T. M. Andreeva, A. V. Abanin (Rostov-na-Donu, Russia)
metzi@yandex.ru, abanin@math.sfedu.ru

DUALS FOR HOLOMORPHIC WEIGHTED SPACES IN CARATHEODORY DOMAINS[1]

Let G be a domain in $\mathbb{C}$ and $H(G)$ the space of all holomorphic functions in G. For a continuous function (a weight) $v : G \to \mathbb{R}$ define the Banach space

$$H_v(G) := \Big\{ f \in H(G) : ||f||_v := \sup_{z\in G} |f(z)|e^{-v(z)} < \infty \Big\}.$$

For a decreasing (increasing) sequence of weights $V = (v_n)$ define the projective (inductive) limit $HV(G) := \operatorname{proj} H_{v_n}(G)$ (resp., $\mathcal{V}H(G) := \operatorname{ind} H_{v_n}(G)$). In the talk it will be presented new results concerning the description of the duals of $HV(G)$ and $\mathcal{V}H(G)$ for nonconvex domains G when the Cauchy transformation of functionals is used. This problem was studied before in [1-3] for weighted sequences of particular types.

Our main restriction on a projective weight sequence is that there exists a positive function $\rho(z) < \operatorname{dist}(z, \partial G)$ such that for any $n \in \mathbb{N}$ there is $C_n > 0$ with

$$\sup_{|\zeta - z|\le d(z)} v_{n+1}(\zeta) + \ln\frac{1}{\rho(z)} \le C_n + \inf_{|\zeta - z|\le d(z)} v_n(\zeta),\ \forall z \in G.$$

For the inductive case it is enough to interchange v_{n+1} and v_n. We assume additionally that G is a Carathéodory domain.

Under these restrictions, the Cauchy transformation of functionals establishes an isomorphism between $HV(G)$ (or $\mathcal{V}H(G)$) and a certain space of functions that are holomorphic out of $\overline{G}$, vanish at infinity and have an infinite differentiable extension g into $\overline{G}$ with a given estimate of $\partial g/\partial \bar{z}$.

REFERENCES

1. *Trunov K. V., Yulmukhametov R. S.* Quasianalytic Carleman classes on bounded domains // St. Petersburg Math. J. 2009. Vol. 20. P. 289–317.

2. *Varziev V. A., Melikhov S. N.* On a dual to the space of analytic functions of polynomial growth near the boundary // Vladikavkaz. Math. J. 2008. Vol. 10, № 4. P. 17–22 (in Russian).

3. *Abanin A. V., Le Hai Khoi.* Cauchy transformation and mutual dualities between $A^{-\infty}(\Omega)$ and $A^{\infty}(C\Omega)$ for Carathéodory domains // Bull. Belgian Math. Soc. Simon Stevin. 2016. Vol. 23. P. 87–102.

[1]The research was supported by Russian Foundation for Basic Research under Project 15-01-01404

О. А. Баюк, Г. П. Емгушева (Москва)
oleg_bayuk@mail.ru, galina_emg@mail.ru

СОВМЕСТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛИНОМОВ ГЕЛЬФОНДА

Известно, что производная полинома Гельфонда с точностью до постоянного множителя равна полиному Чебышева первого рода более низкой степени [1]. Это свойство позволяет приближенно представить производную некоторой функции полиномом Фурье по многочленам Чебышева первого рода, а функцию — полиномом по многочленам Гельфонда с теми же коэффициентами.

Авторами исследованы некоторые приложения указанного подхода к задачам, в которых требуется использовать приближение функции и ее производных.

Для вычисления значений функции и ее производных при заданном значении аргумента предложено использовать модифицированный алгоритм Кленшоу.

Исследована возможность применения указанного метода для решения следующих задач:

— вычисление коэффициентов полинома по заданным значениям функции и производной;

— вычисление коэффициентов полинома по заданным значениям функции и первых двух производных;

— восстановление функции по массиву значений ее производной и начальной точке;

— численное интегрирование дифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфонд А. О.* О многочленах наименее уклоняющихся от нуля вместе со своими производными. Доклады Академии наук СССР 1954, 96.

Х. Х. Бурчаев (Чеченский госуниверситет, Россия)
В. Г. Рябых (Южный федеральный университет, Россия)
Г. Ю. Рябых (Донской гостехуниверситет, Россия)
bekhan.burchaev@gmail.com, ryabich@aaanet.ru, ryabich@aaanet.ru

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СУММИРУЕМЫХ ПО КРУГУ ФУНКЦИЙ [1]

Пусть $1 < q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$; $D = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$, $T = \{t : |t| = 1\}$, $A_p(H_p)$ – пространства Бергмана (Харди) в единичном круге D; $\zeta = \xi + i\eta$, $dA = \frac{1}{\pi} d\xi d\eta$ – плоская нормированная мера Лебега, $w \in L_q(D)$, $w \notin A_q$; $\omega \in A_q$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-00331).

Как хорошо известно, существуют единственные функции $\chi \in A_q$ и $\Phi \in A_p$, $\|\Phi\| = 1$, для которых

$$\inf_{x\in A_q} \|w - x\|_q = \|w - \chi\|_q,$$

$$\sup_{\varphi\in A_p} \left\{ \left| \int_D \varphi\bar{w}dA \right| : \|\varphi\|_p \le 1 \right\} = \int_D \Phi\bar{w}dA.$$

Теорема 1. *Если $1 < q < 2$ и $w(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)\overline{k(\zeta)}$, $k \in A_{q^*}$, $q \le q^* < 2$, то $\chi \in \cap_{\gamma<q_*} H_\gamma$, $q_* = q^*/(2 - q^*)$.*

В случае $q = q^* = 1$, $w \in W^{1,1}$ (пространство Соболева) в [1] доказано, что $\chi \in H_1$.

Теорема 2. *Если $1 < q < \infty$ и $w(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)^{n+1}\overline{k(\zeta)}$, $n = 0, 1, \dots$, $k \in A_{s^*}$, $s^* > 2$, $q < s^* < \infty$, то $\chi \in H_\infty$, $(|\chi_*(t)|^q)^{(n)} \in Lip\left(1 - \frac{2}{s^*}, T\right)$, где χ_* – внешняя функция функции χ.*

Теорема 3. *Если $1 < p < \infty$ и $\omega \in Lip(\alpha, T)$, $0 < \alpha < 1$, то $\Phi \in H_\infty$, $(|\Phi_*(t)|^p|^{(n)} \in Lip(\alpha, T)$, где Φ_* – внешняя функция функции Φ. Если $\omega^{(n)}$ удовлетворяет условию Зигмунда, то $(|\Phi_*(t)|^p|^{(n)}$ удовлетворяет этому условию.*

Теоремы 1–3 относятся к кругу задач, изученных в [1-4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Khavinson D., M^c Carthit John E. and Shapiro H.* Best approximation in the Mean by Analytic and Harmonic Functions. Arc. Mat. 2001. N. 39. P. 339–359.

2. *Рябых В. Г.* Экстремальные задачи для суммируемых аналитических функций. СМЖ 1986. Т. 27. N. 3. С. 212–217.

3. *Ferguson T.* Continuity of extremal elements in uniformly convex spaces. Arc. Mat. 2009. N. 137:8. P. 2645–2653.

4. *Бурчаев Х. Х., Рябых В. Г., Рябых Г. Ю.* Аналитичность в $\mathbb{C}$ экстремальных функций функционала, образованного полиномом над пространством Бергмана. Мат. форум. Исследования по математическому анализу. ЮМИ ВНЦ РАН и РСО–А. 2014. Т. 8. Ч. 1. С. 204–214.

G. Garrigós (University of Murcia, Spain)
gustavo.garrigos@um.es

A.E. CONVERGENCE OF ABEL MEANS FOR HERMITE EXPANSIONS

The Abel summability of Hermite expansions was considered by Muckenhoupt in the 60s. He showed the a.e. convergence of Abel means for all f in $L^1(d\gamma)$ with $d\gamma$ the gaussian measure. We shall show that such convergence actually holds for all $f \in L^1(d\gamma(y)/\sqrt{\log(e + |y|)})$, and that this space is optimal.

To do so, we write the Abel means as suitable Poisson integrals $u(t, x) = P_t f(x)$, which are solutions of the elliptic pde

$$u_{tt} + Lu = 0 \quad \text{on} \quad (0, \infty) \times \mathbb{R}^d, \quad \text{with} \quad u(0) = f,$$

with $L = \Delta - 2x \cdot \nabla$. We find the most general conditions on f so that $\lim_{t\to 0} P_t f(x) = f(x)$, *a.e.* x. Additionally, we solve a *2-weight problem* for the associated (local) maximal operator $P^* f(x) = \sup_{0<t\leq 1} P_t f(x)$. Namely, we characterize all weights w for which P^* maps $L^p(w) \to L^p(v)$, for some other weight v.

The tools include very precise estimates on the kernels, and techniques by Rubio de Francia and Carleson and Jones, who considered such 2-weight problems for classical operators in the 80s.

The results are part of recent joint works with Hartzstein, Signes, Torrea and Viviani.

REFERENCES

1. *Garrigós, Hartzstein, Signes, Torrea, Viviani.* Pointwise convergence to initial data of heat and Laplace equations. Trans. Amer. Math. Soc. 368 (9) (2016), 6575–6600.

2. *Garrigós, Hartzstein, Signes, Viviani.* A.e. convergence and 2-weight inequalities for Poisson-Laguerre semigroups. Preprint (available at `arxiv.org`)

A. V. Dyachenko (Berlin, Germany)
dyachenk@math.tu-berlin.de

HURWITZ AND HURWITZ-TYPE MATRICES OF TWO-WAY INFINITE SERIES

A function is stable or Hurwitz-stable if all its zeros lie in the left half of the complex plane. The classical approach to the Hurwitz stability (dating back to Hermite and Biehler) exploits a deep relation between stable functions and mappings of the upper half of the complex plane into itself (i.e. $\mathcal{R}$-functions). Hurwitz introduced a connection between minors of the Hurwitz matrix and the Hankel matrix built from coefficients of the corresponding $\mathcal{R}$-function (moments), which resulted in the famous Hurwitz criterion.

More recent studies [1,5] highlighted another property related to Hurwitz-stability: the total nonnegativity of corresponding Hurwitz matrices, that is nonnegativity of all their minors. The paper [2] extends the criterion [4] to a complete description of power series (singly infinite or finite) with totally nonnegative Hurwitz matrices.

During my talk, I am going to extend this result further to two-way (i.e. doubly) infinite power series. The extension is prompted by the criterion [3], because each Hurwitz matrix is built from two Toeplitz matrices. Nevertheless, the essential connection to Hankel matrices breaks here (no correspondent Stieltjes continued fraction), and thus the doubly infinite case requires an approach distinct from the singly infinite case.

REFERENCES

1. *Asner B.,A. Jr.* On the total nonnegativity of the Hurwitz matrix. // SIAM J. Appl. Math. 1970. T. 18, Vol. 2. P. 407–414.
2. *Dyachenko A.* Total nonnegativity of infinite Hurwitz matrices of entire and meromorphic functions. // Complex Anal. Oper. Theory 2014. T. 8, Vol. 5. P. 1097–1127.

3. *Edrei A.* On the generating function of a doubly infinite, totally positive sequence. // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. T. 74, Vol. 3. P. 367–383.
4. *Holtz O., Tyaglov M.* Structured matrices, continued fractions, and root localization of polynomials. // SIAM Rev. 2012. T. 54, Vol. 3. P. 421–509.
5. *Kemperman J. H. B.* A Hurwitz matrix is totally positive. // SIAM J. Math. Anal. 1982. T. 13, Vol. 2. P. 331–341.

E. R. Joel (Medellin, Colombia)
cocojoel89@yahoo.es

BOUNDARY PROPERTIES OF SOME SEVERAL CLASSES OF DELTA-SUBHARMONIC FUNCTIONS OF BOUNDED TYPE

Several ω-weighted subclasses of delta-subharmonic functions of bounded type are introduced in the upper half plane. The descriptive representations of these classes are given by means of some new Green type potentials and integrals with Cauchy type kernels. The boundary values of the considered classes are described by means of some ω-capacity on the real axis which becomes to the Frostman's α-capacity in a particular case.

В. П. Заставный (Донецк)
zastavn@rambler.ru

ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ОПРЕДЕЛЁННОСТЬ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ И ПРОБЛЕМА ШЁНБЕРГА

Функция $f:\ E \to \mathbb{C}$, заданная на вещественном линейном пространстве E, $\dim E \geq 1$, называется положительно определённой ($f \in \Phi(E)$), если неравенство $\sum\limits_{k,j=1}^{m} c_k \bar{c}_j f(x_k - x_j) \geq 0$ выполняется для любых $m \in \mathbb{N}$, $c_1, c_2, ..., c_m \in \mathbb{C}$ и $x_1, ..., x_m \in E$. Пусть функця $\rho:\ E \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям: $\rho(x) \geq 0$, $\rho(tx) = |t|\rho(x)$, $x \in E$, $t \in \mathbb{R}$, и $\rho(x) \not\equiv 0$ на E. Символом $\Phi(E,\rho)$ обозначим класс всех непрерывных функций $f:\ [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ таких, что $f \circ \rho \in \Phi(E)$. Константой Шёнберга будем называть величину

$$\alpha(E,\rho) := \sup\left\{\lambda \geq 0 :\ \exp\left(-t^{\lambda}\right) \in \Phi(E,\rho)\right\}.$$

Хорошо известно, что $\alpha\left(l_2^n\right) = 2$, $0 \leq \alpha(E,\rho) \leq 2$ и $\exp\left(-t^{\lambda}\right) \in \Phi(E,\rho) \iff 0 \leq \lambda \leq \alpha(E,\rho)$. Для пространств l_p^n константы Шёнберга известны (см., например, [1]): случай $n \geq 2$, $0 < p \leq 2$, исследовал Шёнберг, а в остальных случаях независимо и разными методами эти константы найдены в 1991 Колдобским и Заставным.

Функция f называется вполне монотонной на $(0,+\infty)$ (пишем $f \in M_{(0,+\infty)}$), если $f \in C^{\infty}(0,+\infty)$ и $(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и $x > 0$. В теореме 1 для широкого класса функций f найдены все значения λ, при которых функция $f(\rho^\lambda(x))$ п.о. на E.

Теорема 1. *Пусть* $f \in C[0,+\infty) \cap M_{(0,+\infty)}$, $f \not\equiv const$ *и существует правая производная в нуле* $f'(0)$. *Тогда при* $\lambda \in \mathbb{R}$ *справедливы утверждения:* **1)** $f(t^\lambda) \in \Phi(E,\rho) \iff 0 \le \lambda \le \alpha(E,\rho)$. **2)** $1/f(t^\lambda) \notin \Phi(E,\rho)$ *при всех* $\lambda > 0$. **3)** *Если* $f(+\infty) = 0$, *то* $1/f(t^\lambda) \notin \Phi(E,\rho)$ *при всех* $\lambda < 0$.

Пример 1. Пусть $g_{\lambda,\beta}(t) := 1/(1+t^\lambda)^\beta$, $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. Применяя теорему к функции $f(t) = 1/(1+t)^\beta$, $\beta > 0$, получаем, что:
1) Если $\beta > 0$, то $g_{\lambda,\beta} \in \Phi(E,\rho) \iff 0 \le \lambda \le \alpha(E,\rho)$.
2) Если $\beta < 0$, то $g_{\lambda,\beta} \notin \Phi(E,\rho)$ при $\lambda \ne 0$.
В евклидовом случае этот результат хорошо известен: если $\beta > 0$, то $g_{\lambda,\beta} \in \Phi(l_2^n) \iff 0 \le \lambda \le \alpha\left(l_2^n\right) = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zastavnyi V. P.* On Positive Definiteness of Some Functions // JMVA 2000. V. 73, № 1. P. 55–81.

A. N. Karapetyants (Rostov-on-Don, Russia), S. G. Samko, (Faro, Portugal)
karapetyants@gmail.com, ssamko@ualg.pt

NON STANDARD BERGMAN TYPE SPACES ON THE UNIT DISC

We introduce and study various function spaces of analytic functions equipped with special mixed norm. The core of this study is to reveal properties of functions under investigation in connection with the special mixed norm, which is constructed with use of variable order Lebesgue space norm, Morrey type norms (including local and global, and the integral Morrey norm), and with the use of more general analogues.

In particular, the mixed norm variable order Lebesgue - type space $\mathcal{L}^{q,p(\cdot)}(\mathbb{D})$ is defined by the requirement that the sequence of variable exponent $L^{p(\cdot)}(I)$ - norms of the Fourier coefficients of the function f belongs to l^q. Then the first main object of investigation - the variable order Bergman space $\mathcal{A}^{q,p(\cdot)}(\mathbb{D})$, $1 \leqslant q < \infty$, $1 \leqslant p(r) \leqslant \infty$, on the unit disc $\mathbb{D}$ is defined to be the subspace of $\mathcal{L}^{q,p(\cdot)}(\mathbb{D})$ which consists of analytic functions. We prove the boundedness of the Bergman projection and reveal the dependence of the nature of such spaces on possible growth of variable exponent $p(r)$ when $r \to 1$ from inside the interval $I = (0,1)$. The situation is quite different in the cases $p(1) < \infty$ and $p(1) = \infty$. In the case $p(1) < \infty$ we also characterize the introduced Bergman space $\mathcal{A}^{2,p(\cdot)}(\mathbb{D})$ as the space of Hadamards's fractional derivatives of functions from the Hardy space $H^2(\mathbb{D})$. The case $p(1) = \infty$ is specially studied, and an open problem is formulated in this case. We also reveal the conditions on the rate of growth of $p(r)$ when $r \to 1$, when $\mathcal{A}^{2,p(\cdot)}(\mathbb{D}) = H^2(\mathbb{D})$ isometrically, and when this is not longer true.

As a continuation, in a similar way we introduce and study mixed norm Bergman-Morrey space $\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, mixed norm Bergman - Morrey space of local type $\mathcal{A}^{q;p,\lambda}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{D})$, and mixed norm Bergman - Morrey space of complementary type ${}^{\complement}\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$ on the unit disk $\mathbb{D}$ in the complex plane $\mathbb{C}$, and their analogues where the Morrey type norm is substituted by the integral Morrey norm. We also consider such mixed norm spaces when the classical Morrey norm is replaced by generalized Morrey norm.

For all these new spaces the main interests of study, as above, are: boundedness of the Bergman projection, equivalent description of spaces, including the description in terms of Hadamard fractional derivatives, and revealing new effect caused by using mostly real analysis constructions in the complex analysis settings.

REFERENCES

1. *Karapetyants A. N., Samko S. G.* Mixed norm variable exponent Bergman space on the unit disc. // Complex Variables and Elliptic Equations, 2016.

2. *Karapetyants A. N., Samko S. G.* Mixed norm Bergman - Morrey type spaces on the unit disc // Mathematical Notes, 2016.

Л. В. Карташева, Т. Н. Радченко (Ростов-на-Дону)
kartasheva@mail.ru

СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СО СТЕПЕННЫМ ВЕСОМ НА ЗАМКНУТОМ КОНТУРЕ

Пусть L — простой гладкий замкнутый контур, делящий плоскость комплексного переменного на внутреннюю область $\mathcal{D}^+$ и внешнюю $\mathcal{D}^-$, и пусть $t_k \in L$ $(k = 1, 2, \dots, n)$. Под $\rho(t) = \prod\limits_{k=1}^{n} (t - t_k)^{\alpha_k}$, $0 < \alpha_k < 1$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ будем понимать предельное значение аналитической в $\mathcal{D}^+$ функции $\prod\limits_{k=1}^{n} (z - t_k)^{\alpha_k}$.

В классе гельдеровских функций $H_\lambda(L)$ рассматривается сингулярное интегральное уравнение вида:

$$A\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + b(t)(S\varphi)(t) + c(t)(T\varphi)(t) = f(t), \qquad (1)$$

где $T = S - S_\rho$, $a(t), b(t), c(t), f(t) \to H_\lambda(L)$

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau, \quad (S_\rho\varphi)(t) = \frac{\rho(t)}{\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\rho(\tau)(\tau - t)}\, d\tau.$$

Уравнение (1) сводится к решению уравнения Фредгольма второго рода с ядром, имеющим слабую особенность. Решение уравнения находится в явном виде, если выполняется условие:

$$\frac{c(t)}{\chi^+(t)(a(t)+b(t))} = \frac{\ell^+}{t-z_0},$$

$\ell^+(t)$ аналитически продолжена в D^+, $z_0 \in D^+$.

Решение найдено при $\operatorname{ind} \dfrac{a-b}{a+b} \geqslant 0$ и отрицательном индексе.

Для разрешимости уравнения (1) в замкнутой форме оно сводится к краевой задаче. Доказаны равенства (для доказательства используется формула перестановки Пуанкаре–Бертрана):

1. $S_\rho^2 = I$;
2. $SS_\rho = I - S + S_\rho$, $S_\rho S = T - S_\rho + S$;
3. $T = P^+TP^- = P_\rho^+TP_\rho^-$,

где $P^\pm = \frac{1}{2}(I \pm S)$, $P_\rho^\pm = \frac{1}{2}(I \pm S_\rho)$. Условия разрешимости уравнения $A\varphi = f$ удается записать в виде условий ортогональности $f(t)$ к решениям однородного союзного уравнения.

B. A. Kats (Kazan, Russia)
katsboris877@gmail.com

INTEGRATION OVER NON-RECTIFIABLE PATHS AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Our subject is connection between the boundary value problems of Riemann – Hilbert type for analytic functions and their generalizations in domains with non-rectifiable boundaries and the problem of integration over non-rectifiable paths.

As known, the solutions of classical Riemann boundary value problem are obtained in terms of the Cauchy type integral [1,2]. This curvilinear integral is defined for rectifiable paths, and, consequently, the classical technique does not work if the boundary of domain under consideration is non-rectifiable. Therefore, the first researches of that problems (see recent survey [3]) did not use the curvilinear integrals.

But the furthest considerations show that the problem of integration over non-rectifiable paths is equivalent to so called jump problem, which is the simplest boundary value problem of Riemann – Hilbert type. Here we describe this equivalency.

We consider a non-rectifiable closed Jordan curve Γ on the closed plane, and a function $f(t)$ on this curve. Let $F(z)$ be differentiable in $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ function with integrable partial derivatives of the first order with compact support. If it is a solution of the jump problem (for differentiable functions), i.e., $F^+(t) - F^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma$, where $F^\pm(t)$ are limit values of F at the point t from the left and from the right, then the distribution

$$\int_{\Gamma}^{(S)} f \cdot dt : C_0^{\infty} \ni \omega \mapsto \int_{\Gamma}^{(S)} f\omega\, dz := -\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial F\omega}{\partial \overline{z}} dz d\overline{z}$$

is a generalization of curvilinear integration over Γ with weight f. If we define the Cauchy type integral over Γ by means of this distribution, then it gives solution of the jump problem for analytic functions. The generalized integrals with other kernels represent solutions of other versions of the Riemann boundary value problem.

REFERENCES

1. *Gakhov F. D.* Boundary value problems. Nauka, Moscow, 1988.
2. *Muskhelishvili N. I.* Singular integral equations. Nauka, Moscow, 1962.
3. *Kats B. A.* The Riemann boundary value problem on non-rectifiable curves and related questions. // Complex Variables and Elliptic Equations. 2014. Vol. 59(8), P. 1053–1069.

D. B. Katz (Kazan, Russia)
katzdavid89@gmail.com

NEW CHARACTERISTICS OF NON-RECTIFIABLE CURVES AND THEIR APPLICATIONS

A great body of recent works is dealing with various characteristics of point sets of sophisticated structure: fractals, non-rectifiable curves and so on. The most known are Hausdorff and Minkowskii dimensions, and a number of new ones: Assouad and Aikawa dimensions and codimensions, approximation dimension, refined metric dimension and others.

In 2013 [1], [2] the author introduced a family of new metric characteristics for plane sets and called them Marcinkiewicz exponents for closed non-rectifiable Jordan curves. This name is connected with the fact that J. Marcienkiewicz first characterized features of subsets of Euclidean spaces in terms of certain integrals over their complements. In the present report we study the conditions of existence of such exponents and introduce their weighted and local versions for any compact sets, but mainly we are interested in non-rectifiable curves and arcs on the complex plane. We also study their properties and relations with known dimensions. In particular, we show that these exponents are characteristics of co-dimensional type.

Then we consider certain applications. We use these characteristics to solve the Riemann boundary value problems in domains with non-rectifiable boundaries.

In particular, the improvement of known results is connected with the fact that new features of non-rectifiable curves allow more precise description of their local properties, including a phenomenon of local asymmetry. Generally speaking, non-rectifiable curves are locally asymmetric. We also introduce left and right (inner and outer) characteristics of plane curves, what allows us to improve solvability conditions for the locally asymmetric curves.

R E F E R E N C E S

1. *D.B. Katz* The Marcinkiewicz exponent with application. Abstracts of ISAAC 9th congress, Krakow, 106-107 (2013)

2. *D.B. Katz* Marcinkiewicz exponents with applications in boundary value problems. Izvestija vuzov. Matem., (2014) no. 3, 68-71.

С. Н. Киясов (Казань)
Sergey.Kijasov@kpfu.ru

МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ КЛАССОВ ОБЩИХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ, РАЗРЕШИМЫХ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ

Пусть Γ – простой гладкий замкнутый контур, разбивающий расширенную комплексную плоскость на две области D^+ и D^- $(0 \in D^+)$. Рассмотрим на Γ *общую характеристическую систему* сингулярных интегральных уравнений

$$A(t)\mathbf{w}(t) + B(t)S[K\mathbf{w}](t) = \mathbf{f}(t), \, \det(A(t)K^{-1}(t) \pm B(t)) \neq 0. \qquad (1)$$

Здесь $S[\mathbf{w}](t)$ – сингулярный оператор, $A(t) = (a_{ij}(t)), B(t) = (b_{ij}(t)),\ i,j = \overline{1,n},\ K(t) = \mathrm{diag}\{k_1(t),...,k_n(t)\}$ $(\det K(t) \neq 0)$ – заданные на Γ H-непрерывные матрицы-функции порядка $n,$ а правая часть системы имеет специальный вид $\mathbf{f}(t) = 2B(t)\mathbf{M}(t),$ $\mathbf{M}(t)$ – полиномиальный вектор $(M_1(t),...,M_n(t))$. Полагая $\mathbf{w}^+(t) = P\left[K\mathbf{w}\right](t) - \mathbf{M}(t)$, $\mathbf{w}^-(t) = Q\left[K\mathbf{w}\right](t) + \mathbf{M}(t)$ $(P = [I+S]/2, Q = [I-S]/2,$ I – единичный оператор), придем к однородной задаче линейного сопряжения с матрицей-функцией $G(t) = -(A(t)K^{-1}(t)+B(t))^{-1}(A(t)K^{-1}(t)-B(t))$, по решению которой с главной частью $\mathbf{M}(z)$ на бесконечности определяется решение соответствующей системы (1). К этой же задаче линейного сопряжения приводится общая характеристическая система, в которой матрицы-функции $A(t)$ и ,$K(t)$ заменены на $A_\alpha(t) = A(t)E_\alpha, K_\alpha(t) = K(t)E_\alpha,$ $E_\alpha = \mathrm{diag}\{\alpha_1(t),...,\alpha_n(t)\}$, где $\alpha_k(t)$, $k = \overline{1,n}$ – H-непрерывные на контуре функции.

В работах [1], [2] показано, что при $n = 2$ для построения канонической системы решений задачи линейного сопряжения достаточно одного частного решения задачи, а в случае $n = 3$ – двух таких решений. Сами решения задачи линейного сопряжения находятся за счет некоторых ограничений на коэффициенты соответствующей двумерной и трехмерной общей характеристической системы (1) и определенного подбора функций $\alpha_k(t)$, $k = \overline{1,n}$, позволяющего найти частные решения системы с такими $A_\alpha(t)$ и $K_\alpha(t)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Киясов С. Н.* Некоторые классы задач линейного сопряжения для двумерного вектора, разрешимые в замкнутой форме // Изв. вузов. Матем. 2013. № 1.– С. 3–20.

2. *Киясов С. Н.* Некоторые классы задач линейного сопряжения для трехмерного вектора, разрешимых в замкнутой форме // Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56, № 2. С. 389–408.

L. N. Lyakhov (Voronezh)
levnlya@mail.ru

ON DE LA VALLÉE–POUSSIN–NIKOL'SKII KERNELS FOR WEIGHTED CLASSES OF FUNCTIONS

The Dirichlet kernels' role in theory of functions and approximation of functions is well known. Vallée–Poussin kernels is the arithmetic mean of Dirichlet kernels. S. M. Nikol'skii in [1] introduced kernels for the Fourier integral of several variables. In this report the results of the study of de la Vallée–Poussin–Nikol'skii type kernels for multidimensional Fourier integral with j-functions of Bessel are presented. Such Fourier integrals was introduced by B. M. Levitan in [2]. These kernels used odd j-functions of Bessel which were introduced by I. A. Kipriyanov and V. V. Katrakhov in [3]. The report provides theorems on approximation of functions from Lebesgue weight classes.

REFERENCES

1. *Nikol'skii S. M.* Approximation of functions of several variables and imbedding theorems, // – M.: Nauka, 1977.
2. *Levitan B. M.* Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions, Uspekhi Mat. Nauk, 6:2(42), (1951), 102–143.
3. *Kipriyanov I. A., Katrakhov V. V.* On a class of one-dimensional singular pseudodifferential operators, Mat. Sb. (N.S.), 104(146):1(9) (1977), 49–68 с.49-68.

Б. П. Осиленкер (Москва)
b_osilenker@mail.ru

О РАЗЛОЖЕНИЯХ ФУРЬЕ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ

Рассматриваются непрерывно-дискретные пространства Соболева S, задаваемые нестандартным скалярным произведением

$$(f,g)=\int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)w(x)dx+M_1f(1)g(1)+N_1f(-1)g(-1)+$$

$$M_2f'(1)g'(1)+N_2f'(-1)g'(-1) \quad (1)$$

где $w(x)$ положительная почти всюду весовая функция, коэффициенты M_1, M_2, N_1, $N_2\geq 0$. Обозначим через

$$\{q_n(x)\}:q_n(x)=q_n(x;M_1,M_2,N_1,N_2)(n=0,1,2,\ldots;x\in[-1,1])$$

ортонормированную в скалярном произведении (1) систему полиномов. Задача изучения пространства S и соответствующих систем функций была поставлена в классической книге Курант Р. и Гильберт Д. "Методы математической физики". Обозначим через R множество функций из $L^2_w[-1,1]$, для которых существуют и конечны значения функции и ее прозводной в концевых точках. Каждой функции $f \in R$ поставим в соответствие ряд Фурье - Соболева

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) q_k(x), c_k(f) = (f, q_k)(k = 0, 1, 2, \dots)$$

В докладе излагаются свойства полиномов $q_n(x)$(главное внимание будет уделено нестандартным свойствам) и результаты по линейным дискретным и полунепрерывным методам суммирования рядов Фурье почти всюду и равномерно для непрерывных функций.В случае полунепрерывных методов суммирования особое внимание будет уделено результатам(они получены совместно с А.Д.Нахманом в 2013-215 гг) для обобщенных средних Пуассона по тригонометрической системе, задаваемых формулой

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{-\lambda_k h} e^{ikx} (\lambda_k \to +\infty, h > 0).$$

С. В. Петров, А. В. Абанин (Ростов-на-Дону)
prostopetrov@inbox.ru, abanin@math.sfedu.ru

ОБ ОДНОМ НОВОМ ПРИЗНАКЕ СЛАБОЙ ДОСТАТОЧНОСТИ [1]

Слабо достаточные множества, введенные Шнайдером в 1974 г., являются мощным инструментом в исследовании представляющих систем, уравнений свертки и роста голоморфных функций. В пространствах Хермандера они тесно связаны с эффективными по Ийеру множествами. Например, пусть h — непрерывная субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция, растущая на бесконечности быстрее $\ln|z|$, для которой $\max\{h(z+\zeta) : |\zeta| \le 1\} \sim h(z)$ при $z \to \infty$. Тогда [1] в любом пространстве Хермандера

$$H_h^p := \{f \in H(\mathbb{C}) : \exists q < p, \exists C > 0 : |f(z)| \le C \exp qh(z), \forall z \in \mathbb{C}\}$$

нормального типа $(0 < p < \infty)$ классы слабо достаточных и эффективных по Ийеру множеств совпадают. В случае алгебр Хермандера, то есть при $p = \infty$, всякое эффективное для H_h^∞ множество слабо достаточно для него, а обратное утверждение неверно. Таким образом, вопрос об описании слабо достаточных множеств для H_h^∞ в терминах роста на них функций остается открытым. В докладе будет представлен новый подход к исследованию данной проблемы для алгебры Хермандера

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-01404).

E_ρ всех целых функций конечного типа при порядке $\rho > 0$, позволяющий установить критериальную связь между слабо достаточными для E_ρ множествами и введенными нами для этой цели ослабленно эффективными по Ийеру множествами. Последние определяются как те неограниченные подмножества S комплексной плоскости, для которых при некотором $C > 0$ для любой функции $f \in E_\rho$ имеет место неравенство

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho} \leq C \limsup_{z\to\infty, z\in S} \frac{\ln|f(z)|}{|z|^\rho}.$$

Другими словами, для таких множеств тип любой функции f может быть оценен через тип f на S с помощью одной для всего пространства мультипликативной постоянной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абанин А. В.* О некоторых признаках слабой достаточности // Математические заметки. 1986. Т. 40, № 4. С. 442–454.

I. Yu. Smirnova (Rostov-on-Don, Russia)

WEIGHTED MIXED NORM BERGMAN TYPE SPACE ON THE UNIT DISC

Starting with the papers by S.Bergman (1933) and M.M.Jerbashian (1945), the spaces of analytic functions which are p - integrable with respect to σ - finite measure on a connected open set in the complex plane $\mathbb{C}$ or in $\mathbb{C}^n$ have been intensively studied by a number of authors. An introduction of the mixed norm is a natural generalization of the classical Bergman space, which, in particular allows to distinguish between radial and angular behavior of functions. Such mixed norm Bergman type spaces even studied in the paper [1]. As a matter of fact in [1] the mixed norm was constructed in a very general settings with the use of variable exponent Lebesgue norm in the radial direction.

Following the results of [1] we introduce and study analogous weighted mixed norm Bergman type space on the unit disc (with usual Lebesgue L^p space in radial direction). As the main result the Boundedness of the Bergman projection is proved. The study of the Teplitz operators in such spaces is considered as the main objective of this study and as a subject for further continuation of research in this direction.

REFERENCES

1. *Karapetyants A. N., Samko S. G.* Mixed norm variable exponent Bergman space on the unit disc. // Complex Variables and Elliptic Equations, 2016.

Р. М. Тригуб
roald.trigub@gmail.com

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ и $f(x_1, x_2) = f_0\big(\max\{|x_1|, |x_2|\}\big)$.

В докладе изучаются следующие вопросы:

1) Когда преобразование Фурье $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^2)$?

2) Когда $t \cdot \sup\limits_{y_1^2+y_2^2 \geq t^2} \big|\hat{f}(y_1, y_2)\big| \in L_1(\mathbb{R}^1_+)$? $\qquad \mathbb{R}^1_+ = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$

3) Когда $\hat{f}(y_1, y_2) \geq 0$ или > 0 всюду на $\mathbb{R}^2$?

По первому вопросу найдены необходимые и отдельно достаточные условия, которые для выпуклых на отрезке функций f_0 совпадают.

Ответ по второму вопросу оказался отрицательным ($f \equiv 0$).

А в вопросе о положительно определенных функциях указанного вида получен критерий, т.е. необходимое и достаточное условие одновременно. Ответ полностью сводится к проверке положительной определенности некоторой функции f_1 на прямой. Приведены примеры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Liflyand E., Samko S., Trigub R.* The Wiener Algebra of absolutely convergent Fourier integrals // Anal.Math.Phys. 2012. V. 2, № 1. P. 1–68.

2. *Тригуб Р. М.* О преобразовании Фурье функций двух переменных, зависящих лишь от максимума модуля этих переменных // Электронный источник. – http://arxiv.org/abs/1512.03183

A. K. Fatykhov (Kazan), P. L. Shabalin (Kazan)
vitofat@gmail.com, pavel.shabalin@mail.ru

RIEMAN-HILBERT BOUNDARY VALUE PROBLEM ON THE HALF-PLANE WITH CURLING IN FINITE NUMBER POINTS OF THE CONTOUR [1]

We consider Riemann-Hilbert boundary value problem of analytic functions for the half-plane D in the case when ratios of the edge conditions

$$a(t)\Re\Phi(t) - b(t)\Im\Phi(t) = c(t), \; t \in L = \partial D,$$

have a finite number of singular points t_k, $k = \overline{1,n}$ on the contour L. The function $\nu(t) = argG(t)$, $G(t) = a(t) - ib(t)$, $t \in L$, is continuous on L everywhere except the points t_k, where it has discontinuities of the second kind $\ln|G(t)| \in H_L(\mu)$. For

[1]The research is supported by Russian Foundation for Basic Researches (grant No. 12-01-00636-a).

neighborhood of points t_k, we have the representation

$$\nu(t) = \begin{cases} \dfrac{\nu_k^+}{|t-t_k|^{\rho_k}} + \widetilde{\nu}(t), & t < t_k, \\ \dfrac{\nu_k^-}{(t-t_k)^{\rho_k}} + \widetilde{\nu}(t), & t_k < t, \end{cases}$$

for some numbers. ν_k^+, ν_k^-, ρ_k, $0 < \rho_k < 1$ and function $\widetilde{\nu}(t) \in H_L(\mu)$. For a Hilbert problem we received formula of the general solution of the homogeneous and heterogeneous tasks. Conducted a full investigation solvability of the homogeneous problem in the class of bounded analytic functions in the unit circle. The method of constructing solutions are based on the analytical allocation the singularities of boundary condition, which is usually written as

$$Re[e^{-i\nu(t)}\Phi(t)] = \frac{c(t)}{|G(t)|}.$$

In the research of the existence of solution and study the number of solutions of the problem we applied the theory of entire functions and methods of the geometric theory of complex variable functions.

A. I. Fedotov (Kazan, Russia)
fedotov@mi.ru

QUADRATURE-DIFFERENCES METHOD FOR SINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS ON THE INTERVAL

For the singular integro-differential equation of the form:

$$\sum_{\nu=0}^{m}(a_\nu(t)x^{(\nu)}(t) + b_\nu(t)(Sx^{(\nu)})(t) + (Th_\nu x^{(\nu)})(t))$$

$$= f(t), \quad -1 < t < 1, \quad m \geq 1$$

with the initial conditions:

$$x^{(\nu)}(\xi_0) = 0, \quad \nu = 0, 1, ..., m-1, \quad -1 \leq \xi_0 \leq 1$$

where $x(t)$ is a desired unknown and $a_\nu(t), b_\nu(t), h_\nu(t,\tau)$, $\nu = 0, 1, ..., m$, $f(t)$ are given continuous functions of their arguments, $t, \tau \in [-1, 1]$; $b_m(t)$ is a polynomial of some order $n_0 \geq 0$ and singular integrals:

$$(Sx^{(\nu)})(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x^{(\nu)}(\tau)d\tau}{\tau - t}, \qquad \nu = 0, 1, ..., m$$

are to be interpreted as the Cauchy–Lebesgue principal value; and

$$(Th_\nu x^{(\nu)})(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} h_\nu(t,\tau)x^{(\nu)}(\tau)d\tau, \quad \nu = 0, 1, ..., m$$

are regular integrals, the quadrature-differences method is justified.

The cases of positive, negative and zero indices are considered, and the error estimations are given.

REFERENCES

1. *Fedotov A.I.* Convergence of the Quadrature-Differences Method for Singular Integro-Differential Equations on the Interval// Mathematics 2014, Vol. 2. P. 53–67; doi:10.3390/math2010053

B. N. Khabibullin, T. Yu. Bayguskarov (Ufa, Russia)
Khabib-Bulat@mail.ru

NON-TRIVIALITY OF WEIGHTED CLASSES OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS [1]

$\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$ are the sets of real and complex numbers resp. Let D be a domain in $\mathbb{C}$, and $M\colon D \to [-\infty, +\infty]$ (a weighted function). The class $\mathrm{Hol}\,(D;M) := \bigl\{f$ — holomorphic on $D\colon \sup\limits_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|\, e^{-M(z)} < +\infty\bigr\}$ is nontrivial iff there exists a non-zero function $f \in \mathrm{Hol}\,(D;M)$.

Let $d\colon D \to (0, +\infty)$ be a continious function satisfying the condition $d(z) < \min\Bigl\{\inf\limits_{w\in\mathbb{C}\setminus D} |z-w|,\ 1+|z|\Bigr\}$ for all $z \in D$.

Theorem [1]. *Suppose, for subharmonic $M\colon D \to [-\infty, +\infty)$,*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}}\left(\frac{1}{\pi(d(z))^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{d(z)} M(z+re^{i\theta})r\,dr\,d\theta + \log\frac{1}{d(z)} - M(z)\right) < +\infty. \qquad (*)$$

If at least one of the following three conditions:

1) *the closure of D in $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ is not equal to $\mathbb{C}_\infty$;*

2) $\bigl(\frac{1}{2\pi}\Delta M\bigr)(D) > 1$ *for the Riesz measure $\frac{1}{2\pi}\Delta M$ of M;*

3) *the domain D is simply connected in $\mathbb{C}_\infty$;*

are fulfilled, then the class $\mathrm{Hol}\,(D;M)$ *is nontrivial. If $d(z) \equiv \dfrac{1}{(1+|z|)^P}$, $z \in D = \mathbb{C}$, for a number $P > 0$, then the summand $\log\dfrac{1}{d(z)}$ in the left part of the condition $(*)$ can be removed.*

[1] Our researchs supported by RFBR (project no. 16-01-00024).

Similar results were obtained in [2; Theorem 1] for weighted classes of holomorphic functions of several variables with plurisubharmonic weighted function $M{:}D{\to}[-\infty,+\infty)$ in pseudoconvex domains $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$. We consider also the case of weighted function M represented as the difference of plurisubharmonic functions [2; Theorem 2].

REFERENCES

1. *Khabibullin B. N., Baiguskarov T. Yu.* The logarithm of the module of holomorphic functions as minority for subharmonic functions // Mat. Zametki (Math. Notes). 2016. Vol. 99, Issue 4. P. 588–602.

2. *Baiguskarov T. Yu., Khabibullin B. N.* Holomorphic Minorants of Plurisubharmonic Functions // Funct. Anal. Appl. 2016. Vol. 50, No. 1. P. 62–65.

И. Г. Царьков (МГУ, Россия)
tsar@mech.math.msu.su

НЕПРЕРЫВНАЯ ε-ВЫБОРКА. [1]

Пусть X – банахово пространство. Для произвольных множества $M \subset X$ и точки $x \in X$ через $P_M x$ обозначим метрическую проекцию, т.е. множество $\{y \in M \mid \|y - x\| = \varrho(x, M)\}$.

В работе получена еще одна характеризация множеств, обладающих непрерывными ε-выборками для всех $\varepsilon > 0$.

Определение. *Пусть $\varepsilon > 0$, $M \subset X$. Отображение $\varphi : X \to M$ называется аддитивной (мультипликативной) ε-выборкой, если для всех $x \in X$ выполняется неравенство*

$$\|x - \varphi(x)\| \leqslant \varrho(x, M) + \varepsilon$$

(*соответственно* $\|x - \varphi(x)\| \leqslant (1 + \varepsilon)\varrho(x, M)$).

С различными свойствами множеств, обладающих ε-выборкой можно ознакомиться в работах [1,2].

Множество $M \subset X$ называется P-клетчатоподобным (B-клетчатоподобным), если для всех точек $x \in X$ множество $P_M x$ является клетчатоподобным (непустое пересечение произвольного замкнутого шара клетчатоподобно). Множество $M \subset X$ называется $\mathring{B}$-стягиваемым, если его непустое пересечение с произвольным открытым шаром стягиваемо.

Теорема 1. *Аппроксимативно компактное множество M в банаховом пространстве X обладает для всех $\varepsilon > 0$ непрерывной аддитивной (мультипликативной) ε-выборкой тогда и только тогда, когда это множество является P-клетчатоподобным. Для конечномерного пространства X это равносильно B-клетчатоподобности и $\mathring{B}$-стягиваемости множества M.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алимов А. Р., Царьков И. Г.* Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения// Успехи мат. наук. 2016. Т. 71, № 1 (427), С. 3-84.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (16-01-00295).

2. *Царьков И. Г.*. Непрерывная ϵ-выборка // Математический сборник Т. 207, № 2. С. 123-142.

М. М. Цвиль (Ростов-на-Дону)
tsvilmm@mail.ru

ОБОБЩЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ ФАБЕРА ДЛЯ ПОЛИЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ

Через C^n обозначим n-мерное комплексное пространство, его точки $z=(z_1,...,z_n)$. Пусть $D^+ = D_1^+ \times D_2^+ \times \ldots \times D_n^+$, $D^- = D_1^- \times D_2^- \times \ldots \times D_n^-$ — полицилиндрические области в C^n с остовом $\sigma = L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_n$, где D_k^+ — конечная односвязная область в плоскости C^1, ограниченная спрямляемой жордановой кривой L_k; D_k^- — ее дополнение до всей плоскости; функция $z_k = \psi_k(w_k)$ конформно и однолистно отображает внешность единичного круга $\{|w_k| > 1\}$ на область D_k^- при условиях $\psi_k(\infty) = \infty$, $\psi_k'(\infty) > 0$; функция $w_k = \varphi_k(z_k)$ — обратная к $\psi_k(w_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$; $U^+ = \{w \in \mathbb{C}^n \colon |w_k| < 1,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$ — поликруг в $\mathbb{C}^n$, T^n — единичный тор.

Пусть в области D определена весовая функция $g(z)$ аналитическая в D^-, отличная от нуля в $\overline{D}^-$ и $g(\infty) > 0$. Предположим, что $g(z) \in E_2(D^-)$, функция $\tau(t) \in H_2(U^+)$ и выполняется условие

$$\int\limits_{\sigma} |(\varphi^*\tau)(\zeta)||g(\zeta)||d\zeta_1|\ldots|d\zeta_n| =$$

$$= \int\limits_{T^n} |\tau(t)||(\psi^*g)(t)||(\psi_1'(t_1)||(\psi_n'(t_n)||dt_1|\ldots|dt_n|. \tag{1}$$

Тогда можно рассматривать обобщенный оператор Фабера для полицилиндрической области D^+:

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\sigma} \frac{(\varphi^*\tau)(\zeta)g(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^I}, \quad z \in D^+, \tag{2}$$

где $d\zeta = d\zeta_1 \ldots d\zeta_n$; вектор $(1, 1, \ldots, 1)$ обозначим через I.

Оператор (2) при условии (1) преобразует функцию $\tau(t) \in H^2(U^+)$ при фиксированной $g(z)$ в функцию $f(z)$, аналитическую в D^+. Выбор весовой функции влияет на оценки нормы обобщенного оператора Фабера. В случае, когда весовая функция имеет разложение вида

$$g(z) = \sum_{\ell \in Z_+^n} \frac{d_\ell}{\varphi_1^{\ell_1}(z_1) \ldots \varphi_n^{\ell_n}(z_n)}$$

обобщенный оператор Фабера преобразует многочлен n переменных $t_1, t_2, \ldots, t_n$ в многочлен вида $\sum\limits_{\ell \in \Omega} c_\ell \Phi_\ell(z, g)$, где Ω — некоторое подмножество целочисленной решетки Z_+^n с неотрицательными координатами; $\Phi_\ell(z, g)$ — обобщенные оперторы Фабера n переменных.

Специфика многомерного случая проявляется в многообразии построения алгебраических полиномов в зависимости от конструкции множестве Ω. Далее исследуются свойства и оценки норм обобщенного оператора Фабера в конкретных случаях, применение этих оценок в теории приближения аналитических функций в полицилиндрических областях многочленами.

А. П. Чеголин (г. Ростов-на-Дону, ЮФУ)
apchegolin@mail.ru

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В работе рассматривается вопрос о разрешимости в классах суммируемых функций некоторых интегральных уравнений первого рода, задаваемых в образах Фурье на «достаточно хороших» функциях символом. Особый интерес в образах Фурье представляет собой случай гармонической характеристики в символе. В одномерном случае аналогом такой ситуации является тригонометрическая характеристическая часть символа. На этом примере показана возможность явного восстановления интегрального представления левой части уравнения. На основании этого решен вопрос о действии соответствующего оператора типа потенциала в пространствах суммируемых функций, а соответственно и вопрос о разрешимости рассматриваемых интегральных уравнений. Кроме того, в рамках метода аппроксимативных обратных операторов построены конструкции, обращающие указанные операторы, т.е. по сути, в предельном виде приводится решение рассматриваемых интегральных уравнений.

А. Я. Якубов (Грозный), Л. Д. Шанкишвили (Тбилиси)
yakub@inbox.ru

ПРОБЛЕМА ЧЕБЫШЕВА В КЛАССЕ ИНТЕГРАЛЬНО СИНХРОННЫХ ФУНКЦИЙ

Определение. Измеримые функции f и g, заданные на отрезке $[a, b]$ будем называть интегрально синхронными на $[a, b]$, если существует положительное число

$q > 0$ такое, что

$$\int_a^b \int_a^b p(t)p(\tau)[f(t) - f(\tau)][g(t) - g(\tau)]dtd\tau = q > 0$$

устойчиво на $[a, b]$.

Теорема 1. *Для того, чтобы измеримые функции f,g, определенные на [a,b], были интегрально синхронны на [a,b], необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма*

$$\int_a^b \int_a^b p(t)p(\tau)[f(t)U - f(\tau)V][g(t)U - g(\tau)V]dtd\tau = q > 0$$

была положительно определенной для всех $U, V \in R'$, совместно неравных нулю.

Теорема 2.*Для того, чтобы измеримые функции f, g определенные на отрезке $[a, b]$ удовлетворяли на $[a, b]$ прямым неравенствам Чебышева необходимо и достаточно, чтобы эти функции были интегрально синхронны на отрезке $[a, b]$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чебышев П.Л.* Об одном ряде, доставляющем предельные величины, интегралов при разложении подынтегральной функции на множители. Изд. АКН СССР. Полное собрание сочинений. Т.3. стр. 157-169 Москва - Ленинград 1948г.

2. *Yakubov A., Shankishvili L. Some Inequalinies For Convolution Integral Transforms*// Integral Transforms and Special Functions 2(1), 65-76, 1994.3.

Секция III

Дифференциальные уравнения и математическая физика

S. N. Askhabov (Grozny)
askhabov@yandex.ru

EQUATIONS OF CONVOLUTION TYPE WITH A MONOTONE NONLINEARITY[1]

Various classes of nonlinear integral convolution type equations on a finite (in the periodic case) and an infinite interval of integration were studied in the monograph [1]. The property of the (Bochner) positivity of the convolution operator, which is guaranteed by the condition of nonnegativity of the discrete (in periodic case where the interval of integration is the closed interval $[-\pi, \pi]$) or the integral (in the case where the interval of integration is the whole real axis or semiaxis) Fourier cosine transform of its kernel, plays an essential role in this connection. In the case of the interval $[-\pi, \pi]$, some convex (downward) functions can serve as examples of such kernels. In the case of the interval $[0, 1]$ considered in this work, the study of nonlinear integral convolution type equations involves additional difficulties related, in essence, to the fact that the positivity of convolution type operators in the space $L_p(0, 1)$ is no longer guaranteed by the convexity (downward) of its kernels. In the present work, under additional constraints on the kernels of the equations under consideration, global theorems on the existence, uniqueness, and estimates of solutions for various classes of nonlinear integral convolution type equations in the real Lebesgue spaces $L_p(0, 1)$ for any $p \in (1, \infty)$ are proved using the method of monotone operators [2], and also corollaries illustrating the obtained results are given. Earlier, similar theorems were proved for different classes of nonlinear equations, only for $p \in (1, 2]$, or only for $p \in [2, \infty)$ (see [1, Chap. III], [3]). It is shown that the solutions can be found in space $L_2(0, 1)$ by a Picard's type successive approximations method. In the case of a power nonlinearity, it is shown that the solutions can be found by the gradient method in the space $L_p(0, 1)$ and the weighted space $L_p(\varrho)$.

R E F E R E N C E S

1. *Askhabov S. N.* Nonlinear Convolution Type Equations. M.: Fizmatlit, 2009 [in Russian].

2. *Vainberg M. M.* Variational Method and the Method of Monotone operators in the Theory of Nonlinear Equations. M.: Nauka, 1972 [in Russian].

3. *Askhabov S. N.* Equations of Convolution Type with a Monotone Nonlinearity on an Interval // Differential Equations. 2015. Vol. 51, № 9. C. 1173–1179.

[1]This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant no. 13-01-00422-a).

П. В. Бабич, В. Б. Левенштам, С. П. Прика (Ростов-на-Дону, Владикавказ)
Vleven@math.rsu.ru

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ

Пусть $\Pi = \{(x,t) : 0 < x < \pi; 0 < t < 1\}$, Γ - ее параболическая граница. В докладе речь пойдет о двух обратных задачах для параболической начально-краевой задачи с большим параметром ω:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x)r(t,\omega t), (x,t) \in \Pi, \\ u|_\Gamma = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Начнем с первой. В ней неизвестным является 2π-периодический по τ сомножитель $r(t,\tau)$. В связи с этим задана двучленная асимптотика решения задачи (1), вычисленная в точке x_0, в которой $f(x_0) \neq 0$. При некоторых условиях установлено существование и единственность функции r из определенного класса.

Во второй задаче неизвестным сомножителем является функция $f(x)$. В связи с этим задан главный член асимптотики решения задачи (1), вычисленный в точке t_0, в которой функция $r(t,\tau)$ имеет ненулевое среднее по второй переменной. При некоторых условиях установлено существование функции f из определенного класса. Найдены простые достаточные условия на t_0, при которых f определена однозначно.

Отметим, что первая обратная задача, но без высокочастотного параметра, была исследована ранее в работе [1]. По поводу теории обратных коэффициентных задач см. также монографию этого автора [2]. Заметим еще, что некоторые результаты доклада опубликованы в работах [3–4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Денисов А. М.* Асимптотика решений обратных задач для гиперболического уравнения с малым параметром при старшей производной // ЖВМиМФ. 2013. Т. 53, № 5. С. 744–752.

2. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994.

3. *Babich P. V., Levenshtam V. B.* Direct and inverse asymptotic problems high-frequency terms // Asymptotic Analysis. 2016. № 97. С. 329–336.

4. *Бабич П. В., Левенштам В. Б.* Обратная задача для уравнения теплопроводности с высокочастотным источником // Труды научной школы И.Б. Симоненко. в.2. 2015. Изд. ЮФУ, Ростов-на-Дону. С. 57–62.

Ж. А. Балкизов (Нальчик)
Giraslan@yandex.ru

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОБЛАСТИ С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИК

На евклидовой плоскости независимых переменных x и y рассмотрим уравнение

$$Lu = \begin{cases} u_{yy} - k(y)u_{xx}, & y < 0 \\ u_{yy} + u_x, & y > 0 \end{cases} = f(z), \tag{1}$$

где $0 < k_1 \leq k(y)$, $f(z) = f(x,y)$ – заданные функции, $u(z) = u(x,y)$ – искомая функция.

Уравнение (1) рассматривается в конечной односвязной области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0 прямых $x = 0$, $x = r$ и некоторой кусочно - гладкой кривой $\sigma_0 = A_0B_0 :\ y = \varphi(x)$ с концами в точках $A_0(0,\, y_0)$, $B_0(r,\, y_r)$, лежащей в верхней полуплоскости $y > 0$, а при $y < 0$ область Ω ограничена двумя пересекающимися кривыми: монотонно убывающей гладкой кривой $\sigma_1 = AC :\ y = \gamma_1(x) \in C^1\,[0,\, l]$, $0 \leq x \leq l$, выходящей из точки $A = (0,\, 0)$ и монотонно возрастающей гладкой кривой $\sigma_2 = CB :\ y = \gamma_2(x) \in C^1\,[l,\, r]$, $l \leq x \leq r$, соединяющей точки $B = (r,\, 0)$ и $C = (l,\, \gamma_2(l))$; $\gamma_1(0) = 0$, $\gamma_2(r) = 0$, $\gamma_1(l) = \gamma_2(l) < 0$; Ω_1 и Ω_2 – гиперболическая и параболическая части смешанной области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J_r$; $J_r = \{(x,\, 0) :\ \ 0 < x < r\}$; $f \in C(\bar{\Omega}_i)$, $i = \overline{1,2}$; $k(y) \in C\,[\gamma_1(l), 0]$.

Как следует из результатов работы [1], постановка первой краевой задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка существенно зависит от расположения кривых σ_1 и σ_2 относительно характеристик уравнения (1) при $y < 0$. Ниже будет сформулирована первая краевая задача для уравнения (1) при различных случаях расположения кривых σ_1 и σ_2 относительно характеристик

$$AC_1 : x + \int\limits_0^y \sqrt{k(t)}dt = 0, \quad C_1B : x - \int\limits_0^y \sqrt{k(t)}dt = r,$$

этого уравнения.

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем всякую функцию $u(z) = u(x,y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1) \cap C^2_y(\Omega_2)$, подстановка которой обращает данное уравнение в тождество.

Пусть кривые σ_1 и σ_2 таковы, что $\sqrt{k(y)}\gamma_1'(x) \leq -1$, $0 < \sqrt{k(y)}\gamma_2'(x) \leq 1$. В этом случае первая краевая задача для уравнения (1) формулируется следующим образом:

Задача 1. *Найти регулярное в области Ω решение $u(z) = u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(z) = 0 \qquad \forall\ z \in BB_0 \cup \sigma_0 \cup \sigma_2. \tag{2}$$

При $-1 < \gamma_1'(x)\sqrt{k(y)} < 0$, $0 < \gamma_2'(x)\sqrt{k(y)} \leq 1$ имеем:

Задача 2. *Найти регулярное в области Ω решение $u(z) = u(x, y)$ уравнения (1) из класса $C^1(\Omega_1 \cup \sigma_1)$, удовлетворяющее условиям (2) и условию*

$$u_y(z) = 0 \qquad \forall\ z \in \sigma_1. \tag{3}$$

Если кривые σ_1 и σ_2 обладают свойствами: $\sqrt{k(y)}\gamma_1'(x) \leq -1$, $\sqrt{k(y)}\gamma_2'(x) > 1$, то в этом случае первая краевая задача для уравнения (1) формулируется так:

Задача 3. *Найти регулярное в области Ω решение $u(z) = u(x, y)$ уравнения (1) из класса $C^1(\Omega_1 \cup \sigma_2)$, удовлетворяющее условиям (2) и условию*

$$u_y(z) = 0 \qquad \forall\ z \in \sigma_2. \tag{4}$$

И, наконец, в случае, когда кривые σ_1 и σ_2 обладают свойствами: $\sqrt{k(y)}\gamma_2'(x) > 1$, $-1 < \sqrt{k(y)}\gamma_1'(x) < 0$, первая краевая задача для уравнения (1) будет формулироваться так:

Задача 4. *Найти регулярное в области Ω решение $u(z) = u(x, y)$ уравнения (1) из класса $C^1(\Omega_1 \cup \sigma_1 \cup \sigma_2)$, удовлетворяющее условиям (2), (3) и (4).*

Справедлива

Теорема 1. *Пусть кривая σ_0 такова, что она обладает свойством:*

$$\sigma_0\colon y = \varphi(x) \in C^1\left[0,\, r\right],\ \textit{причем}\ \varphi'(x) \leq 0.$$

Тогда для решения $u(z) = u(x, y)$ первой краевой задачи (задачи 1–4) имеет место энергетическое неравенство

$$\left\|\upsilon\right\|_1 \leq M_1\, \left\|L_\mu \upsilon\right\|_0,$$

где функция $\upsilon(z) = \upsilon(x, y)$ связана с решением $u(z) = u(x, y)$ исходного уравнения (1) по формуле $u(z) = \exp(\mu\, x)\upsilon(z)$; $L_\mu \upsilon = \exp(-\mu x)Lu$; μ – некоторое отрицательное число; M_1 – положительная постоянная, не зависящая от $u(z)$ и $\upsilon(z)$; $\left\|\cdot\right\|_0$, $\left\|\cdot\right\|_1$ – нормы в пространствах $L_2(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$ соответственно.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Нахушев А. М.* К теории линейных краевых задач для уравнения второго порядка смешанного гиперболо-параболического типа// Дифференц. уравнения. 1978. Т.14, №1. С. 66–73.

В. А. Батищев (Ростов-на-Дону), В. Г. Ильичев (Ростов-на-Дону)
batishev-v@mail.ru, vitaly369@yandex.ru

БИФУРКАЦИИ ТЕРМОГРАВИТАЦИОННЫХ РЕЖИМОВ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ВБЛИЗИ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ

Температурные пограничные слои с учетом капиллярных сил активно изучаются в связи с экспериментами в космосе. Однако, термогравитационные пограничные слои вблизи свободной границы без учета капиллярного эффекта почти не исследованы. В докладе представлены исследования по этой проблеме.

На основе уравнений движения неоднородной жидкости в приближении Обербека-Буссинеска рассчитывается термогравитационное стационарное осесимметричное течение жидкости в горизонтальном слое, ограниченном снизу твердой стенкой, а сверху свободной границей. Рассмотрены два вида температурных граничных условий - локальный нагрев или локальное охлаждение свободной границы вблизи оси симметрии. Построены асимптотические разложения решений краевой задачи, главный член которых описывает течение в пограничном слое с учетом внешнего потока. Поля скоростей и температуры рассчитаны численно. Показано, что при локальном охлаждении свободной границы возникает вращательный режим в пограничном слое.

Численные расчеты нелинейной краевой задачи приводят к двум видам режимов - основным и вращательным. Основные режимы описывают течение жидкости без вращения. Вращательные режимы возникают путем ветвления основных режимов и существуют только, если скорость внешнего потока не превосходит бифуркационного значения. Точки бифуркации найдены численно. Рассмотрен случай малой толщины слоя. Приведен вывод уравнения разветвления. В зависимости от значений параметров задачи получены три типа уравнений разветвления. В каждом случае от точки бифуркации ответвляются по два вращающихся режима, которые рассчитаны численно. На основе результатов работы возможно моделирование торнадо в атмосфере.

Е. П. Белан (Симферополь)
belan@crimea.edu

ДИНАМИКА АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СПИНОВОГО ГОРЕНИЯ

Спиновым режимам безгазового горения тонкостенного кругового цилиндра радиуса r феноменологически [1] соответствуют решения типа бегущих волн уравнения

$$\ddot{\xi} + \xi = \varepsilon[\dot{\xi}(1 - \frac{4}{3}\dot{\xi}^2) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\Delta\dot{\xi} + \frac{\beta\lambda}{2\pi}\sqrt{-\Delta}\dot{\xi}],\ \xi(t, x + 2\pi r) = \xi(t, x). \qquad (1)$$

Здесь ξ — координаты точек фронта горения в системе координат, в которой фронт в среднем покоится, Δ – одномерный оператор Лапласа, $0 < \varepsilon \ll 1$, $\lambda > 0$, $\beta > 0$.

Вопросы о существовании, форме и устойчивости автомодельных решений (1), ответвляющихся от теряющих устойчивость бегущих волн, пространственно однородного предельного цикла и представимых с точностью порядка ε в виде

$$\xi = A(\theta, \rho, \beta)\cos(t + \varphi(\theta, \rho, \beta)),\ \theta = \frac{x}{r},\ \rho = 2\pi r/\lambda,$$

A, φ – 2π-периодичны по θ, рассматривались в [2,3].

Доклад посвящен динамике при увеличении ρ форм и устойчивости автомодельных решений (1). Отметим, что имеет место зависимость устойчивости автомодельных решений (1) от β. Установлено, что при увеличении ρ зависимость амплитуд и фаз автомодельных решений от θ возрастает. Амплитуда автомодельного решения, ответвляющегося от пространственно однородного предельного цикла, в частности, при $\rho \sim 1000$ является быстро осциллирующей функцией θ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зельдович Я. Б., Маломед Б. А.* Сложные волновые режимы в распределенных динамических системах. // Изв. вузов, сер. Радиофизика, Т. 15, № 6 (1982), С. 591 – 618.

2. *Белан Е. П., Самойленко А. М.* Динамика периодических режимов феноменологического уравнения спинового горения. // УМЖ, Т. 65, № 1(2013), С. 21–43.

3. *Самойленко А. М., Белан Е. П.* Периодические режимы феноменологического уравнения спинового горения. // Дифференциальные уравнения, Т. 51, № 2(2015), С. 211-228.

А. В. Братищев (ДГТУ, Россия)
avbratishchev@spark-mail.ru

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ СИНЕРГЕТИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА

Пусть закон изменения состояния динамической системы описывается автономной системой третьего порядка

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ x_3' = f_3(x_1, x_2, x_3). \end{cases}$$

Ставится задача нахождения аддитивного управления скоростями изменения двух фазовых координат, при котором наперед данное одномерное дифференцируемое многообразие

$$\Gamma_{12} = \big\{(x_1, x_2, x_3) : \psi_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \psi_2(x_1, x_2, x_3) = 0\big\}$$

будет инвариантным и притягивающим в целом для траекторий синтезируемого регулятора. Для этого потребуем, чтобы агрегированные переменные ψ_1, ψ_2 на траекториях проектируемой системы удовлетворяли дифференциальным уравнениям вида

$$\psi'_{1t} = g_1(\psi_1),\ \psi'_{2t} = g_2(\psi_2),\ g_1(0) = g_2(0) = 0,$$

а нулевые положения равновесия этих уравнений были бы устойчивы в целом [1]. Обозначим $\Delta_{ij} = \psi'_{1x_i}\,\psi'_{2x_j} - \psi'_{1x_j}\,\psi'_{2x_i}$, и предположим $\Delta_{12}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \neq 0$ для точки из Γ_{12}. Тогда уравнение синергетического регулятора примет вид

$$\begin{cases} x'_1 = \dfrac{1}{\Delta_{12}}\big(\Delta_{23}\, f_3 + \psi'_{2x_2}\, g_1(\psi_1) - \psi'_{1x_2}\, g_2(\psi_2)\big) \\ x'_2 = \dfrac{1}{\Delta_{12}}\big(\Delta_{31}\, f_3 - \psi'_{2x_1}\, g_1(\psi_1) + \psi'_{1x_1}\, g_2(\psi_2)\big) \\ x'_3 = f_3(x_1, x_2, x_3), \end{cases}$$

и его положения равновесия (x_1^0, x_2^0, x_3^0) должны являться решениями системы

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ \psi_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_3) = 0. \end{cases}$$

Теорема. *Положение равновесия регулятора асимптотически устойчиво, если*

$$g'_{1\psi_1}\big|_{(x_1^0,x_2^0,x_3^0)} < 0,\ g'_{2\psi_2}\big|_{(x_1^0,x_2^0,x_3^0)} < 0,\ \frac{1}{\Delta_{12}}\left|\begin{matrix} \psi'_{1x_1} & \psi'_{1x_2} & \psi'_{1x_3} \\ \psi'_{2x_1} & \psi'_{2x_2} & \psi'_{2x_3} \\ f'_{3x_1} & f'_{3x_2} & f'_{3x_3} \end{matrix}\right|_{(x_1^0,x_2^0,x_3^0)} < 0$$

и неустойчиво, если хотя бы одно из неравенств противоположное. В случае нестрогих неравенств нужны дополнительные исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колесников А. А.* Последовательная оптимизация нелинейных агрегированных систем управления. М.: Энергоатомиздат, 1987, 160 с.

А. О. Ватульян, В. О. Юров (Ростов-на-Дону)
vatulyan@math.rsu.ru, vitja.jurov@yandex.ru

О СТРУКТУРЕ ДИСПЕРСИОННЫХ МНОЖЕСТВ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛНОВОДОВ С ДИССИПАЦИЕЙ [1]

Исследованы вопросы распространения волн в неоднородных волноводах различной структуры (функционально-градиентные упругие, полимеркомпозитные, слоистые с большим числом слоев) с учетом затухания, причем использована концепция комплексных модулей, позволяющая анализировать строение компонент дисперсионных множеств в широком диапазоне изменения параметров.

Для анализа дисперсионного множества составлено матричное дифференциальное уравнение первого порядка, причем комплексная матрица с зависящими от координат элементами порождает спектральный пучок, содержащий два спектральных параметра – безразмерные частоту и волновое число; относительно первого параметра элементы матрицы являются рациональными функциями, относительно второго - квадратичны. Форма представления операторного пучка позволяет исследовать с единых позиций дисперсионные соотношения для ограниченных неоднородностей различного вида - непрерывных и разрывных. Установлены некоторые свойства дисперсионного множества, содержащего вещественные и мнимые компоненты, изучено его строение при малых значениях спектральных параметров, на основе проекционного метода предложена простая прикладная теория. Выявлено существенное отличие строения дисперсионного множества от идеального случая. При нулевом первом спектральном параметре матрица становится вещественной, точки множества состоят из четырехкратного нулевого значения и счетного множества симметричных четверок комплексных собственных значений; с увеличением первого параметра симметрия разрушается, однако все моды являются нераспространяющимися.

Для численного решения однородной краевой задачи использован метод пристрелки. В рамках этого подхода найдены скорости и коэффициенты затухания в неоднородном слоистом пьезоэлектрическом волноводе и в цилиндрическом вязкоупругом волноводе.

Численно и аналитически исследованы закономерности строения дисперсионных множеств для различных типов неоднородности.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00354).

Л. Х. Гадзова (Нальчик)
macaneeva@mail.ru

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА[1]

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{j=1}^{m}\beta_j\partial_{0x}^{\alpha_j}u(x)+\lambda u(x)=f(x),\quad x\in]0,1[,\tag{1}$$

где $\alpha_j\in]1,2[$, $\lambda,\beta_j\in\mathbb{R}$, $\beta_1>0$, $\alpha_1>\alpha_2>...>\alpha_m$, $\partial_{0x}^{\beta}u(x)$ – регуляризованная дробная производная (производная Капуто) [1, с. 11].

Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами исследовались в работах [2] и [3] (см. также библилграфию там).

Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u=u(x)$, имеющую абсолютно непрерывную производную первого порядка на отрезке [0,1] и удовлетворяющая уравнению (1) для всех $x\in]0,1[$.

Задача: *Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u(0)=a,\quad u(1)=b,\tag{2}$$

где $a,b-$ заданные постоянные.

В данной работе доказана теорема существования и единственности решения задачи Дирихле, получено явное представление решения исследуемой задачи и построена соответствующая функция Грина. Доказана, что исследуемая задача разрешима при любом параметре $\lambda\in\mathbb{R}$, за исключением, быть может, конечного числа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. *Псху А. В.* Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Мат. сборник. 2011. Т. 202, № 4. С. 111–122.
3. *Kilbas A. A., Srivastava H. M. Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations // North-Holland Math. Stud., Elsevier, Amsterdam. 2006. Т. 204.

А. В. Гиль, В. А. Ногин (Ростов-на-Дону)
gil@sfedu.ru

КОМПЛЕКСНЫЕ СТЕПЕНИ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В LP-ПРОСТРАНСТВАХ

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00462-а).

Пусть
$$S_{\overline{\lambda}} = m^2 I + i\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} + \sum_{k=1}^{n}(1 - i\lambda_k)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad m > 0,$$
где $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_k > 0$, $1 \leq k \leq n$.

Комплексные степени оператора $S_{\overline{\lambda}}$ с отрицательными вещественными частями на функциях $\varphi(x) \in \Phi$ определяются как мультипликаторные операторы, действие которых в образах Фурье сводится к умножению на соответствующую степень символа рассматриваемого оператора:
$$(\widehat{S_{\overline{\lambda}}^{-\alpha/2}\varphi})(\xi) = \left(m^2 + \xi_{n+1} - |\xi'|^2 + i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\xi_k^2\right)^{-\alpha/2}\widehat{\varphi}(x),$$
где $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$.

Комплексные степени оператора $S_{\overline{\lambda}}$ с отрицательной действительной частью на функциях $\varphi(x) \in L_p$ реализованы в виде анизотропных потенциалов с нестандартной метрикой.
$$(H_{\overline{\lambda}}^{\alpha}\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} h_{\overline{\lambda}}(y)\varphi(x-y)dy,$$
$$h_{\overline{\lambda}}(y) = \frac{2\exp(\frac{-\alpha-n}{4}\pi i)}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(\frac{\alpha}{2})\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1-i\lambda_k}}(y_{n+1})_+^{\frac{\alpha-n-2}{2}} \times$$
$$\times\exp\left\{im^2 y_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{(\lambda_k - i)y_k^2}{4(1+\lambda_k^2)y_{n+1}}\right\},$$

Показана ограниченность оператора $H_{\overline{\lambda}}^{\alpha}$ из L_p в L_q при $0 < \operatorname{Re}\alpha < n+2$, $1 \leq p < \frac{n+2}{\operatorname{Re}\alpha}$, $q = \frac{(n+2)p}{n+2-p\operatorname{Re}\alpha}$.

В рамках метода АОО построено обращение потенциалов $H_{\overline{\lambda}}\varphi$, $\varphi \in L_p$, и дано описание образа $H_{\overline{\lambda}}(L_p)$ в терминах оператора, левого обратного к $H_{\overline{\lambda}}$.

A., S. Gorobtsov, O. E. Grigoryeva, E. N. Ryzhov (Volgograd State Technical University, Russia)
vm@vstu.ru, rzhvt@mail.ru

SYNTHESIS OF RUNNING STRUCTURES OF HYPERBOLIC CONTROL SYSTEMS

Problem of transmission of amplitude, form of profile of the structure is solved in the paper. It should be noted that property of isolation of curve is necessary condition of stable information transmission at wide range of initial conditions. In all such equations $\mathrm{L}(w) + \mathrm{u}(w, \partial_x w) = 0$, $\mathrm{L} = a\partial_t + b\partial_x + c\partial_{xx} + e\partial_{tt}$ –linear operator, $\mathrm{u}(w, \partial_x w)$ – desired nonlinear control , generating solution in the form of running periodic structure (running wave) $w = w(\xi)$, $\xi = x \pm vt$. Thus the problem is reduced to the system with self-excited oscillations. Therefore desired controls are nonlinear. The transition to the space of running variables allows to synthesize invariant manifold asymptotically stable according to V.I. Zubov [1]. In case of more degrees of freedom the problem should be reduced to multi- channel systems considered in the works [2,3].

Theorem. *The following conditions are sufficient for existence of running periodic isolated waves in case of hyperbolic equation:*
1) feedback control has the form: $\mathrm{u}(w,\ \partial_x w) = \partial_x w \mathrm{H}(w,\ \partial_x w) + \beta^2 w + \chi^2 \partial_x w + \gamma \mathrm{R}(w)$, *where* $\alpha^2 > v^2$, $v > 0$,$\gamma > 0$; $\mathrm{H}(w,\ \partial_x w) = \frac{1}{a^2}\left(w^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}(\partial_x w)^2\right)$
$+ \gamma \int_0^{w(\xi)} \mathrm{R}(\tau)\mathrm{d}\tau$;
2) function $\mathrm{H}(w,\ \partial_x w)$ *is positively determined on phase space of running variables.*

We note that the profile of running periodic structure is harmonic at $\gamma = 0$, and at $\gamma \neq 0$ integral $\int_0^{w(x+\delta vt)} \mathrm{R}(\tau)\mathrm{d}\tau$ determines deformation of profile at theorem conditions. The form of structure profile is determined as the solution of the following equation: $\frac{1}{a^2}\left(w^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}(\partial_x w)^2\right) + \gamma \int_0^{w} \mathrm{R}(\tau)\mathrm{d}\tau = v$.

R E F E R E N C E S

1. *Zubov V.I.* Stability motion // M.:High School. 1973.272-pp.

2. *Gorobtzov A.S., Grigoryeva O.E., Ryzhov E.N.* Attracting Ellipsoids and Synthesis of Oscillatory Regimes // Automation and Remote Control, Vol. 70, 8: pp.1301-1308. 2009.

3. *Gorobtzov A.S., Grigoryeva O.E., Ryzhov E.N* Analitical Constructing of the Systems of Nonlinear Stabilization. Volgograd, Pub. VolgSU, 2013.

4. *Grigoryeva O.E., Ryzhov E.N.* Feed-back Control Stabilisation of Oscillations in the Sphere Neighbourhood// Stability and Control Processes: Proceedings of the International Conference in memory of V.I. Zubov, 2005, pp. 1347-1352.

Т. Ф. Долгих, М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева (Ростов-на-Дону)
dolgikh@sfedu.ru, zhuk@math.rsu.ru, evshiryaeva@sfedu.ru

РЕШЕНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ДЛЯ ЗОНАЛЬНОГО ЭЛЕКТРОФОРЕЗА [1]

Рассматривается задача Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа, описывающих процесс зонального электрофореза.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части технического задания 213.01-11/2014-1 Министерства образования и науки РФ, ЮФУ (М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева), и в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности, Задание № 1.1398.2014/К (Т. Ф. Долгих).

Известно, что в этом случае инварианты Римана K^i, $i = 1, 2$, комплексно сопряжены. Таким образом, при построении неявных решений $x(a, b)$ и $t(a, b)$ поставленной задачи Коши с помощью метода годографа, необходимо учитывать, что и параметры a и b будут комплексно сопряжёнными. Явное же решение задачи Коши строится путём решения системы дифференциальных уравнений на изохроне $t = t_*$.

В работе рассмотрены некоторые задачи Коши с пространственно-периодическими начальными данными, используемыми при изучении неустойчивых квазигазовых сред типа газа Чаплыгина. Показано, что с течением времени такие начальные распределения исчезают, преобразуясь в солитоноподобный и кинкоподобный неподвижные профили в точках $2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жданов С. К., Трубников Б. А.* Квазигазовые неустойчивые среды. М.: Наука, 1991.
2. *Жуков М. Ю.* Массоперенос электрическим полем. Ростов-на-Дону: Изд. РГУ, 2005.
3. *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В., Долгих Т. Ф.* Метод годографа для решения гиперболических и эллиптических квазилинейных уравнений. Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2015.
4. *Senashov S. I., Yakhno A.* Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity // SIGMA. 2012. Vol. 8. 16 p.

M. A. Dorodnyi, T. A. Suslina (St. Petersburg, Russia)
st023864@student.spbu.ru, t.suslina@spbu.ru

HOMOGENIZATION OF HYPERBOLIC-TYPE EQUATIONS

In $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, we consider a selfadjoint strongly elliptic operator A_ε, $\varepsilon > 0$, given by the differential expression $b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) b(\mathbf{D})$. Here $g(\mathbf{x})$ is a periodic bounded and positive definite matrix-valued function, and $b(\mathbf{D})$ is a first order differential operator.

We study the behavior of the operator $\cos(tA_\varepsilon^{1/2})$, $t \in \mathbb{R}$, for small ε. It is proved that, as $\varepsilon \to 0$, $\cos(tA_\varepsilon^{1/2})$ converges to $\cos(t(A^0)^{1/2})$ in the norm of operators acting from the Sobolev space $H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ (with a suitable s) to $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Here $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ is the effective operator. In [1], the following sharp order error estimate was obtained:

$$\| \cos(tA_\varepsilon^{1/2}) - \cos(t(A^0)^{1/2}) \|_{H^2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leq (C_1 + C_2|t|)\varepsilon. \tag{1}$$

Then also $\| \cos(tA_\varepsilon^{1/2}) - \cos(t(A^0)^{1/2}) \|_{H^s \to L_2} = O(\varepsilon^{s/2})$, $0 \leq s \leq 2$.

Now we obtain more subtle results [2]. From one hand, we confirm that (1) is sharp: in the general case the estimate

$$\| \cos(tA_\varepsilon^{1/2}) - \cos(t(A^0)^{1/2}) \|_{H^s(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon)$$

is not true if $s < 2$. The supporting examples are given.

From the other hand, we distinguish conditions on the operator under which the result can be improved:

$$\| \cos(tA_\varepsilon^{1/2}) - \cos(t(A^0)^{1/2})\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leq (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2|t|)\varepsilon.$$

Also, by interpolation, $\| \cos(tA_\varepsilon^{1/2}) - \cos(t(A^0)^{1/2})\|_{H^s\to L_2} = O(\varepsilon^{2s/3})$ for $0 \leq s \leq 3/2$. In particular, this is the case for the scalar elliptic operator $A_\varepsilon = -\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla$, where the matrix $g(\mathbf{x})$ has real entries.

The results are applied to study the behavior of the solution $\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ of the Cauchy problem for the hyperbolic-type equation $\partial_t^2 \mathbf{v}_\varepsilon = -A_\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon$. Applications to the acoustics equation and the system of elasticity theory are given. The method is based on the scaling transformation, the Floquet-Bloch theory and the analytic perturbation theory.

REFERENCES

1. *Birman M. Sh., Suslina T. A.* Operator error estimates in the homogenization problem for nonstationary periodic equations, St. Petersburg Math. J. **20** (2009), no. 6, 873–928.

2. *Dorodnyi M. A., Suslina T. A.* Homogenization of hyperbolic-type equations with periodic coefficients, in preparation.

В. В. Дударев, Р. М. Мнухин (Ростов-на-Дону)
dudarev_vv@mail.ru

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРЕДНАПРЯЖЕНИЙ В ТРУБАХ И СТЕРЖНЯХ[1]

Предварительными напряжениями (ПН) называют напряжения, которые существуют в объекте при отсутствии наблюдаемых внешних воздействий. Подобные напряжения чаще всего возникают в результате различного рода производственных операций и в процессе эксплуатации. Одними из наиболее распространенных элементов в современных инженерных сооружениях остаются трубы и стержни. При этом учет ПН в таких элементах имеет важное значение для оценки их реальных прочностных характеристик.

В работе с позиций метода акустического зондирования рассмотрены две задачи об определении ПН в трубе и стержне, находящихся в режиме установившихся колебаний. В качестве модели ПН использована модель Треффтца–Гузя. В задаче для трубы радиальные колебания вызываются периодической осесимметричной нагрузкой, приложенной на внешней границе. Считается, что поле преднапряжений обусловлено действием внутреннего давления. Постановка задачи сформулирована в виде канонической системы двух дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами. Решение прямой задачи об определении функции смещения реализовано численно с помощью метода пристрелки. Исследование обратной задачи о реконструкции уровня ПН по известной информации

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации МК-5440.2016.1 и РФФИ (проект 16-01-00354).

о значениях резонансных частотах сведено к численному решению системы двух трансцендентных уравнений. Проведена серия вычислительных экспериментов по решению этой задачи как для однородной, так и для неоднородной трубы.

В качестве второго примера рассмотрена задача об изгибных колебаниях однородного стержня при наличии одноосного преднапряжения. Решение прямой задачи сведено к численному решению системы 4-х дифференциальных уравнений первого порядка. Сформулирована обратная задача об определении ПН в стержне по данным о функции смещения, заданной в конечном наборе точек для фиксированной частоты колебаний. Получена формула для восстановления закона изменения одноосного преднапряжения. На ее основе представлены примеры реконструкции ПН.

А. Р. Зайнуллов (Стерлитамак, Россия)
arturzayn@mail.ru

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СТРУНЫ [1]

Рассмотрим уравнение струны

$$Lu \equiv u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{1}$$

в области $Q = \{0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ и следующую обратную задачу: найти функцию $u(x,t)$ и $\psi(x)$, удовлетворяющие условиям: $u(x,t) \in C^2(Q) \cap C^1(Q \cup \{t = 0\}) \cap C(\overline{Q})$, $Lu \equiv 0$, $(x,t) \in Q$, $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, $u(x,d) = h(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, $d \in (0,T]$, где $h(x)$, $\varphi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что данная обратная задача для уравнения (1) изучена в работе [1, с. 141], когда отношение сторон $\widetilde{d} = d/l$ прямоугольника принимает рациональные значения. Следуя [2, с. 112] доказана следующая

Теорема 1. *Если число* $\widetilde{d}$ *является алгебраическим числом степени* $n \geqslant 2$, $\varphi(x)$, $h(x) \in C^4[0,l]$, $\varphi^{(j)}(0) = \varphi^{(j)}(l) = 0$, $h^{(j)}(0) = h^{(j)}(l) = 0$, $j = 0, 2$, *то существует единственное решение обратной задачи и оно определяется рядами:*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k \cos \lambda_k t + \frac{h_k - \varphi_k \cos \lambda_k d}{\sin \pi k \widetilde{d}} \sin \lambda_k t \right) X_k(x),$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k (h_k - \varphi_k \cos \lambda_k d)}{\sin \pi k \widetilde{d}} X_k(x),\ \ \varphi_k = \int_0^l \varphi(x) X_k(x) dx,$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ-Поволжье (проект 14-01-97003).

$$h_k = \int_0^l h(x) X_k(x) dx, \; X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \lambda_k x, \; \lambda_k = \frac{\pi k}{l}, \; k \in \mathbb{N}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. М.: Изд–во МГУ, 1994. — 208 с.
2. *Сабитов К. Б.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2013. — 352 с.

Д. А. Закора (Воронеж, Симферополь)
dmitry.zkr@gmail.com, dmitry_@crimea.edu

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ[1]

Рассматривается задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и находящейся под действием гравитационного поля $-g\vec{e}_3$ (см. [1]):

$$\frac{\partial \vec{u}(t,x)}{\partial t} = -a_\infty^2(z) \nabla \big(\rho_0^{-1}(z) \rho(t,x) \big) +$$
$$+ a_\infty^2(z) \sum_{l=1}^m \int\limits_0^t e^{-b_l(t-s)} \nabla \big(k_l(z) \rho(s,x) \big) \, ds + \vec{f}(t,x) \;\; (\text{в } \Omega),$$
$$\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} + \operatorname{div} \big(\rho_0(z) \vec{u}(t,x) \big) = 0 \;\; (\text{в } \Omega), \quad \vec{u}(t,x) \cdot \vec{n} = 0 \;\; (\text{на } \partial\Omega),$$
$$\vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad \rho(0,x) = \rho^0(x).$$

Здесь $\vec{u}(t,x)$, $\rho(t,x)$ — поле скоростей и динамическая плотность жидкости, $\rho_0(z)$ $(z := -gx_3)$ — плотность жидкости в состоянии равновесия, $a_\infty(z)$ — скорость звука в сжимаемой жидкости, $\vec{f}(t,x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное, $\vec{n}$ — внешний, единичный, нормальный к $\partial\Omega$ вектор, остальные параметры в уравнениях — это положительные физические константы.

Доказана экспоненциальная устойчивость потенциальных составляющих полей скоростей идеальной релаксирующей жидкости в случае, когда параметры задачи удовлетворяют следующему условию:

$$1 - \sum_{l=1}^m \frac{k_l(z) \rho_0(z)}{b_l} > 0 \quad \forall \, x \in \overline{\Omega} \quad (z = -gx_3),$$

которое характеризует малость времен релаксации b_l^{-1} и структурных функций $k_l(z)$ $(l = \overline{1,m})$.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00066, выполняемый в Воронежском госуниверситете).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zakora D. A.* A symmetric model of ideal rotating relaxing fluid // Journal of Mathematical Science. 2011. V. 007, № 2. P. 91–112.

D. A. Zhukov (Rostov-on-Don)
fossil.new@yandex.ru

MG-DEFORMATIONS OF A SURFACE WITH GIVEN VARIATION OF THE SECOND INVARIANT OF ANY SYMMETRIC TENSOR ALONG BOUNDARY

Let S – simple connected surface in three-dimensional Euclidian space, K – Gaussian curvature, $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = const$; $\vec{r} = \vec{r}(u,v) \in D_{3,p}, p > 2$, is the position vector of the surface S, $(u,v) \in \Omega$, Ω is a flat simple connected region. The boundary $\partial S \in C^1_\mu, 0 < \mu < 1$, and ∂S has not umbilical points. We assume $\frac{\partial K}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial v} - \frac{\partial K}{\partial v}\frac{\partial H}{\partial u} \neq 0$ on the surface S (H – mean curvature of S).

Let φ_{ij} is any symmetric tensor on the surface S. Surface S has first tensor γ_{ij}, then $2H_\varphi = \gamma^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta}$ is invariant of coordinates transformation. The invariant H_φ called the second invariant of tensor φ_{ij} [1, p. 203-206]. Also, we assume $\frac{\partial H_\varphi}{\partial H} \neq 0$ on the boundary.

Let mark a point Q on the boundary ∂S. On $\partial\Omega$ corresponding point for Q is $\hat{Q}$. Draw line p on surface S from point Q in main direction. An image of line p in region Ω we denote as $\hat{p}$.

Then we draw two tangent line at point $\hat{Q}$ to the line $\hat{p}$ and to the boundary $\partial\Omega$. We denote an angle from tangent line to $\partial\Omega$ up to tangent line to $\hat{p}$, counting anticlockwise, as θ.

A residue of the surface S concerning main directions is a number $V_{MD}(S) = \dfrac{1}{\pi}\Delta_{\partial\Omega}\theta$, where $\Delta_{\partial\Omega}\theta$ – increament of the angle θ, when we go in direction, that returned the region Ω on the left.

We investigate the infinitesimal MG-deformations of the surface S, that give variation of Gaussian curvature as the function $\sigma \in D_{1,p}, p > 2$, on a surface and keep a spherical image of S. This type of deformations was introduced by the author [2].

We claim that some point M_0 of the surface moves to defined vector $\vec{C}$. This constraint we call the *point condition*. The main result is:

Theorem. Let S is subjected to the infinitesimal MG-deformation with point condition, the invariant H_φ has a given variation along the boundary ∂S, the variation is equal to $\psi \in C^1_\rho, 0 < \rho < 1$. Then:

1) if $V_{MD}(S) > -2$,

- with $\sigma \equiv 0$ and $\psi \equiv 0$ there exist the unique infinitesimal MG-deformation of the surface S;

- with $\sigma \not\equiv 0$ or $\psi \not\equiv 0$ there exist the unique infinitesimal MG-deformation of the surface S if and only if functions σ and ψ satisfy $(2V_{MD}(S)+3)$ solvability conditions;

2) if $V_{MD}(S) \leq -2$,

- with $\sigma \equiv 0$ and $\psi \equiv 0$ there exist $(-2V_{MD}(S)-3)$ linearly independent infinitesimal MG-deformations of the surface S;

- with $\sigma \not\equiv 0$ or $\psi \not\equiv 0$ the infinitesimal MG-deformations of the surface S exist and depend on $(-2V_{MD}(S)-3)$ arbitrary real constants.

REFERENCES

1. *Kagan V. F.* Foundations of the theory of surfaces. I // M.: Gostechizdat. – 1947. (in Russian)

2. *Zhukov D. A.* On infinitesimal MG-deformations of a surface of positive Gaussian curvature with stationarity of normal curvature along the boundary // Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences – Kharkov: Apostrof, 2011. – P. 377–384.

М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева (Ростов-на-Дону)
myuzhukov@gmail.com, evshiryaeva@gmail.com

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ КАПЛИ[1]

При описании поведения капли использованы пространственно двумерные уравнения для высоты свободной поверхности h, средних скорости s и температуры φ [1]

$$h_t + \operatorname{div}(h^2\boldsymbol{s}) = -V_0\varphi, \quad \nabla(h - \sigma\Delta h)\big|_{t=0} = 0,$$
$$\boldsymbol{s}_t + (\beta_r - 1)h\boldsymbol{s}\operatorname{div}\boldsymbol{s} + (\beta_r + 1)h\boldsymbol{s}\cdot\nabla\boldsymbol{s} = 0,$$
$$\varphi_t + (\beta_r - 1)h\varphi\operatorname{div}\boldsymbol{s} + (\beta_r + 1)h\boldsymbol{s}\cdot\nabla\varphi = 0,$$

где V_0 — скорость испарения, σ — коэффициент поверхностного натяжения, $\beta_r = 1/3$.

Для простейшего варианта в предположении вращательной симметрии и стационарности функций s, φ

$$\boldsymbol{s} = (s_0 r, 0), \quad \varphi = \varphi_0 r, \quad h = h(r,t) \quad (s_0 > 0),$$

поведение свободной поверхности описывается уравнением

$$\eta_\tau + \eta\eta_r = -v_0 r^2, \quad \eta(r,t) = rh(r,t), \quad \tau = 2s_0 t, \quad v_0 = \frac{V_0\varphi_0}{2s_0} > 0,$$

решение которого записывается в виде $v_0 r = -6\mathcal{P}(t + c_1 |\, 0, c_2)$, где $\mathcal{P}$ — эллиптическая функция Вейерштрасса (Weierstrass P), c_1, c_2 — призвольные константы.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части технического задания 213.01-11/2014-1 Министерства образования и науки РФ, ЮФУ.

Анализ различных решения исходной задачи показал, что высыхание капли происходит наиболее интенсивно в области пересечения свободной и горизонтальной поверхностей. Дополнительно для капли, содержащей примесь, с привлечением сорбционного механизма прилипания примеси к поверхности удается объяснить возникновение структур концентрации примеси в области высыхания.

Обнаружено, что в процессе высыхания для достаточно «первоначально высокой» капли в окрестности края с течением времени возможно «опрокидывание» профиля свободной поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В., Полякова Н. М.* Моделирование испарения капли жидкости. Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2015.

В. В. Казак (ЮФУ, Россия) Н. Н. Солохин (ДГТУ, Россия)
vkazak136@gmail.com, nik2007.72@mail.ru

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЙ

В теории бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны с краем рассмотрено множество условий, которые накладываются на край поверхности при её деформации. Изучение бесконечно малых изгибаний таких поверхностей сводится к решению различных краевых задач, которые в свою очередь сводятся к системе интегральных уравнений. Получению полной картины возникающих при этом деформаций поверхности способствует рассмотрение некоторых частных случаев поверхностей, например, сферических сегментов, сегментов параболоида вращения и др.

Для поверхностей, однозначно проектирующихся на плоскость, получена следующая краевая задача:

$$\begin{cases} w_{\bar{z}} + q_1 w_z + q_2 \bar{w}_{\bar{z}} = 0, & z \in D, \\ \operatorname{Re}\left\{\overline{a(t)} w_t + \varepsilon \overline{b(t)} w\right\} = \sigma, & t \in \partial D, \end{cases}$$

В частности для параболоида вращения $z = x^2 + y^2$ и векторного поля $\bar{\ell} = \bar{k} + \varepsilon \bar{\ell}_0$ при решении соответствуюшей краевой задачи используется метод, предложенный в статье [1]. При этом рассмотрены случаи, как нулевого значения индекса краевой задачи, так и ненулевого. Установлено, что при нулевом значении индекса среди векторных полей $\bar{\ell}_{\alpha_\varepsilon}$ существует: 1) при $n + 1 > 0$ конечное число собственных векторных полей $\vec{\ell}_{\alpha_{\varepsilon_k}}$; 2) при $n = 0$ счётное множество собственных векторных полей; 3) при $n + 1 < 0$ пустое множество собственных векторных полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Виноградов В. С.* Об одном методе решения задачи Пуанкаре для аналитических функций // Доклады Академии Наук СССР. — 1960. — С. 17–19.

2. *Казак В. В., Солохин Н. Н.* О квазикорректности смешанного краевого условия для одного класса поверхностей // Современные проблемы математики и механики, т. VI, вып. 2. Издательство Московского университета, 2011. – С. 212 – 216.

A. Kazarnikov, S. Revina (Rostov-on-Don), H. Haario (Lappeenranta)
kazarnikov@gmail.com

SECONDARY TIME-PERIODIC AND STATIONARY SOLUTIONS OF RAYLEIQH REACTION-DIFFUSION SYSTEM

We consider Rayleigh reaction-diffusion system:

$$\begin{cases} v_t = \nu_1 \Delta v + w \\ w_t = \nu_2 \Delta w - v + \mu w - w^3 \end{cases}$$

where $v = v(x,t)$, $w = w(x,t)$, $x \in D$, $t > 0$, $D \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ - bounded domain, $\mu \in \mathbb{R}$ - control parameter, $\nu_1, \nu_2 > 0$ - diffusion coefficients. We consider Dirichlet, Neumann and mixed boundary conditions.

The main purpose of the present work is finding solutions of Rayleigh system, branching from zero as parameter μ varies, while diffusion coefficients are fixed and $\nu_1 \neq \nu_2$. The case $\nu_1 = \nu_2$ was studied by authors earlier.

The conditions for monotonous and oscillatory instability were found, critical values for control parameter μ were derived. The transition between types of instabilities due to different relations between ν_1 and ν_2 was studied. For finding secondary stationary and periodic solutions we employ Lyapunov-Schmidt method in the form, developed by V.I. Yudovich ([1]).

We constructed an abstract scheme, applicable to the system under study with different boundary conditions. The first terms of asymptotic expansion are found explicitly and formulas for consecutive terms of the expansion are obtained. It was shown that soft loss of stability takes place in the system.

For the case of 1D spatial variable we studied the qualitative behaviour of solutions in the cases of different boundary conditions. The case of 1D spatial variable and equal diffusion coefficients was considered in ([2]).

System dynamics when $\mu >> \mu_{cr}$ and when $\nu_2 \to 0$ was studied numerically. The experiments were carried out for $x \in \mathbb{R}^1$ and $x \in \mathbb{R}^2$. MATLAB and Maple were used for simulations. GPU-acceleration via NVIDIA CUDA v 7.5 was used for faster computations.

REFERENCES

1. *Yudovich V. I.* Investigation of auto-oscillations of a continuous medium, occurring at loss of stability of a stationary mode // PMM Vol. 36, No 3, 1972.

2. *Kazarnikov A. V., Revina S. V., Haario H.* Numerical and asymptotical analysis of Rayleigh reaction-diffusion system // Numerical algebra with applications. Proceedings of Fourth China-Russia Conference, P. 114-119, 2015.

А. С. Калитвин(Липецк)
kalitvinas@mail.ru

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД [1]

В [1,2] рассмотрено интегральное уравнение

$$\lambda x(t,s) + (Kx)(t,s) \equiv \lambda x(t,s) + (Lx)(t,s) + (Mx)(t,s) = g(t,s), \qquad (1)$$

моделирующее некоторые проблемы механики сплошных сред, где $(t,s) \in D = [0,b]\times[-1,1]$, оператор K определяется равенством $(Kx)(t,s) = \int_0^t l(t,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_{-1}^1 m(s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma$. В уравнении (1) $l(t,\tau)$ — непрерывное или слабо сингулярное ядро, а интегральный оператор $(\tilde{M}x)(s) = \int_{-1}^1 m(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma$ действует в $L^p([-1,1])$ $(1 \le p < \infty)$ или в $C([-1,1])$. В этом случае оператор K непрерывен в $C(L^p)$ или, соответственно, в $C(D)$ и справедливы равенства $\sigma(K) = \sigma_a(K) = -\sigma(\tilde{M})$, где $a \in \{es, ew, eb\}$, а через $\sigma(K)$, $\sigma_{es}(K)$, $\sigma_{ew}(K)$, $\sigma_{eb}(K)$ обозначен спектр, существенный спектр в смысле Шехтера, Вольфа и Браудера ограниченного в комплексном банаховом пространстве оператора K, $\sigma(M)$ обозначает спектр оператора $\tilde{M}$ [1,2].

Оператор K в уравнении (1) — частный случай оператора

$$(\tilde{K}x)(t,s) = \int_0^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_{-1}^1 m(s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma.$$

Если теперь $l(t,s,\tau)$ — непрерывное или слабо сингулярное ядро, а оператор $\tilde{M}$ действует в $L^p([-1,1])$ $(1 \le p < \infty)$ или в $C([-1,1])$, то оператор $\tilde{K}$ непрерывен в $C(L^p)$ или, соответственно, в $C(D)$, а $\sigma_a(\tilde{K}) = -\sigma(\tilde{M})$, где $a \in \{es, ew\}$.

Отметим, что в уравнении (1) механики сплошных сред параметр $\lambda > 0$ и $\tilde{M}$ — положительно определенный оператор в $L^2([-1,1])$. Поэтому уравнение (1) при положительных λ имеет единственное решение в $C(L^2)$. Аналогично, единственное решение в $C(L^2)$ при $\lambda > 0$ имеет и уравнение $x = \tilde{K}x + g$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калитвин А. С.* Линейные операторы с частными интегралами. – Воронеж: ЦЧКИ, 2000 – 252 с.

2. *Appell J M., Kalivin A S., Zabrejko P.P.* Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. – New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. – 560 p.

[1] Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (Госзадание, проект № 2015/351, НИР № 1815).

А. С. Калитвин, В. А. Калитвин (Липецк)
kalitvinas@mail.ru, kalitvin@mail.ru

ЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ БАРБАШИНА С ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА [1]

Основы теории линейных интегро-диффреренциальных уравнений Барбашина (ИДУБ) с частными производными первого порядка и некоторые их приложения изложены в [1].

В данной заметке рассматривается задача

$$\frac{\partial^2 x(t,s)}{\partial t^2} = l(t,s)\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} + m(t,s)x(t,s) + \int_c^d n(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + f(t,s),$$

$$x(a,s) = \varphi(s), x'_t(a,s) = \psi(s). \tag{1}$$

Предполагается, что заданные функции $l, m, f \in C(D)$, $n \in C(D \times [c,d])$, $\varphi, \psi \in C([c,d])$, где $C(D)$, $C(D \times [c,d])$ и $C([c,d])$ — пространства непрерывных на $D = [a,b] \times [c,d]$, $D \times [c,d]$ и $[c,d]$ соответственно функций. Интеграл в (1) понимается в смысле Лебега.

Решением задачи (1) считается функция $x \in C(D)$, удовлетворяющая ИДУБ и начальным условиям, и у которой $x''_{tt} \in C(D)$.

При сделанных предположениях задача (1) эквивалентна некоторому линейному интегральному уравнению Вольтерра $y = Vy + g$ с частными интегралами и с непрерывными ядрами, под решением которого понимается непрерывная на D вместе с $y'_t(t,s)$ функция y, удовлетворяющая этому уравнению, а эквивалентность задачи (1) и уравнения $y = Vy + g$ понимается в том смысле, что решения этих уравнений связаны равенством

$$x(t,s) = \int_a^t y(\tau,s)d\tau + \varphi(s).$$

В силу [2] уравнение $y = Vy + g$ имеет единственное решение. Тогда и задача (1) имеет единственное решение.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. – New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. – 560 p.

2. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами. – Липецк: ЛГПУ, 2006. – 177 с.

[1]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (Госзадание, проект № 2015/351, НИР № 1815).

В.М. Каплицкий (Ростов-на-Дону)
kaplitsky@donpac.ru

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВБЛИЗИ ТОЧКИ ПОВОРОТА, РАВНОМЕРНЫЕ ПО ПАРАМЕТРУ, И ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦЫ ПЕРЕХОДА

В квантовой механике и в теории распространения коротких волн в неоднородных средах возникает необходимость находить асимптотические разложения при больших λ (при $\lambda \longrightarrow +\infty$) решений уравнения второго порядка

$$\triangle y - \lambda^2 q(x) y = 0$$

В задачах квантовой теории большой параметр λ формально обратно пропорционален постоянной Планка, а в теории коротких волн он является безразмерным параметром пропорциональным волновому числу. В одномерном случае нули функции $q(x)$ назаваются точками поворота. Классическая ВКБ-асимптотика, как известно, теряет смысл в окрестности точки поворота. Глобальные асимптотики в областях, содержащих точку поворота, строятся либо из локальных с помощью канонического оператора Маслова, либо с помощью более сложных асимтотических разложений, содержащих специальные функции (в одномерной задаче это разложение Олвера), которые справедливы и в окрестности точки поворота. Если функция $q(x)$ зависит от дополнительного малого параметра ε, то в некоторых случаях возникает задача о нахождении асимптотического разложения равномерного по ε. В работе получены условия на функцию $q(x, \varepsilon)$, которые обеспечивают равномерность разложений Олвера в случае когда точка поворота не зависит от параметра ε и рассмотрены применения этого результата к некоторым задачам теории дифференциальных уравнений (вычисление матрицы перехода) и квантовой механики (квазиклассическая асимптотика собственных чисел оператора Шредингера).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Добавление 1. Асимптотика решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области М.: Мир, 1968.

2. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1977.

A. A. Kovalevsky (Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia)
alexkvl71@mail.ru

$W^{1,1}$-REGULAR T-SOLUTIONS OF DEGENERATE ANISOTROPIC VARIATIONAL INEQUALITIES WITH L^1-DATA

We consider a weighted anisotropic Sobolev space $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ associa-ted with a bounded open set Ω of $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$), the set q of exponents $q_i \in (1,n)$, $i = 1,\dots,n$, and the set ν of nonnegative functions $\nu_i : \Omega \to \mathbb{R}$ such that $\nu_i > 0$ a. e. in Ω, $\nu_i \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$, and $(1/\nu_i)^{1/(q_i-1)} \in L^1(\Omega)$, $i = 1,\dots,n$. We study variational inequalities corresponding to triplets of the form (a,V,f), where: 1) a is the set of Carathéodory functions $a_i : \Omega\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,n$, satisfying the strict monotonicity condition as well as growth and coercivity conditions with the exponents q_i and functions ν_i; 2) V is a closed convex set in $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ such that, for every $u, v \in V$ and for every $k > 0$, we have $u - T_k(u-v) \in V$ (T_k is the truncation of level k); 3) $f \in L^1(\Omega)$.

By definition, if $f \in L^1(\Omega)$, $W^{1,1}$-regular T-solution of the variational inequality corresponding to the triplet (a,V,f) is a function $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$ such that: (a) $v \in V$, $k > 0$, $i \in \{1,\dots,n\} \Longrightarrow T_k(u-v) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ and $a_i(x,\nabla u)D_iT_k(u-v) \in L^1(\Omega)$; (b) $v \in V$, $k \geqslant 1 \Longrightarrow v - T_k(v-u) \in V$ and

$$\int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,\nabla u)D_iT_k(u-v)\Big\}dx \leqslant \int_\Omega fT_k(u-v)dx.$$

We describe conditions on the exponents q_i and the functions ν_i under which, for every $f \in L^1(\Omega)$, there exists a unique $W^{1,1}$-regular T-solution of the variational inequality corresponding to the triplet (a,V,f). The corresponding theorem was proved in [1] with the use of some results obtained in [2].

REFERENCES

1. *Kovalevsky A. A.* Toward the L^1-theory of degenerate anisotropic elliptic variational inequalities. // Proc. Steklov Inst. Math. 2016. Vol. 292. Suppl. 1.

2. *Kovalevsky A. A., Gorban Yu. S.* On T-solutions of degenerate anisotropic elliptic variational inequalities with L^1-data. Izvestiya: Mathematics. 2011. Vol. 75, no. 1. P. 101–156.

И. В. Коноплева (УИ ГА, Ульяновск)
irinakonopleva2014@yandex.ru

СИММЕТРИЯ И ВОЗМУЩЕНИЕ ОБЛАСТИ В ЗАДАЧЕ О РАЗВЕТВЛЯЮЩИХСЯ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Методами группового анализа для построения и исследования уравнения разветвления (УР) в [1] определена асимптотика разветвляющихся решений нелинейных задач на собственные значения

$$\Delta u + \lambda^2 \left\{ \begin{array}{c} \sinh u \\ \sin u \end{array} \right\} = 0, \qquad \begin{array}{r} (1) \\ (2) \end{array}$$

$$(a): \quad \Lambda_{(a)} : u\left|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{или} \quad (b): \quad \Lambda_{(b)} : \frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$$

в квадрате, прямоугольнике, круге и с условиями периодичности. В работах Б.В. Логинова доказано, что общий вид УР определяется группой его симметрии, от задачи к задаче меняются только значения его коэффициентов.

Если уравнения рассматриваются в области больших размеров, они допускают группу движений $\mathbb{R}^2$. Если же область ограничена, то ее вид влечет симметрию задачи относительно допускаемой ею группы преобразований.

Для области $\Omega = \left\{(x,y) \left| 0 \le x^2 + y^2 \le r_0^2 \right.\right\}$ задачи на собственные значения (1) и (2) $(a), (b)$ допускают однопараметрическую группу $O(2)$ вращений-отражений и порядок двумерного УР можно понизить на единицу. Построено уравнения разветвления для задач (1), (2) $(a), (b)$ и однопараметрические семейства решений представлены в виде сходящихся рядов по малому параметру $\varepsilon^{1/2}$.

В данной работе рассматриваются задачи (1),(2) в которых линейное преобразование $\zeta = \frac{r}{a}x,\ \eta = y$ переводит круг Ω в эллипс. Методами [2] решена задача о возмущении собственных значений.

Аналогично можно рассмотреть задачи о возмущении круга и квадрата для уравнения $\Delta u + \lambda^2(u + a_2u^2 + ...) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1.*Логинов Б.В., Коноплева И.В.*Симметрия области и задачи о периодических решениях нелинейно возмущенного уравнения Гельмгольца//Тр. Средневолж. мат. об-ва. 2003. Т. 5, № 1. С. 38–38.

2. *Рахимов В. С.* Вопросы регуляризации в задачах на собственные значения //Дисс. на соиск. уч. ст. доктора физ.-мат. н. Нац. ун-т Узбекистана. – Ташкент, 2014. С. 132.

N. D. Kopachevsky, Z. Z. Sitshayeva (Simferopol)
szz2008@mail.ru

ON THE AXIALLY SYMMETRIC PROBLEM OF OSCILLATIONS OF CAPILLARY FLUID WITH THE DISCONNECTED FREE SURFACE[1]

We study a behavior of an ideal fluid (density $\rho = \text{const}$) in an axially symmetric vessel, which is under the acting of a weak gravitational force with acceleration $\vec{g} = \text{const}$ and mass force $\vec{f}(t,x)$. Let at rest the fluid occupies a region $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$ limited by a part S of the wall and free surface $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, where Γ_0 is inside Ω_0, Γ_1 is a drop surface hanging from hole in the bottom; $\partial\Gamma_0$, $\partial\Gamma_1$ are the contact boundaries of Γ_j with the vessel; S, Γ_j, $\partial\Gamma_j$ are Lipschitz's. Then the problem on small motions of the fluid over the state of rest has the form

$$\rho\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2} + \nabla p = \rho\vec{f}, \quad \operatorname{div}\vec{w} = 0 \quad (\text{in } \ \Omega), \quad \vec{w}\cdot\vec{n}|_S = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\zeta_0}{\partial\nu} + \chi_0\zeta_0|_{\partial\Gamma_0} = 0, \ \ \zeta_0 := \vec{w}\cdot\vec{n}|_{\Gamma_0}, \ \ \chi_0 := (k_0\cos\delta_0 - k_S)/\sin\delta_0, \tag{2}$$

$$p|_{\Gamma_0} = -\sigma\Delta_0\zeta_0 + (-\sigma((k_1^0)^2 + (k_2^0)^2)g\rho\cos(\widehat{\vec{n}_0,\vec{e}_3}) - (k_S^0)^2)\zeta_0, \tag{3}$$

$$\zeta_1|_{\Gamma_1} = 0, \ \ \zeta_1 := \vec{w}\cdot\vec{n}|_{\Gamma_1}, \ \ \int\limits_{\Gamma_0}\zeta_0\,d\Gamma_0 + \int\limits_{\Gamma_1}\zeta_1\,d\Gamma_1 = 0, \tag{4}$$

$$p|_{\Gamma_1} = -\sigma\Delta_1\zeta_1 + (-\sigma((k_1^1)^2 + (k_2^1)^2)g\rho\cos(\widehat{\vec{n}_1,\vec{e}_3}) - (k_S^1)^2)\zeta_1, \tag{5}$$

$$\vec{w}(0,x) = \vec{w}^0(x), \quad \frac{\partial\vec{w}}{\partial t}(0,x) = \vec{w}^1(x), \quad x\in\Omega. \tag{6}$$

Here: $\vec{n}_j$ is an external normal to Γ_j; $\vec{\nu}$ is a normal to $\partial\Gamma_0$ in the plane tangent to Γ_0; δ_0 is a wetting angle at $\partial\Gamma_0$; (k_1^j), (k_2^j) are the main curvatures of the surfaces Γ_j; k_0 and k_S are the curvatures of the section of the surfaces Γ_0 and S with a plane perpendicular to $\partial\Gamma_0$; $\sigma = \text{const}$ is a surface tension at Γ_0; $\zeta = \{\zeta_0;\zeta_1\}^\tau$; ζ_0, ζ_1 are the deviations of the fluid surface along $\vec{n}_j$ to Γ_j; Δ_j are Laplace–Beltrami operators at Γ_j.

Using an operator approach (see [1]) the problem (1)–(6) is reduced to the Cauchy problem for an operator differential equation

$$\mathcal{A}\zeta'' + \mathcal{B}\zeta = \mathcal{A}f, \ \ f := (f_0;f_1)^\tau, \ \ \zeta(0) = \zeta^0, \ \ \zeta'(0) = \zeta^1, \tag{7}$$

in space $\mathcal{H} = L_2(\Gamma)\ominus 1_\Gamma$, $1_\Gamma = \{1_{\Gamma_0};1_{\Gamma_1}\}$.

Theorem 1. *Let* $0 < \mathcal{A} \in \mathfrak{S}_\infty$, $B = B^* \gg 0$, $\zeta^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B})$, $\zeta^1 \in \mathcal{D}(\mathcal{B}^{1/2})$, $f \in C^1([0,T];\mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}))$. *Then the problem (7) has an unique strong solution at an*

[1]This research was done at the expense of grant funds Russian Science Foundation (Project 14-21-00066, performed in Voronezh State University)

interval $[0, T]$, *ie all the terms in the equation (7) are continuous in* t *with values in* $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2})$.

Using this result it is shown that on some conditions the problem (1)–(6) has an unique strong solution at an interval $[0, T]$, ie all the functions in the motion equations are continuous in t with values in $\vec{L}_2(\Omega)$, and all the functions in boundary conditions on Γ are continuous in t with values in $(H^{1/2}(\Gamma_0) \times H_0^{1/2}(\Gamma_1)) \cap \mathcal{H}$.

REFERENCES

1. *Kopachevsky N. D., Krein S. G., Ngo Zuy Kan.* Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike: Evolyutsionnye i spektral'nye zadachi. M.: Nauka, 1989. 416 p.

А. А. Корнута (Симферополь)
korn_57@mail.ru

МЕТАУСТОЙЧИВЫЕ СТРУКТУРЫ В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ НА ОКРУЖНОСТИ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ПОВОРОТА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Рассматривается скалярное параболическое уравнение на окружности $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ с преобразованием поворота пространственной переменной на угол π:

$$\begin{gathered} \partial_t u + u = \mu \partial_{xx} u + L\,\mathrm{T}u + (\mathrm{T}u)^3, \\ u(x + 2\pi, t) = u(x, t), u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < 2\pi, \quad t > 0, \end{gathered} \tag{1}$$

$\mathrm{T}u = u(x + \pi)$, $\mu > 0$, L - параметры. Уравнение (1) моделирует динамику фазовой модуляции световой волны, прошедшей тонкий слой нелинейной среды керровского типа с преобразованием поворота на угол π в двумерной обратной связи [1]. Бифуркационным параметром является μ. Численные расчёты показали, что в уравнении (1) при μ порядка 10^{-3}, имеются медленно меняющиеся (метаустойчивые) решения.

Для исследования динамики метаустойчивых структур уравнения (1) методом Галёркина строятся системы обыкновенных дифференциальных уравнений различных размерностей. В этих системах при малых значениях параметра μ реализуются седло-узловые бифуркации, которым отвечают приближённые решения уравнения (1). Решения уравнения (1), для которых в качестве начальных функций приняты указанные приближённые решения, ведут себя как медленно меняющиеся решения типа внутреннего переходного слоя.

В работе [2] рассматриваются различные варианты эволюции метаустойчивых структур.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В. Ю.* Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей. В: Новые принципы оптической обработки информации. М: Физматлит. 1990.

2. *Корнута А. А.* Метаустойчивые структуры в параболическом уравнении на окружности с поворотом пространственной переменной. Динамические системы. 2014. Т. 4, № 1-2. С. 59–75.

Б. Д. Кошанов (Алматы, Казахстан), А. П. Солдатов (Белгород)
koshanov@list.ru, soldatov48@gmail.com

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С НОРМАЛЬНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ [1]

Обобщенная задача Неймана для эллиптического уравнения четного порядка $2l$ определяется заданием на границе односвязной области D, ограниченной достаточно гладким контуром Γ, последовательных нормальных производных $(\partial/\partial n)^j$, $j = 1, \ldots, l$. Для полигармонического уравнения эта задача была изучена А.В. Бицадзе [1]. Другой вариант задачи Неймана, основанный на вариационном принципе, был ранее предложен А.А.Дезиным[2]. В работе[3] для эллиптического уравнения с постоянными (и только старшими) вещественными коэффициентами была рассмотрена более общая задача S, заключающаяся в задании нормальных производных $(k_j - 1)-$го порядка, $j = 1, \ldots, l$, где $1 \leq k_1 < \ldots < k_l$. При $k_j = j$ она переходит в задачу Дирихле, а при $k_j = j + 1$ – в отмеченную выше задачу Неймана. Поэтому ее естественно назвать обобщенной задачей Дирихле - Неймана.

В докладе эта задача рассматривается для более общего эллиптического уравнения, коэффициенты которого постоянны только при старших членах.

С задачей S связывается некоторая непрерывная на единичной окружности $|n| = 1$ матрица- функция $G(n)$ порядка l, зависящая только от корней характеристического уравнения и набора чисел $k_1, \ldots, k_l$. В терминах этой функции показано, что условие $\det G(n) \neq 0,\ |n| = 1$, необходимо и достаточно для фредгольмовости этой задачи, и приведена формула ее индекса $\operatorname{ind} S$. В частности, выполнение этого условия для хотя бы одной области влечет его справедливость для любой другой области.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А.В.* Дифференц. уравнения, 1988, т. 24, №5, с. 825-831.
2. *Дезин А.А.* ДАН, 1654, т. 96, №5, с. 901-903.
3. *Малахова Н.А., Солдатов А.П.,* Дифференц. уравнения, 2008, Т.44, No. 8, С. 1077-1083.

[1]Работа выполнена при поддержке Международного проекта (3492.ГФ4) Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Vladislav V. Kravchenko (Queretaro, Mexico)
vkravchenko@math.cinvestav.edu.mx

TRANSMUTATIONS AND NEUMANN SERIES OF BESSEL FUNCTIONS IN SOLUTION OF STURM-LIOUVILLE EQUATIONS

Let $q \in C[-b, b]$ be a complex valued function. Consider the Sturm-Liouville equation

$$Ay := y'' - q(x)y = -\omega^2 y. \tag{1}$$

It is well known (see, e.g., [2]) that there exists a Volterra integral operator T called the transmutation (or transformation) operator defined on $C[-b, b]$ by the formula

$$Tu(x) = u(x) + \int_{-x}^{x} K(x,t)u(t)dt$$

such that for any $u \in C^2[-b, b]$ the following equality is valid

$$ATu = Tu''$$

and hence any solution of (1) can be written as $y = T[u]$ where $u(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$ with c_1 and c_2 being arbitrary constants.

The transmutation kernel K is a solution of a certain Goursat problem for the hyperbolic equation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - q(x)\right) K(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} K(x,t).$$

In the talk several new results concerning the properties and construction of the kernel K are presented. In particular, an exact representation for K in the form of a Fourier-Legendre series with explicit formulas for the coefficients is obtained.

As a corollary of this result, a new representation of solutions to equation (1) is obtained. For every x the solution is represented as a Neumann series of Bessel functions depending on the spectral parameter ω. Due to the fact that the representation is obtained using the corresponding transmutation operator, a partial sum of the series approximates the solution uniformly with respect to ω which makes it especially convenient for the approximate solution of spectral problems. The numerical method based on the proposed approach allows one to compute large sets of eigendata with a nondeteriorating accuracy. The talk is based on [1].

Additionally other applications of the main result are discussed such as construction of complete systems of solutions of partial differential equations including the extension of the method of fundamental solutions onto the PDEs with variable coefficients.

R E F E R E N C E S

1. *Kravchenko V. V., Navarro L. J., Torba S. M.* Representation of solutions to the one-dimensional Schrödinger equation in terms of Neumann series of Bessel functions. Submitted for publication, available at arxiv:1508.02738.

2. *Marchenko V. A.* Sturm-Liouville Operators and Applications.Birkhäuser, Basel, 1986.

Р. Лагерр (Москва)
laguerreka@sci.pfu.edu.ru

АПРИОРНЫЕ L_p-ОЦЕНКИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С НЕГЛАДКИМИ ЛИНИЯМИ РАЗРЫВА КОЭФФИЦИЕНТОВ В ОБЛАСТЯХ С НЕГЛАДКИМИ ГРАНИЦАМИ

Рассматриваются ограниченные и неограниченные области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с компактными и некомпактными кусочно-C^1 границами $\partial\Omega$, имеющие конечное число конечных угловых особых точек, но не более одной бесконечной при наличии конечного числа участков $\partial\Omega$, уходящих на ∞ с предельными касательными. Для эллиптического уравнения в дивергентной форме $\operatorname{div}(a\nabla u) = \operatorname{div} f$ с разрывными кусочно-постоянными коэффициентами a в области Ω ставится краевая задача Неймана с условиями сопряжения. При этом предполагается, что коэффициенты a имеют конечное число кусочно-гладких компактных или некомпактных линий разрыва, состоящих из кусков Γ_k замкнутых C^1-гладких кривых, на которых выполняются условия непрерывности решения и его производной по конормали к соответствующей Γ_k. Конечными особыми точками линий разрыва коэффициентов считаются точки излома и точки пересечения конечного (трёх и более) числа C^1-гладких кривых, а уходящие на ∞ участки линий разрыва коэффициентов с предельными касательными относятся к бесконечной особой точке. Угловые точки $\partial\Omega$ могут совпадать с точками разрыва a, что для бесконечной угловой точки $\partial\Omega$ означает наличие хотя бы одной Γ_k, уходящей на ∞ с предельной касательной. Краевая задача с однородными условиями Неймана на $\partial\Omega$ и условиями сопряжения на Γ_k рассматривается в слабой постановке в смысле интегрального тождества, стандартного для слабых решений класса $\nabla u \in L_p(\Omega)$ с заданной вектор-функцией $f \in L_p(\Omega)$, что эквивалентно сильной постановке для некоторой системы первого порядка, эллиптической по Дуглису-Ниренбергу. Соответствующие априорные оценки были установлены в [1,2] лишь для случая условий Дирихле и с модельными особыми точками, вблизи которых линии разрыва и участки границы были отрезками прямых.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дудкина А. А.* К L_p-теории эллиптических операторов с разрывными коэффициентами // ДАН. 2010. Т. 430, № 3. С. 304-307.

2. *Дудкина А. А.* К L_p-теории эллиптических краевых задач с разрывными коэффициентами. Канд. дисс. М.: РУДН, 2010.

М. Г. Лапшина (Липецк)
marina.lapsh@ya.ru

ОБРАЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ВЕСОВЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Пусть N и n – фиксированные натуральные числа, $1 \leq n \leq N$, $x = (x', x'') \in \mathbb{R}_N^+ = \mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_{N-n}$,

$$x'=(x_1, \dots, x_n) \in R_n^+=\{x_i>0\,,\ i=\overline{1,n}\},\ x''=(x_{n+1}, \dots, x_N) \in R_{N-n},$$

$\gamma=(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ — мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел, $(x')^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}$, $\langle x\,,\,\xi\rangle = \sum_{i=1}^N x_i \xi_i$.

Действие обобщенного сдвига определяется равенством

$$(T^y f)(x)=C(\gamma) \int\limits_0^\pi \dots \int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{x'^2+y'^2-2x'y'\cos\alpha},\ x''-y''\right) sin^{\gamma-1}\alpha' d\alpha',$$

где $\sqrt{x'^2 + y'^2 - 2x'y'\cos\alpha}$ — n-мерный вектор с координатами

$$\sqrt{x_j^2 + y_j^2 - 2x_j y_j \cos\alpha_j}\,,\ \ j = \overline{1,n}\ \text{ и } C(\gamma) = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}\,.$$

Понятие функции "весовая плоская волна" введено в [1] в виде: $\mathcal{P}_{x'}^\gamma f(\langle x\,,\,\xi\rangle)$, где $\mathcal{P}^\gamma$ – многомерный оператор Пуассона,

$$\mathcal{P}_{x'}^\gamma f(x', x'')=C(\gamma) \int\limits_0^\pi \dots \int\limits_0^\pi f(x_1\cos\alpha_1,\ \dots\ , x_n\cos\alpha_n,\ x'')\sin^{\gamma-1}\alpha'\,d\alpha'.$$

Теорема 1. *Пусть носитель функции f принадлежит ограниченной области Ω_N^+ и удовлетворяет условию Гельдера, тогда если число $N + |\gamma| > 2$ – нечетное и $k = 1, 3, 5, \dots,$ то*

$$\triangle_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+k}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (T^{-\eta} f)(\xi) \int\limits_{S_1^+(N)} \mathcal{P}_{x'}^\gamma |\langle x\,,\,\xi\rangle|^k\ (x')^\gamma\ dS(x)(\xi')^\gamma d\xi =$$
$$= 2^{N+|\gamma|-2n+1}\ \pi^{N-n-1} \prod_{i=1}^n \Gamma^2\left(\tfrac{\gamma_i+1}{2}\right)\ i^{N+|\gamma|-1}\, k!\, f(\eta)\,;$$

а если число $N + |\gamma| > 2$ – четное и $k = 0, 2, 4, \dots,$ то

$$\Delta_{B_\eta}^{\frac{N+|\gamma|+k}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} (T^{-\eta} f)(\xi) \int\limits_{S_1^+(N)} \mathcal{P}_{x'}^\gamma |\langle x, \xi\rangle|^k\ \ln|\langle x, \xi\rangle| (x')^\gamma\, dS(x)\, (\xi')^\gamma\, d\xi =$$
$$= -\pi^{N-n} 2^{N+|\gamma|-2n} i^{N+|\gamma|} \prod_{i=1}^n \Gamma^2\left(\tfrac{\gamma_i+1}{2}\right)\ k\,!\, f(\eta)\,.$$

Особенность этих формул состоит в том, что они верны для дробных γ_i, при условии, что число $|\gamma|$ — натуральное.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киприянов И. А., Кононенко В. И.* Фундаментальные решения B-эллиптических уравнений // Дифференциальные уравнения. 1967. Т. 3, № 1. С. 114–129.

D. V. Limanskii (Donetsk)
4125aa@gmail.com

NEWTON'S POLYGON AND A PRIORI ESTIMATES FOR DIFFERENTIAL POLYNOMIALS ON THE PLANE

In this communication we describe the linear space $L(P)$ of minimal differential polynomials subordinated to the tensor product $P(D) = p_1(D_1) \otimes p_2(D_2)$ of two ordinary differential operators in the $C(\mathbb{R}^2)$ norm. The cases if the cofactors' symbols $p_1(\xi_1)$ and $p_2(\xi_2)$ contain real and complex zeros of different multiplicity are considered. Moreover, for description of the space $L(P)$, we use, along with elements of harmonic analysis, the technique and method of the Newton polygon.

REFERENCES

1. *Limanskii D. V., Malamud M. M.* Elliptic and weakly coercive systems of operators in Sobolev spaces. Sbornik: Mathematics. 2008. Vol. 199, No. 11. P. 1649–1686.
2. *Limanskii D. V.* On estimates for a tensor product of two homogeneous elliptic operators. Ukr. Math. Bulletin. 2011. Vol. 8. No. 1. P. 101–111.
3. *Limanskii D. V.* Subordination conditions for a tensor product of two ordinary differential operators. Dopovidi NAN Ukrainy. 2012. №. 4. P. 25–29.

В. А. Лукьяненко (Симферополь)
art-inf@yandex.ru

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ С ФУНКЦИЯМИ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Проблема применимости метода факторизации к решению двумерных краевых задач, в которых искомая аналитическая функция представима двумерным интегралом типа Коши сводится к поиску четырех искомых функций. Отказ от представимости двумерным интегралом типа Коши, позволяет выделить ряд двумерных задач, допускающих решение методом факторизации. О необходимости и важности этого направления указывает Ю. И. Черский [2, с. 296].

Работа является продолжением исследования данного направления [1]-[4]. В частности, рассмотрено двумерное интегральное уравнение специального вида

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{s\geq\lambda t}^{\infty} h(x-s, y-t)u(s,t)ds = g(x,y), \;\; y\in\mathbb{R}, \;\; x\geq\lambda y$$

и уравнение являющееся обобщением уравнения Винера-Хопфа.

К обобщенной двумерной задаче Карлемана для полосы

$$\begin{gathered} A(x,\xi)\Phi(x,\xi) - P(x,\xi) = R_1(x,\xi), \;\; (x,\xi)\in\mathbb{R}^2, \\ B(x,\xi)\Phi(x+i,\xi+i) - Q(x,\xi) = R_2(x,\xi). \end{gathered}$$

сводится двумерное интегральное уравнение типа плавного перехода. Алгоритмы решения таких задач являются частью первоначально предложенной Ю. И. Черским более широкой программы исследований функционально-дифференциально-интегральных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гахов Ф. Д.* Уравнения типа свертки / Ф.Д. Гахов, Ю.И. Черский. — М.: Наука, 1978. — 296 с.
2. *Черский Ю. И.* Метод сопряжения аналитических функций с приложениями / Ю.И. Черский, П.В. Керекеша, Д.П. Керекеша. — Одесса: Астропринт, 2010. — 552 с.
3. *Лукьяненко В. А.* Обобщенная задача Карлемана / В.А. Лукьяненко // Динамические системы. — 2005. — № 19. — С. 129–144.
4. *Лукъяненко В. А.* Интегральные уравнения и краевые задачи для функций от двух переменных / В.А. Лукьяненко // Динамические системы. — 2014. — № 1-2. — С. 143-152.

А. Н. Марковский (Краснодар)
mark@kubsu.ru

ПОЛНОТА СДВИГОВ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Системы сдвигов фундаментальных решений различных уравнений математической физики рассматривались в связи с построением проекционного метода решения соответствующих краевых задач [1]; такой подход в дальнейшем назывался – метод разложения по неортогональным функциям [2], метод базисных потенциалов [3] и в зарубежной литературе, метод фундаментальных решений.

Всякая такая система порождается сдвигами аргументов одной функции – фундаментального решения некоторого дифференциального оператора или некоторой его модификации. Сходимость алгоритмов метода обеспечивается полнотой рассматриваемых систем; получение достаточных условий полноты – условий на множество сдвигов, является известной проблемой теории функций.

Доказывается полнота сдвигов фундаментальных решений полигармонических уравнений в соответствующих полигармонических подпространствах. Приводится достаточное условие полноты и примеры нарушения этого условия.

Рассматривается пространство вещественно-аналитических функций суммируемых с квадратом в ограниченной области с гладкой границей и его разложение в прямую сумму полигармонических подпространств; некоторые частные случаи такого разложения рассматривались в [4,5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Купрадзе В. Д.* О приближенном решении задач математической физики // УМН, 22:2(134), 1967, С. 59–107.
2. *Алексидзе М. А.* Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. М.: Наука, 1978.
3. *Лежнев А. В., Лежнев В. Г.* Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики. Краснодар: КубГУ, 2009.
4. *Карачик В. В.* Об одном представлении аналитических функций гармоническими // Матем. тр., 10:2, 2007, С. 142–162.

5. *Рамазанов А.-Р. К.* Представление пространства полианалитических функций в виде прямой суммы ортогональных подпространств. Приложение к рациональным аппроксимациям // Матем. заметки, 66:5, 1999, С. 741–759.

А. Н. Марковский, С. Л. Смелков (Краснодар)
mark@kubsu.ru, serega.smelkov@yandex.ru

ВЫДЕЛЕНИЕ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Рассматривается алгоритм построения проекции заданной функции из $L_2(Q)$ на полигармоническое подпространство $G_m(Q)$. Обсуждается применение результатов к решению краевых задач полигармонического уравнения.

1. Пусть $Q \subset R^n$ $(n \geqslant 2)$ область ограниченная достаточно гладкой кривой $S = \partial Q$ и $Q^+ := R^n \backslash \overline{Q}$. Обозначим $E_{m,n}(x)$ – фундаментальное решение полигармонического (m-гармонического) уравнения $\Delta^m E_{m,n}(x) = \delta(x)$, $x \in R^n$ [1]. Рассмотрим

$$e_m = \left\{ f : f(x) = E_{m,n}(x-y), x \in Q, y \in Q^+ \right\}, \ m \geqslant 1,$$

– множество порожденное всевозможными сдвигами фундаментального решения. Обозначим $G_m(Q)$ замыкание e_m в норме $L_2(Q)$. Можно показать, что полигармонические подпространства $G_m(Q), (m = 1, 2, ...)$ ортогональны.

2. Пусть $x^{(k)}, (k = 1, 2, ...)$ – *базисная* [2] в Q^+ последовательность, обозначим

$$\gamma_{m,k}(x) = E_{m,n}(x^{(k)} - x), \ x \in Q, \ m = 1, 2, ...$$

Лемма 1. *Для любого $m \geqslant 2$ система функций $\gamma_{m,k}(x)$, $k = 1, 2, ...,$ полна и линейно независима в подпространстве $G_m(Q)$.*

Гармонический случай $(m = 1)$ рассмотрен в [2].

3. Пусть задана $f(x) \in L_2(Q)$ и требуется определить (приближенно) ее проекцию $g_m(x)$ на подпространство $G_m(Q)$. Обозначим $g_m^N(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \gamma_{m,k}(x)$, проекцию на подпространство, натянутое на $\gamma_{m,k}(x)$, $k = 1, 2, ..., N$, тогда $g_m(x) = g_m^N(x) + \rho_N(x)$, $\rho_N \perp \gamma_{m,k}$, $k = 1, 2, ..., N$, $\rho_N \to 0$ при $N \to \infty$. Коэффициенты c_k, $(k = 1, 2, ..., N)$ определяются минимизацией функционала

$$F(c_1, ..., c_N) = \left\| f(x) - g_m^N(x) \right\|.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.:Наука, 1974. – 808 с.

2. *Лежнев А. В., Лежнев В. Г.* Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики. Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 2009. – 111 с.

A. B. Morgulis (Rostov-na-Donu, Russia)
morgulisandrey@gmail.com

ANALYTICAL DYNAMICS AND THE BJERKNES BUOYANCY

The communication is focused on a peculiar phenomenon that arises in the dynamics of the system consisting of a fluid and a solid submerged into it. It turns out that the oscillating fluid is capable of exerting an averaged force on the solid. The experimental observation and theoretical treatments of such phenomena trace back to V.F.K. Bjerknes. Now the literature on the Bjerknes problem is enormous. It is clear that the nature of the Bjerknes effect is the same as that of the inverted pendulum. However this understanding had long not been formalized in the general theory. On the contrary, some very special shapes of bodies (round cylinders, balls, planes etc) and motions (flat and even one-dimensional) were considered. In the present communication, we discuss the geometrical setting of the problem in the context the Lagrange's analytical dynamics on a proper submanifold of the group of motions of Euclidian 3D space. Such setting leads to a simple but general treatment with no special constraints on the shape of the solid. As a bonus, we find 1-form on the configuration space whose exactness gives new characterization to the Euclidian ball.

И. В. Моршнева (Ростов-на-Дону)
morsh@math.sfedu.ru

О ВОЗНИКНОВЕНИИ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ БИНАРНОЙ СМЕСИ[1]

Рассматривается задача о возникновении конвективных течений в горизонтальном слое жидкости с примесью. Границы слоя предполагаются свободными, изотермическими, и концентрация примеси на каждой из них считается заданной. Уравнения движения имеют стационарное (основное) решение, соответствующее покоящейся смеси, в предположении, что градиенты температуры и концентрации постоянны и вертикальны. Известно, что, в отличие от случая чистой среды, в бинарной смеси возможны два вида неустойчивости основного решения — монотонная и колебательная.

Изучаются периодические по времени режимы, возникающие при колебательной потере устойчивости основного режима относительно плоских возмущений, периодических по однородной переменной. Уравнения возмущений имеют группу симметрии O(2), и применима теория бифуркации рождения циклов в системах с такой симметрией. В работах В.И. Юдовича и И.В. Моршневой показано, что

[1]Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (задание №1.1398.2014/K)

в случае общего положения при переходе параметра через критическое значение от равновесия могут ответвиться циклы, которым отвечают автоколебания двух типов: две бегущие навстречу друг другу волны, связанные инверсионной симметрией, и нелинейная смесь пары бегущих волн.

Для определения характера ветвления и устойчивости возникающих автоколебательных режимов в рассматриваемой задаче найдены аналитические выражения для коэффициентов уравнений разветвления. Показано, что и бегущие волны, и нелинейная смесь волн могут быть устойчивы в зависимости от значений параметров. Может происходить как сверхкритическое, так и докритическое ветвление автоколебаний. Для обоих типов автоколебательных режимов найдены первые два члена ряда по степеням параметра надкритичности.

Ф. Х. Мукминов (Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, Россия)
mfkh@rambler.ru

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕНОРМАЛИЗОВАННОГО РЕШЕНИЯ АНИЗОТРОПНОЙ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

В цилиндрической области $D^T = (0,T)\times\Omega, \Omega\subset R^n$ рассматривается первая смешанная задача для уравнения вида

$$(\beta(x,u))'_t = \mathrm{div} a(t,x,u,\nabla u) + b(t,x,u),\ a = (a_1, ..., a_n),$$

где $\beta(x,u)$ – неубывающая и непрерывная по u функция, измеримая по x. На функции $a_j(t,x,r,y)$ накладываются обычные условия (см., например, H.Redwane, 2008) в терминах пар сопряженных N-функций $B_j, \overline{B}_j$ – (без Δ_2-условия).

Определим анизотропное пространство Соболева-Орлича $\mathring{W}^1_{\mathbf{LB}}(D^T)$, как замыкание множества $C^1_0(D^T)$ в пространстве $\prod\limits_{i=1}^{n} L_{B_i}(D^T)$ относительно $*$-слабой топологии.

Пусть $\chi(P)$ обозначает логическую функцию, равную 1, когда P истинно, и 0, когда P ложно. Пусть $T_k(v) = \min(k, \max(-k, v))$. Будем использовать обозначение $[f] = \int\limits_{D^T} f(t,x)dxdt$.

Определение. *Ренормализованным решением первой смешанной задачи называется измеримая функция $u : D^T \to R$ такая, что:*
1) $\nabla T_k(u) \in \mathring{W}^1_{\mathbf{LB}}(D^T)$ *при всех* $k > 0$;
2) $\beta(x,u) \in L_1(D^T)$; $b(t,x,u) \in L_1(D^T)$, $\beta(x,u_0) \in L_1(\Omega)$; *функция* $A(t,x) = a(t,x,u,\nabla u)$ *удовлетворяет при всех* $k, N > 0$ *условиям:*
3) $[\chi(m \le |u| \le m+1)|A\cdot\nabla u|] \to 0$ *при* $m\to\infty$*;*
4) $[\chi(|u| \le k)|A(t,x)|\chi(m < |x| < m+1)] \to 0$ *при* $m \to \infty$.

5) При всех $h \in Lip_0(R),\ \xi \in C_0^1(D_{-1}^T)$ *выполнено равенство*
$[\xi_t \int\limits_{u_0}^{u} h(r)d\beta(x,r) + \xi f h(u)] = [A \cdot \nabla(h(u)\xi)].$

Теорема. *Пусть* $u_j,\ j = 1,2$ *– ренормализованные решения. Если* b *удовлетворяет условию* $b(t,x,u) - b(t,x,v) \le L(\beta(x,u) - \beta(x,v)),\ \forall u,v \in R,\ u > v$, *то* $\beta(x,u_1) = \beta(x,u_2)$ *почти всюду в* D^T.

A. B. Muravnik (Voronezh, Russia)
amuravnik@yandex.ru

ELLIPTIC DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS IF HALF-PLANE: ASYMPTOTIC BEHAVIOR

The prototype Dirichlet problem

$$u_{xx} + au_{xx}(x+h,y) + u_{yy} = 0,\ x \in (-\infty,+\infty),\ y \in (0,+\infty),$$
$$u\Big|_{y=0} = u_0(x),\ x \in (-\infty,+\infty),$$

where a and h are real parameters and u_0 is continuous and bounded, is considered under the assumption that $|a| < 1$.

The behavior of its classical solution

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x-\xi,y)u_0(\xi)d\xi,$$

where

$$\mathcal{E}(x,y) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-yG_1(\xi)} \cos\left[x\xi - yG_2(\xi)\right] d\xi,$$

$G_{\left\{ {1 \atop 2} \right\}}(\xi) = \xi\sqrt{\dfrac{\varphi(\xi) \pm a\cos h\xi \pm 1}{2}}$, and $\varphi(\xi) = \sqrt{2a\cos h\xi + a^2 + 1}$, is investigated.

We prove that $\lim\limits_{y\to+\infty}[u(x,y) - v(x,y)] = 0$ for any real x, where $v(x,y)$ is the classical bounded solution of the same Dirichlet problem (with the same boundary-value function u_0) for the equation $(a+1)u_{xx} + u_{yy} = 0$.

In particular, using the properties of the last Dirichlet problem established in [1], we deduce that if $x, l \in \mathbb{R}^1$, then $\lim\limits_{y\to+\infty} u(x,y) = l$ if and only if $\lim\limits_{R\to+\infty} \frac{1}{2R}\int\limits_{-R}^{R} u_0(x)dx = l$.

REFERENCES

1. *Denisov V. N. and Muravnik A. B.* On asymptotic behavior of solutions of the Dirichlet problem in half-space for linear and quasi-linear elliptic equations. // Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 9. P. 88–93.

П. В. Николенко (РГЭУ (РИНХ), Ростов-на-Дону)
petr.v.nikolenko@gmail.com

О НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ, СВЯЗАННЫХ С ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ В ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ

Рассмотриваются следующие задачи теории управления

$$J(x,u)=\int\limits_{t_0}^{0}(\alpha+\beta\|u\|^2)\,dt\to\min,$$
$$\dot{x}=v(x)+u,\quad ||u||\leqslant 1,$$
$$x(t_0)=x_0,\quad x(0)=0.$$

Здесь v: $R^2\to R^2$ — достаточно гладкое векторное поле на плоскости, обращающееся в нуль в начале координат $v(0)=0$. Управление u: $[t_0,0]\to R^2$ — вектор-функция, имеющая не более конечного числа точек разрыва первого рода, непрерывная справа, причем $\|u(t)\|=\sqrt{u_1^2(t)+u_2^2(t)}\leqslant 1$.

Изучаются экстремали Понтрягина указанных задач. Показано, что точки неоднозначности отсекают от экстремали неоптимальную часть. Приводится конструкция для вычисления множества неоднозначности. Доказано, что в регулярном случае экстремали, не имеющие точек неоднозначности, оптимальны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Николенко П. В.* О наискорейших перемещениях в поле скоростей // Диф. уравнения. 2011. № 5.

2. *Николенко П. В.* Множество неоднозначности и задача о наискорейших перемещениях в поле скоростей // Диф. уравнения. 2014. № 3.

Л. В. Новикова (Ростов-на-Дону)
lvnovikova@sfedu.ru

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим в банаховом пространстве U k раз ($k\leq 3$) непрерывно дифференцируемый по Фреше оператор $N_\delta:U\to U$, зависящий от вещественного параметра δ, считая отображение $\delta\to N_\delta x$ непрерывно дифференцируемым по δ для любого $x\in U$.

Пусть K — гладкое класса C_1, инвариантное многообразие оператора $N_\delta x$ (для любого $\delta \in R_1$). При этом касательное пространство T_x многообразие K переходит под действием производной Фреше $N'_\delta x$ оператора $N_\delta x$ в точке x в касательное пространство $TN_\delta x$ многообразия K в точке $N_\delta x$.

Предположим, что существует трансверсальное слоение $R_d x$ $(x \in K)$ к касательному слоению T_x $(x \in K)$, $(T_x \oplus R_\delta x = U)$, инвариантное относительно действия производной Фреше $N'_\delta(x)$ оператора $N_\delta : U \to U$ (так что $N'_\delta(x) R_\delta x \subset R_{N_\delta} x$).

Известно, что если

$$\left\| N'_\delta(x)\big|_{R_\delta x \to R_{N_\delta} x} \right\| < 1 \tag{1}$$

$$\left\| N'_\delta(x)\big|_{T_x \to R_{N_\delta} x} \right\| < \left\| N'_\delta(x)\big|_{R_\delta x \to R_{N_\delta} x} \right\| < 1 \tag{2}$$

(т.е., если скорость разбегания траекторий оператора N_δ на инвариантном многообразии K меньше, чем скорость сжатия оператора N_δ в направлении трансверсального слоения $R_d x$ $(x \in K)$, то в случае компактности инвариантного многообразия K оператора N_δ оно обладает свойством асимптотической устойчивости).

Исследуется случай потери устойчивости инвариантного многообразия K оператора N_δ через критическое значение $\delta = \delta_0$, когда неравенства (1) и (2) заменяются при $\delta = \delta_0$ равенствами.

М. В. Норкин (Ростов-на-Дону)
norkinmi@mail.ru

ДВА ТИПА КАВИТАЦИОННЫХ ЗОН В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ УДАРА[1]

Рассматривается задача об ударе и последующем движении с постоянной скоростью кругового цилиндра под свободной поверхностью идеальной, несжимаемой, тяжелой жидкости. Показывается, что на малых временах, наряду с кавитационной зоной, вызванной ударом, могут возникнуть дополнительные кавитационные зоны, обусловленные законом движения цилиндра после удара и физическими параметрами задачи. В случае полного погружения цилиндра, кавитационные зоны, вызванные ударом, образуются практически всегда. Появление дополнительных зон отрыва зависит уже от конкретной физической ситуации. Для определения дополнительных кавитационных зон на малых временах формулируется задача с односторонними ограничениями, аналогичная классической задаче об ударе с отрывом. Приведен численный пример, показывающий возможность образования трех кавитационных зон вблизи границы плавающего тела – основной, вызванной

[1]Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (Задание №1.1398.2014/k).

ударом и двух дополнительных. Сделан вывод о том, что на малых временах возмущения дополнительных свободных границ весьма незначительны и практически не влияют на картину течения жидкости. Однако они оказывают существенное влияние на реакцию жидкости на тело. Аналогичные задачи без учета дополнительных кавитационных зон рассматривались в работах [1–3]. В них определялась форма каверны на малых временах с учетом динамики точек отрыва внутреннней свободной границы жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Norkin M. V., Korobkin A. A.* The motion of the free-surface separation point during the initial stage of horizontal impulsive displacement of a floating circular cylinder //J. Engng. Math. 2011. V. 70. P. 239–254.

2. *Норкин М. В.* Движение кругового цилиндра в жидкости после удара на малых временах с образованием каверны// Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 3. С. 101–112.

3. *Норкин М. В.* Динамика внутренней свободной границы жидкости на малых временах при вертикальном ударе кругового цилиндра, полностью погруженного в жидкость// Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2015. №1. С. 30–35.

С. Н Овчинникова (Ростов на Дону)
ovch.09@mail.ru

РЕЗОНАНСНЫЕ РЕЖИМЫ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ БИФУРКАЦИИ КОРАЗМЕРНОСТИ 2 (РЕЗОНАНС RES 2) В ЗАДАЧЕ КУЭТТА-ТЕЙЛОРА

Система уравнений Навье-Стокса, описывающая течение вязкой несжимаемой жидкости между бесконечно длинными соосными вращающимися цилиндрами, обладает цилиндрической симметрией и зависит от нескольких вещественных параметров. При любых значениях параметров у системы есть точное решение — течение Куэтта. Оно теряет устойчивость, когда линеаризованная на течении Куэтта система Навье-Стокса имеет ненулевые решения (нейтральные моды). У линеаризованной задачи существуют критические значения параметров (точки бифуркации высоких коразмерностей), которым отвечает более двух независимых нейтральных мод. При околокритических параметрах взаимодействие нейтральных мод описывается с помощью нелинейной системы амплитудных уравнений на центральном многообразии. Для невращательно симметричных решений найдено шесть типов точек бифуркации коразмерности 2 (резонансы Res 0—Res 5), которым отвечают невырожденные амплитудные системы, отличающиеся друг от друга разными дополнительными резонансными слагаемыми.

Появление точек резонансов, кроме Res 0 и Res 1, зависит от направлении вращения цилиндров. Точки Res 2 найдены при вращении цилиндров в противоположные стороны. В их малой окрестности могут существовать решения амплитудных систем, находящиеся на инвариантных подпространствах пространства амплитуд, которым отвечают резонансные режимы системы Навье-Стокса: m-спирали, чисто азимутальные и три семейства нестационарных азимутальных m-волн. Проведен численный анализ условий существования и устойчивости таких решений с помощью рассчитаных коэффициентов соответствующих амплитудных систем.

S. S. Orlov (Irkutsk), L. A. Grunwald (Shelekhov)
orlov_sergey@inbox.ru, lfb_o@yahoo.co.uk

ABEL TYPE EQUATION WITH DEGENERATION IN BANACH SPACES [1]

Suppose E_1, E_2 are real Banach spaces, and $u = u(t)$, $f = f(t)$ are the functions of nonnegative real argument t and with values in E_1 and E_2 respectively. Let us consider the integral equation

$$Bu(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} Au(s)ds = f(t),\ t \geq 0, \tag{1}$$

where B and A are closed linear operators from E_1 to E_2 such that their domains are dense in E_1, and $D(B) \subseteq D(A)$; then $\Gamma(\alpha)$ is gamma function of $0 < \alpha < 1$. It is assumed that the operator B is Fredholm, i. e. $\overline{R(B)} = R(B)$ and $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n < +\infty$. Thus, the equation has two distinctive features, which are irreversible operator in the main part and a weak singularity of the integral term.

A function $u \in \mathcal{C}(t \geq 0;\, E_1)$ that satisfies integral equation (1) is called a *classical solution* of this equation. As well known, degenerated integral equations have classical solutions not for all operator coefficients, integral kernels and source terms (see, for example, the monograph [1]). The aim of this research is to obtain the conditions of unique solvability of considered problem. The following theorem is proved.

Theorem. *Suppose that the operator B has a full A-Jordan set [1] and $\langle f(t),\, \psi_i^{(j)} \rangle \in C^{[\alpha(p_i-j+1)]+1}(t \geq 0)$, $j = 1, \ldots, p_i$, $i = 1, \ldots, n$. If*

$$\langle f(t),\, \psi_i^{(j)} \rangle^{(k-1)} \Big|_{t=0} = 0,\ k = \overline{1,\, [\alpha(p_i - j + 1)] + 1},\ j = \overline{1,\, p_i},\ i = \overline{1,\, n},$$

then integral equation (1) has a unique classical solution. Here elements $\psi_i^{(j)} \in E_2^*$ form an A^*-Jordan set of operator B^*; natural numbers p_i are lenghts of corresponding A^*-Jordan chains; and $[\cdot]$ denote floor function.

REFERENCES

1. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M.* Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.

[1]The reported study was funded by Russian Foundation for Basic Research according to the research project No. 16-31-00291 m.s_p.

B. A. Plamenevskii, O. V. Sarafanov (Saint-Petersburg)
o.sarafanov@spbu.ru

A METHOD FOR COMPUTING WAVEGUIDE SCATTERING MATRICES

A waveguide G lies in $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, and outside a large ball coincides with the union of finitely many non-overlapping semi-cylinders ("cylindrical ends"). The waveguide is described by the operator $\{L(x, D_x) - \mu, B(x, D_x)\}$ of an elliptic boundary value problem in G, where L is a matrix differential operator, B is a boundary operator, and μ is a spectral parameter. The operator $\{L, B\}$ is self-adjoint with respect to a Green formula. The role of L can be played, e.g., by the Helmholtz operator, by the operators in elasticity theory and hydrodynamics. As approximation for a row of the scattering matrix $S(\mu)$, we take the minimizer of a quadratic functional $J_R(\cdot, \mu)$. To construct the functional, we solve an auxiliary boundary value problem in the bounded domain obtained by truncating the cylindrical ends of the waveguide at distance R. As $R \to \infty$, the minimizer $a(R, \mu)$ tends with exponential rate to the corresponding row of the scattering matrix uniformly on every finite closed interval of the continuous spectrum not containing the thresholds. Such an interval may contain eigenvalues of the waveguide with eigenfunctions exponentially decaying at infinity ("trapped modes"). Eigenvalues of this sort, as a rule, occur in waveguides of complicated geometry. Therefore, in applications, the possibility to avoid worrying about (probably not detected) trapped modes turns out to be an important advantage of the method.

REFERENCES

1. *Plamenevskii B. A., Sarafanov O. V.* On a method for computing waveguide scattering matrices // Algebra i Analiz. 2011, V. 23, № 1. P. 200–231 (Russian); English translation: St. Petersburg Math. J. 2012 23, V. 23, № 1. P. 139–160.
2. *Plamenevskii B. A., Sarafanov O. V.* On a method for computing waveguide scattering matrices in the presence of point spectrum // Functional Analysis and Its Applications. 2014, V. 48, № 1, P. 61–72 (Russian); English translation: Functional Analysis and Its Applications. 2014, V. 48, № 1, P. 49–58.
3. *Plamenevskii B. A., Poretckii A. S., Sarafanov O. V.* Method for computing waveguide scattering matrices in vicinity of tresholds, Algebra i Analiz. 2014. V. 26, № 1, P. 128–164 (Russian); English translation: St.Petersburg Math. J. 2015. V. 26, № 1, P. 91–116.

С. П. Плышевская (Симферополь)
splyshevskaya@mail.ru

МЕТАУСТОЙЧИВЫЕ СТРУКТУРЫ СКАЛЯРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

На отрезке $0 \le x \le \pi$ рассматривается параболическое уравнение:

$$\begin{aligned} &u_t = \mu^2 u_{xx} + u - u^3, \quad t > 0, \\ &u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где μ - положительный параметр.

Медленно меняющиеся решения называются метаустойчивыми структурами.

Фундаментальные результаты по исследованию метаустойчивых структур уравнения (1) при малых значениях параметра μ получены в работах [1, 2]. Для исследования задачи о сценариях возникновения и динамики при уменьшении параметра μ метаустойчивых структур уравнения (1) нами использовался метод Галёркина [3].

В галёркинских аппроксимациях уравнения (1) размерностей от 30 до 40 реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций. Непрерывным ветвям стационарных точек систем обыкновенных дифференциальных уравнений, рожденных в результате седло-узловых бифуркаций, отвечают непрерывные ветви приближенных стационарных решений (1). В работе [3] показано, что эти приближённые решения при малых значениях параметра μ, взятые в качестве начальных функций, приводят к метаустойчивым структурам.

Установлено, что для решения исходной задачи при значениях параметра $\mu \approx 0.01$ применение метода Галёркина приводит к качественно и количественно правильным результатам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carr J., Pego R. L.* Metastable Patterns in Solution of $u_t = \mu^2 u_{xx} - f(u)$ // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1989. Vol. XLII. P. 523–576.

2. *Fusco G., Hale J. K.* Slow-Motion Manifolds, Dormant Instability, and Singulary Perturbations // Journal of Dynamics and Differential Equations. 1989. Vol. I, № 1. P. 75–94.

3. *Белан Е. П., Плышевская С. П.* Метаустойчивые структуры скалярного уравнения Гинзбурга-Ландау // Динамические системы. 2014. Т. 4(32), № 1-2. С. 27–42.

K. B. Sabitov (Sterlitamak, Russia)
sabitov_fmf@mail.ru

THE INVERSE PROBLEMS OF FINDING THE FACTOR ON THE RIGHT SIDE OF THE EQUATION PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE, WHICH DEPENDS ON THE SPATIAL VARIABLE[1]

Consider the equation of the mixed parabolic-hyperbolic type

$$Lu(x,t) = F(x,t) = \begin{cases} f_1(x)g_1(t), & t > 0, \\ f_2(x)g_2(t), & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

here

$$Lu(x,t) = \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + b^2 u, & t < 0, \end{cases}$$

[1]The work was supported by RFBR project-Volga (project 14-01-97003).

in the rectangular domain $D = \{(x,t)|\, 0 < x < l,\ -\alpha < t < \beta\}$, where $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $l > 0$, $b \geq 0$ are given real numbers; $g_1(t)$ and $g_2(t)$ are given at least continuous functions.

In the case when $f_1(x) \equiv f_2(x) = f(x)$ is put

Problem 1. *In the domain D find the functions $u(x,t)$ and $f(x)$ satisfying the following conditions:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_-) \cap C_x^2(D_+); \tag{2}$$

$$f(x) \in C(0,l) \cap L_2(0,l); \tag{3}$$

$$Lu(x,t) \equiv F(x,t),\ \ (x,t) \in D_- \cup D_+; \tag{4}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ \ -\alpha \leq t \leq \beta; \tag{5}$$

$$u(x,-\alpha) = \varphi(x),\ \ u_t(x,-\alpha) = \psi(x),\ \ 0 \leq x \leq l, \tag{6}$$

where $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are given sufficiently smooth functions, $D_- = D \cap \{t < 0\}$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$.

At different $f_1(x)$ and $f_2(x)$ is assumed

Problem 2. *In the domain D find the functions $u(x,t)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, satisfying the conditions* (2), (4) – (6) *and besides*

$$f_i(x) \in C(0,l) \cap L_2[0,l],\ \ i = 1,2;$$

$$u(x,\beta) = g(x),\ \ 0 \leq x \leq l,$$

which also $\varphi(x)$, $\psi(x)$ and $g(x)$ are known functions.

Note that the problem 1 and 2 of us [1–3] have been studied under $g_1(t) = g_2(t) \not\equiv 1$. The presence of these features creates additional difficulties and making a significant contribution in justifying the correctness of tasks.

The report will be presented the results of the problem 1. Here a criterion for uniqueness of the solution. The unknown function $u(x,t)$ and $f(x)$ are found as the sum of orthogonal series. In justifying the uniform convergence of the series there is a problem of small denominators.

Note that these problems arise in the study of the propagation of electrical oscillations in complex composite lines.

REFERENCES

1. *Sabitov K. B., Safin E. M.* Inverse problem for a parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain // Doklady Mathematics. 2009. Vol. 80, № 3. P. 856–859.

2. *Sabitov K. B., Safin E. M.* The inverse problem for a mixed-type parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain // Russian Mathematics. 2010. Vol. 54, № 4. P. 48–54.

3. *Sabitov K. B., Safin E. M.* The inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type // Mathematical Notes. 2010. T. 87, № 5. P. 880–889.

Yu. K. Sabitova (Sterlitamak, Russia)
sabitovauk@rambler.ru

THE DIRICHLET PROBLEM FOR CABLE EQUATION [1]

We consider the cable equation

$$Lu \equiv u_{xx} - u_{yy} - b^2 u = 0, \tag{1}$$

where $b = \text{const} > 0$, in the rectangular domain $D = \{(x, y) |\, 0 < x < l,\ 0 < y < T\}$. For equation (1) in domain D we pose the following problem.

Problem of Dirichlet. *In the domain D, find the function $u(x, y)$ satisfying the following conditions:*

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D); \tag{2}$$

$$Lu \equiv 0, \quad (x, y) \in D; \tag{3}$$

$$u(0, y) = u(l, y) = 0, \ \ 0 \le y \le T; \tag{4}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \ \ u(x, T) = \psi(x), \ \ 0 \le x \le l, \tag{5}$$

where $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are given sufficiently smooth functions satisfying the conditions $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

In this paper, using ideas from [1, 2], we establish a criterion for uniqueness of the solution of problem (2) – (5). The solution of the problem is constructed in the form of the sum of a number of Fourier. Small denominators are appeared in process of proving existence of the solution of the problem. The estimates about a remoteness from zero denominators are established with the corresponding assymptotics which allowed to prove existence of the decision in a class of regular decisions and prove its stability depending on boundary functions

REFERENCES

1. *Sabitov K. B.* Dirichlet problem for the differential equations in private derivatives // Mathematical Notes. 2015. T. 97, № 2. P. 262–276.

2. *Sabitov K. B.* Dirichlet problem for mixed-type equations in a rectangular domain // Dokl. Ross. Akad. Nauk. 2007. T. 413, № 1. P. 23–26.

[1] The work was supported by RFBR project-Volga (project 14-01-97003).

Р. М. Сафина (Казань)
rimma77705@mail.ru

ЗАДАЧА КЕЛДЫША ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИЛЬНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ И СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ[1]

Рассмотрим уравнение смешанного типа второго рода с сингулярным коэффициентом

$$Lu \equiv u_{xx} + (\mathrm{sgny})|y|^m u_{yy} + \frac{k}{x}u_x - a^2 u = 0 \qquad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y)|0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, где $k \geq 1$, $1 < m < 2$, l, $a \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные числа.

Задача Келдыша. *В области D найти решение уравнения (1), непрерывное в $\overline{D}$, имеющее непрерывные частные производные второго порядка в $D^+ \cup D^-$, удовлетворяющее граничным условиям $u(x, \beta) = \varphi(x), u(x, -\alpha) = \psi(x), 0 \leq x \leq l$; $u(l, y) = 0, -\alpha \leq y \leq \beta$, и условиям сопряжения*

$$\lim_{y \to 0+0} y^{m-1} u_y(x, y) = - \lim_{y \to 0-0} (-y)^{m-1} u_y(x, y), 0 < x < l,$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – достаточно гладкие функции, $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = = \psi(l) = 0$, $D^+ = D \cap \{y > 0\}$, $D^- = D \cap \{y < 0\}$.

Отметим, что первая граничная задача для уравнения смешанного типа в второго рода (1) при $k = 0$ методом спектральных разложений исследована в работе [1]. В работе [2] изучена задача Келдыша для уравнения (1) при всех $k \geq 1$ и $0 < m < 1$.

В данной работе установлен критерий единственности решения задачи Келдыша при всех $k \geq 1$ и $1 < m < 2$. Решение построено в виде суммы ряда Фурье-Бесселя и приведено обоснование сходимости ряда в классе регулярных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сабитов К. Б., Сулейманова А. Х.* Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области // Известия вузов. Математика. 2007. № 4. С. 45–53.

2. *Сафина Р. М.* Задача Келдыша для уравнения смешанного типа второго рода с оператором Бесселя // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 10. С. 1354–1366.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-31-50008).

Л. В. Сахарова (Ростов-на-Дону)
L_Sakharova@mail.ru

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ ДЛЯ ИСПАРЕНИЯ КАПЛИ ЖИДКОСТИ

Рассмотрена асимптотическая модель высыхания невязкой, нетемпературопроводной капли, полученая осреднением приближения Обербека- Буссинеска по тонкому слою испаряющейся жидкости:

$$h_t + div(h^2 s) = -V_0\varphi; \tag{1}$$

$$s_t + (\beta_r - 1)hs div s + (\beta_r - 1)hs\nabla s = 0; \tag{2}$$

$$\varphi_t + (\beta_r - 1)h\varphi div s + (\beta_r - 1)hs\nabla\varphi = 0; \tag{3}$$

$$c_t + hs\nabla c = D\triangle c, \tag{4}$$

где h — толщина слоя жидкости, $s = (s_1, s_2)$, φ, c — осредненные функции поля скоростей жидкости, потока тепла и концентрации твердой примеси.

Для задачи (1)– (4) построены различные типы автомодельных замен, понижающих размерность задачи и сводящей ее к системе, зависящей от двух переменных. Так, установлено, автомодельной для рассматриваемой задачи является следующая замена переменных: $x/\sqrt{t} = z$, где t — время, $x = (x_1, x_2)$ — пространственные переменные, $z = (z_1, z_2)$ — новые переменные; новые неизвестные функции $u = (u_1, u_2)$ и v связаны со старыми посредством формул:

$$s = u/\sqrt{t}, \qquad \varphi = v/t; \tag{5}$$

$$h = u/\sqrt{t}, \qquad \varphi = v/\sqrt{t^3}; \tag{6}$$

$$h = tu, \qquad s = v/\sqrt{t^3}, \tag{7}$$

где z, $u = (u_1, u_2)$ и v — новые фунции. Установлено, что полученные в результате замен (5)– (7) задачи могут быть решены как численными, так и аналитическим методами на характеристиках. Осуществлен анализ полученных решений, определена их область применимости с точки зрения физической постановки соответстующих краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуков М. Ю.* Моделирование испарения капли жидкости: монография / М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева, Н. М. Полякова ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2015. – 208 с.

Л. И. Сербина (Ставропольский государственный педагогический институт, Россия)
Lserbina@mail.ru

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА.

Исследование краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений является одним из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Потребность в изучении нагруженных уравнений объясняется как теоретической значимостью полученных результатов, так и наличием их в практических приложениях решения проблем нелинейной динамики.

В данной работе рассматриваются вопросы постановки и исследования однозначной разрешимости нелокальной краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка параболического типа, нагруженная часть которого представляет собой нелокальное интегральное значение искомой функции на границе области его задания. Следует отметить, что при этом наличие нагруженного оператора не позволяет непосредственно применить для их разрешимости известную теорию краевых задач. Методом эквивалентной редукции к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения найдены условия гарантирующие единственность и существование исследуемой краевой задачи.

Обращено внимание, что исследованная краевая задача для уравнений данного типа естественно возникает в задачах долгосрочного прогнозирования и регулирования режима грунтовых вод с аномальными свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сербина Л. И.* Об одной проблеме для линеаризованного уравнения Буссинеско с нелокальным условием Самарского. Дифференциальные уравнения. 2002 Т. 38, № 8. С. 1113–1119.

2. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применение. МОСКВА, НАУКА. 2012.

S. N. Sidorov (Sterlitamak, Russia)
stsid@mail.ru

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE NON-HOMOGENEOUS EQUATION OF MIXED PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE WITH DEGENERATE HYPERBOLIC PART[1]

Consider the equation of mixed type

[1]The work was supported by RFBR project-Volga (project 14-01-97003).

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u = F_1(x,t), & t > 0, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b^2(-t)^m u = F_2(x,t), & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

in the rectangular domain $D = \{(x,t)|\, 0 < x < l,\ -\alpha < t < \beta\}$, where $m > 0$, $b \geq 0$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ are given real numbers, $F_i(x,t)$, $i = 1, 2$, are known functions and we pose the following problem.

Problem. *In the domain D find the function $u(x,t)$ satisfying the following conditions: $u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^1_x(\overline{D}) \cap C^2_x(D_+) \cap C^2(D_-)$; $Lu(x,t) = F_i(x,t)$, $i = 1, 2$, $(x,t) \in D_- \cup D_+$; $u(0,t) = h_1(t)$, $u(l,t) = h_2(t)$, $-\alpha \leq t \leq \beta$; $u(x,-\alpha) = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq l$, where $F_1(x,t)$, $F_2(x,t)$, $\varphi(x)$, $h_1(t)$ and $h_2(t)$ are given sufficiently smooth functions satisfying the conditions $h_1(-\alpha) = \varphi(0)$, $h_2(-\alpha) = \varphi(l)$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$.*

Note that the initial-boundary problem and the problem with a nonlocal boundary condition $u(x,-\alpha) - u(x,\beta) = \psi(x)$, $0 \leq x \leq 1$, for equation (1) at $F_i(x,t) \equiv 0$, $h_i(t) \equiv 0$, $i = 1, 2$, $l = 1$, in the rectangular domain D has been studied in the papers [1] and [2].

In this paper we find necessary and sufficient conditions for the uniqueness of the solution of the inverse problem. The solution is built in the form of a series in eigenfunctions of the corresponding one-dimensional spectral problem. In justifying the uniform convergence of the problem of small denominators.

R E F E R E N C E S

1. *Sabitov K. B., Rakhmanova L. Kh.* Initial-boundary value problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type in a rectangular domain // Differential Equations. 2008. Vol. 44, № 9. P. 1218–1224.

2. *Sabitov K. B., Sidorov S. N.* On a nonlocal problem for a degenerating parabolic-hyperbolic equation // Differential Equations. 2014. Vol. 50, № 3. P. 352–361.

A. S. Skaliukh (Rostov on Don, Russia)
a.s.skaliukh@gmail.com

CONSTITUTIVE RELATIONS IN THE FORM OF HYSTERESIS OPERATORS FOR POLYCRYSTALLINE FERROELASTIC MATERIALS

Here was built a mathematical model describing the nonlinear strain processes in polycrystalline ferroelastic materials that is fundamentally differed from the generally accepted in the linear theory of elasticity Hooke model. In ferroelastic materials, as well as in the theory of plasticity, between the stress and the strain is observed a nonlinear relation of hysteresis type. For their description we took into account the internal structure of material and used some physical principles, which allowed building the operator equations of hysteresis type in differentials. One of main part this theory was related with determination of location ferroelastic domains in a representative volume. Their allocation with using a statistical approach was able to describe by the function of density distribution exponential type. Created nonlinear model has several parameters that have a definite physical meaning. Unlike the linear models where by experiment enough find a few physical constants, here it is necessary to compare the experimental and calculated curves of the nonlinear behavior which is determined by the specified values of parameters. Although the additional task of choosing the model parameters is an incorrect coefficient problem, in general, this problem can be solved by a series of numerical experiments. For this purpose, the equations reduce to a system of six ordinary first order differential equations [1], for which was employed the numerical method of Runge-Kutta 4th order. It is shown that for each type of ceramics you can choose a specific set of parameters for which the hysteresis curves are coincide not only qualitatively but also quantitatively.

REFERENCES

1. *Belokon A. V., Skaliukh A. S.* Mathematical modeling of irreversible processes of polarization. M .: FIZMATLIT, 2010.

А. М. Столяр (Ростов-на-Дону)
ajoiner@mail.ru

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

В работе рассматривается широкий класс задач статики и динамики упругих и упругопластических узких цилиндрических панелей/пластин и сферических оболочек: асимптотическое интегрирование линейных и нелинейных уравнений математической физики, описывающих изгиб и колебания узких изотропных и ортотропных панелей и оболочек, а также численное интегрирование данных задач с учетом пластичности материала [1]. Асимптотическое интегрирование линейных и нелинейных уравнений типа Кармана [1] проводится при помощи метода малого параметра совместно с методом пограничного слоя. Решение строится в виде рядов по степеням малого параметра. В качестве малого параметра принимается отношение длин смежных сторон панели. Коэффициенты первого ряда определяются в ходе первого итерационного процесса подстановкой этого ряда в уравнения, начальные и граничные условия. Находятся главные члены разложения, которые удовлетворяют уравнениям меньшей размерности по пространственным переменным, описывающим изгиб или колебания соответствующих оболочечных элементов. Для определения последующих членов асимптотики необходимо решать линейные бигармонические уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты второго ряда — функции пограничного слоя. Для исследования поведения упругопластических панелей и оболочек применяются модифицированные соотношения деформационной теории пластичности и алгоритм расчета, учитывающий так называемые повторное и переменное упрочнение. Приводятся результаты численных расчетов, позволяющие оценить пределы применимости асимптотики для упругих и неупругих оболочечных элементов.

Method of asymptotic integration in connection with boundary layer method are applied to some linear and non-linear narrow shells problems. Numerical integration is carried out in order to evaluate the asymptotic results and to consider the elastic-plastic shells behavior.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Столяр А. М.* Поведение узких панелей и сферических оболочек в условиях статического и динамического нагружения. Асимптотический и численный анализ. Ростов-на-Дону, 2014.

M. A. Sumbatyan, V. V. Popuzin, A. E. Tarasov
(SFEDU, Rostov-on-Don, Russia)
sumbat@math.sfedu.ru

DUAL INTEGRAL EQUATION FOR THE HARMONICALLY OSCILLATING WING [1]

In the linearized stationary 3d theory of wing in a flow of non-viscous incompressible fluid there is known the basic dual integral equation [1]:

$$\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\left[\frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}+1\right]\frac{\gamma(\xi,\eta)}{(\eta-y)^2}\,d\xi d\eta=f(x,y),\ \ \begin{pmatrix}|x|<b\\|y|<L\end{pmatrix}. \qquad (1)$$

The kernel is hyper-singular over variable y [2]. It is proved that, when constructing a numerical method, a discrete scheme along variable η may be taken with a simple quadrature formula, like for continuous functions [1,3]. After that, the arising one-dimensional kernel possesses the standard Cauchy-type singular behavior along variable ξ, where one can take a special quadrature formula with interplaced nodes for internal variable ξ and external one x [1].

In the present work for the harmonically oscillating wing we study the following equation allied to equation (1):

[1] The work is performed under financial support of the Russian Ministry for Education and Science, Project 9.1371.2014/K.

$$\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L} K(\xi - x, \eta - y)\,\gamma(\xi,\eta)\,d\xi d\eta = f(x,y), \qquad \begin{pmatrix} |x|<b \\ |y|<L \end{pmatrix},$$
$$K(\xi,\eta) = -\pi e^{-i\nu\xi} I_1(\eta) + I_2(\xi,\eta), \quad I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\beta^2+\nu^2}\, e^{i\beta\eta} d\beta, \tag{2}$$
$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha\xi} d\alpha}{i(\alpha+\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\beta^2+\alpha^2}\, e^{i\beta\eta} d\beta,$$

It is proved that its kernel possesses the same qualitative properties like in (1). We propose a special numerical method, to solve equation (2).

REFERENCES

1. *S. M. Belotserkovsky, I. K. Lifanov.* Method of Discrete Vortices. CRC Press: Boca Raton, Florida, 1992.
2. *S. G. Samko.* Hypersingular Integrals and Their Applications. CRC Press: Boca Raton, Florida. 2002.
3. *M. A. Sumbatyan, A. Scalia.* Equations of Mathematical Diffraction Theory. CRC Press: Boca Raton, Florida. 2005.

T. A. Suslina (St. Petersburg, Russia)
t.suslina@spbu.ru

SPECTRAL APPROACH TO HOMOGENIZATION OF NONSTATIONARY SCHRÖDINGER-TYPE EQUATIONS

In $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, we consider a selfadjoint strongly elliptic operator A_ε, $\varepsilon > 0$, given by the differential expression $b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) b(\mathbf{D})$. Here $g(\mathbf{x})$ is a periodic bounded and positive definite matrix-valued function, and $b(\mathbf{D})$ is a first order differential operator. We study the behavior of the operator e^{-itA_ε}, $t \in \mathbb{R}$, for small ε. It is proved that, as $\varepsilon \to 0$, e^{-itA_ε} converges to e^{-itA^0} in the norm of operators acting from the Sobolev space $H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ (with a suitable s) to $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Here $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ is the effective operator. In [1], the following sharp order error estimate was obtained:

$$\|e^{-itA_\varepsilon} - e^{-itA^0}\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le (C_1 + C_2|t|)\varepsilon. \tag{1}$$

Also, by interpolation, $\|e^{-itA_\varepsilon} - e^{-itA^0}\|_{H^s\to L_2} = O(\varepsilon^{s/3})$ for $0 \le s \le 3$.

Now we obtain more subtle results [2]. From one hand, we confirm that (1) is sharp: in the general case the estimate $\|e^{-itA_\varepsilon} - e^{-itA^0}\|_{H^s\to L_2} = O(\varepsilon)$ is not true if $s < 3$. The supporting examples are given.

From the other hand, we distinguish conditions on the operator under which the result can be improved:

$$\|e^{-itA_\varepsilon} - e^{-itA^0}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2|t|)\varepsilon,$$

and then also $\|e^{-itA_\varepsilon} - e^{-itA^0}\|_{H^s\to L_2} = O(\varepsilon^{s/2})$ for $0 \le s \le 2$. In particular, this is the case for the scalar elliptic operator $A_\varepsilon = -\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla$, where the matrix $g(\mathbf{x})$ has real entries.

The results are applied to study the behavior of the solution $u_\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ of the Cauchy problem for the Schrödinger-type equation $i\partial_t u_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = (A_\varepsilon u_\varepsilon)(\mathbf{x}, t)$. Applications to the Schrödinger equation and the two-dimensional Pauli equation with singular rapidly oscillating potentials are given. The method is based on the scaling transformation, the Floquet-Bloch theory and the analytic perturbation theory.

REFERENCES

1. *Birman M. Sh., Suslina T. A.* Operator error estimates in the homogenization problem for nonstationary periodic equations. // St. Petersburg Mathematical Journal. 2009. Vol. 20. No. 6. P. 873–928.

2. *Suslina T. A.* Homogenization of nonstationary Schrödinger type equations with periodic coefficients. Preprint. 2015. Available from http://arxiv.org/abs/1508.07641

Ю. А. Хазова (Симферополь)
hazova.yuliya@hotmail.com

МЕТАУСТОЙЧИВЫЕ СТРУКТУРЫ В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

На окружности рассматривается параболическая задача с преобразованием отражения

$$v_t + Lv = \Lambda\frac{1}{2!}ctg\omega \cdot Qv^2 - \Lambda\frac{1}{3!} \cdot Qv^3, \tag{1}$$

где $L = L(D) = 1 - D\triangle - \Lambda Q$, $Qv(\varphi, t) = v(\pi - \varphi, t)$.

Для нахождения решений уравнения (1) строится галеркинская аппроксимация в виде

$$v = \sum_{s=0}^{N} z_s \cos s\varphi + \sum_{k=1}^{N} z_{k+N} \sin k\varphi, \tag{2}$$

которая приводит уравнение (1) к системе

$$\begin{gathered} \dot{z}_s = -\lambda_s^c z_s + g_s(z), \quad s = \overline{0, N}, \\ \dot{z}_{k+N} = -\lambda_k^s z_{k+N} + g_{k+N}(z), \quad k = \overline{1, N}, \end{gathered} \tag{3}$$

где $\lambda_s^c = 1 + s^2 D - (-1)^s\Lambda$, $\lambda_k^s = 1 + k^2 D - (-1)^{k+1}\Lambda$.

Непрерывным ветвям стационарных точек системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3), рожденных в результате седло-узловых бифуркаций, отвечают непрерывные ветви приближенных стационарных решений (1). Эти ветви приближенных стационарных решений типа внутреннего переходного слоя в исходной задаче порождают метаустойчивые структуры.

В работе [1] исследовались решения уравнения (1) в случае $\cos\omega = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белан Е. П., Хазова Ю. А.* Динамика стационарных структур в параболической задаче на окружности с отражением пространственной переменной // Динамические системы. 2014. Т. 4. С. 43–57.

E. L. Shishkina (Voronezh)
ilina_dico@mail.ru

THE FUNDAMENTAL IDENTITY FOR ITERATED WEIGHTED SPHERICAL MEAN

Let $R_n^+=\{x=(x_1,...,x_n)\in R_n: x_1>0,...,x_n>0\}$, $f\in C(R_n^+)$, multi-index $\gamma=(\gamma_1,...,\gamma_n)$ consists of positive numbers $\gamma_i>0$, $|\gamma|=\gamma_1+...+\gamma_n$ and $S_r^+(n)=\{x\in R_n^+:|x|=r\}$.

Weighted spherical mean of function f has the form

$$M_\gamma^r[f(x)]=\frac{1}{\omega_n^\gamma}\int\limits_{S_1^+(n)} T_x^{ry}f(x)y^\gamma dS_y,\;\; y^\gamma=\prod_{i=1}^n y_i^{\gamma_i}, \omega_n^\gamma=\frac{\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{2n}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)},$$

where T_x^y is multidimensional generalized translation (see [1]). Let us define the *iterated weighted spherical mean* $M_\gamma(x,\lambda,\mu)$ by the following formula

$$M_\gamma(x,\lambda,\mu)=M_\gamma^\lambda M_\gamma^\mu[f(x)].$$

The fundamental identity for the iterated weighted spherical mean is valid

$$M_\gamma(x,t,\mu)=\frac{2^{-n}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)}\frac{1}{(2t\mu)^{n+|\gamma|-2}}\times$$

$$\times\int\limits_{|t-\mu|}^{t+\mu}\left[(t^2-(r-\mu)^2)((r+\mu)^2-t^2)\right]^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}} M_\gamma^r[f(x)]rdr. \tag{1}$$

If $\widehat{F}$ is a function with support inside the set $B_{2t}^+(n)=\{x\in R_n^+:|x|<2t\}$ when using (1) we obtain

$$F(y)=C(n,\gamma)\int\limits_{\Omega_\zeta^+}\int\limits_{\Omega_\xi^+} T_{t\xi}^{t\zeta}\left[\frac{|t\xi|}{(4t^2-|t\xi|^2)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}}\widehat{F}(t\xi)\mathbf{j}_\gamma(t\xi,y)\right]\zeta^\gamma\xi^\gamma dS_\xi dS_\zeta,$$

where $\widehat{F}$ is Fourier-Bessel transform of F. Definitions of Fourier-Bessel transform and function $\mathbf{j}_\gamma(x,y)$ see in [1].

REFERENCES

1. *Lyakhov L. N., Polovinkin I. P., Shishkina E. L.*, On a Kipriyanov problem for a singular ultrahyperbolic equation, Differential Equations, 50 (4), 2014, pp. 516-528.

Секция IV

Вероятностно - аналитические модели и методы

Т. А. Волосатова, А. Г. Данекянц (Ростовский государственный строительный университет, Ростов-на-Дону)
kulikta@mail.ru, dangegik@mail.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ С ТРЕМЯ ПРИОРИТЕТАМИ [1]

Рассмотрим в пространстве R^n заданы неотрицательные непрерывные функции $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, 3$, дважды непрерывно дифференцируемые на открытых множествах $B_i = \{F_i > 0\}$ соответственно, и пусть $\cap_{i=1}^{3} B_i \neq \emptyset$. Целевая функция F_3 формулирует внутренние требования системы, а F_1 и F_2 воспроизводят требования некоторых внешних "оптимизаторов" к этой системе. Создадим новую целевую функцию арбитра: $F = F_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2} F_3^{\alpha_3}$, где $\alpha_i > 0, i = 1, 2, 3$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Показатели $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ будем называть приоритетами. Арбитр, воздействуя на внутреннюю структуру системы и на внешних "оптимизаторов", стремится обестечить эффективную работу всей системы, то есть максимизировать целевую функцию F. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $x \in \cap_{i=1}^{3} B_i$. Будем предполагать, что $F_i(x)$ являются функциями «квазилинейного» вида:

$F_i(x) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^i x_k + b_i \right) I_{\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^i x_k + b_i > 0\}}$, где I_A есть индикатор A.

Введем обозначения: $G_i(x) = \dfrac{F_i(x)}{F_3(x)}, i = 1, 2.$

Теорема. *Для того, чтобы функция $F(x)$ имела стационарные точки необходимо, чтобы система векторов $\{\overrightarrow{a}^1, \overrightarrow{a}^2, \overrightarrow{a}^3\}$ была линейно зависима и выполнялось равенство*

$$\overrightarrow{a}^3 = \frac{\alpha_1}{(\alpha_1 + \alpha_2) - 1} G_1^{-1} \overrightarrow{a}^1 + \frac{\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2) - 1} G_2^{-1} \overrightarrow{a}^2.$$

Обратно, пусть эти условия выполнены. Введем обозначения

$$G_i^{-1} = const = c_i > 0, i = 1, 2 \ , \ s = \sum_{k=1}^{n} a_k^1 x_k, \ t = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 x_k.$$

Тогда целевая функция примет вид:

$$F = (s + b_1)_{\alpha_1} (t + b_2)_{\alpha_2} \left(\frac{\alpha_1 c_1}{(\alpha_1 + \alpha_2) - 1} s + \frac{\alpha_2 c_2}{(\alpha_1 + \alpha_2) - 1} t + b_3 \right)^{1-(\alpha_1+\alpha_2)}.$$

Исследуемая функция $F(x)$ имеет локальный максимум в точке

$$\left(\tfrac{1}{c_1}((\alpha_1 - 1)(c_1 b_1 - b_3) + \alpha_2(c_2 b_2 - b_3)); \tfrac{1}{c_2}(\alpha_1(c_1 b_1 - b_3) + (\alpha_2 - 1)(c_2 b_2 - b_3)) \right).$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 16-01-00184 и 16-01-20092).

Yu. E. Gliklikh (Voronezh, Russia)
yeg@math.vsu.ru

THE MOTION OF QUANTUM PARTICLE IN THE CLASSICAL GAUGE FIELD IN THE LANGUAGE OF STOCHASTIC MECHANICS

Nelson's Stochastic Mechanics is a mathematical theory that is based on the classical physics but gives the same predictions as the quantum mechanics for a broad class of problems, for which both theories are applicable. The Stochastic Mechanics can be considered as a special method of quantization distinct from Hamiltonian and Lagrangian (in terms of path integrals) ones. An important feature of the Stochastic Mechanics is that it deals with quantization of the second Newton law, not Hamiltonian or Lagrangian equations. The analog of Newton's law, the equation of motion in Stochastic Mechanics, is known as the Newton-Nelson equation. It is given in terms of the so-called mean derivatives of stochastic processes.

Up to the present time a lot of quantum mechanical problems have been investigated in the language of Stochastic Mechanics. However the description of a quantum particle motion in the classical gauge field has not been translated in this language. We elaborate a special version of Stochastic Mechanics on the total space of a complex vector bundle over a Lorentz manifold, in particular, over a space-time of General Relativity. For a particular case of symmetry group $U(1)$ we investigate relations with quantum electrodynamics.

Then we construct and investigate an analogue of the Newton-Nelson equation on the total space of real vector bundle over a Riemannian manifold.

В. М. Деундяк, С. А. Евпак, А. А. Таран (Ростов-на-Дону)
vl.deundyak@gmail.com, syevpak@yandex.ru, fraktal-at@yandex.ru

ОБ ОЦЕНИВАНИИ ВЕРОЯТНОСТИ УЯЗВИМОСТЕЙ ПОЛИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КЛЮЧЕЙ

Доклад является продолжением публикаций [1,2,3] о результатах исследования теоретико–кодовой полилинейной системы распределения ключей (см. [4]). Эта система обеспечивает безопасность проведения конференций в некотором сообществе пользователей, в котором может быть коалиция злоумышленников мощности, не превышающей допустимого порога. В случае, когда мощность коалиции превышает порог, система распределения ключей становится уязвимой. В работе оцениваются вероятности возникновения таких уязвимостей, приводятся примеры конкретных систем с безопасными и небезопасными параметрами.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Деундяк В. М., Евпак С. А.* Уязвимости полилинейной системы распределения ключей // Современные методы и

проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - V: тез. докл. V Международной конференции. Ростов-на-Дону, 2015. С. 154–155.

2. *Деундяк В. М., Евпак С. А.* Уязвимости полилинейной системы распределения ключей в случае превышения порога мощности коалиции злоумышленников // Труды научной школы И. Б. Симоненко. Выпуск второй. Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2015. С. 105–115.

3. *Деундяк В. М., Таран А. А.* О применении кодов Хэмминга в системе распределения ключей для конференций в многопользовательских системах связи // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2015. № 3. С. 43–50.

4. *Сидельников В. М.* Теория кодирования. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.

Д.С. Климентов (Ростов-на-Дону)
dklimentov75@gmail.com

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ ПЕРЕХОДНОЙ ПЛОТНОСТИ ДИФФУЗИИ ПРИ НЕПРЕРЫВНОМ ИЗГИБАНИИ

Будем рассматривать поверхность S класса C^3 в евклидовом пространстве E^3. Зададим на S диффузию X_t, порождённую первой квадратичной формой этой поверхности. Через $p_t(x,y)$ обозначим переходную плотность диффузии X_t. Имеет место

Теорема. *Переходная плотность $p_t(x,y)$ диффузии X_t является инвариантом при непрерывном изгибании поверхности S.*

Н. П. Красий (Ростов-на-Дону)
krasnad@yandex.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИОРИТЕТАМИ[1]

В данной работе, выполненной в рамках научной тематики кафедры высшей математики РГСУ, проводятся исследования возможности оптимизации квазилинейных моделей, интерпретирующих ситуацию, когда целевая функция отражает разнонаправленные требования различных структур с учётом случайной расстановки приоритетов сторонним лицом – арбитром, принимающим решения на основании экспертных рекомендаций. Будем считать, что в системе взаимодействуют две структуры, и функции

$$F_1(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b\right) I_{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i + b > 0\right\}},$$
$$F_2(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d\right) I_{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i + d > 0\right\}}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 16-01-00184 и 16-01-20092).

выражают их конкурирующие цели.

Пусть $\alpha_i = \alpha_i(\omega),\ i = 1, 2$ — независимые случайные величины, определенные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и удовлетворяющие условию: $P(0 < \alpha_i < 1) > 0,\ i = 1, 2$. Введем следующую целевую функцию арбитра: $F(x) = E\left(F_1^{\alpha_1}\right) E\left(F_2^{\alpha_2}\right)$.

Теорема. *Для того, чтобы функция $F(x)$ имела стационарные точки, необходимо выполнение условий:*
1) существует подмножество индексов $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ (которое может быть и пустым) такое, что $\forall i \in I\ a_i = c_i = 0$ и $\forall i \in I^c = \{1, 2, \ldots, n\} \backslash I\ a_i \neq 0$ и $c_i \neq 0$;
2) существует такое число $c > 0$, что $\forall i \in I^c$ выполняются равенства $-\dfrac{c_i}{a_i} = c$;
3) $-b < \dfrac{d}{c}$. При выполнении условий 1), 2) и 3) уравнение $g(t) = 0$, где $g(t) = E\left(\alpha_1(t+b)^{\alpha_1-1}\right) E\left((-ct+d)^{\alpha_2}\right) - cE\left((t+b)^{\alpha_1}\right) E\left(\alpha_2(-ct+d)^{\alpha_2-1}\right)$ имеет единственный корень $t = t^*$ $\left(-b < t^* < \dfrac{d}{c}\right)$ и все точки гиперплоскости $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = t^*$ являются точками локального и глобального максимума функции $F(x)$ (других точек локального и глобального максимума нет).

K. V. Lykov (Samara, Russia)
alkv@list.ru

THE MOMENT PROBLEM FOR A MIXTURE OF TWO DISTRIBUTIONS [1]

Definition. We will say that the (Hamburger) moment problem for the distribution function $F = F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, is *determinate*, if for any distribution function G from the condition

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n\, dF(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n\, dG(x) \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}$$

it follows that $F(x) = G(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$. For the random variable X defined on a probability space $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}\}$ we will say that it's moment problem is *determinate*, if this holds for distribution function of X

$$F_X(x) := \mathrm{P}\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \leqslant x\}.$$

Otherwise, we will say that moment problem is *indeterminate*.

[1]This work was supported by the RFBR grant 14-01-31452.

Theorem. *Let X be a random variable on some probability space $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}\}$ such that all it's moments are finite, i.e.* $\mathsf{E}|X|^n < \infty$ *for all* $n \in \mathbb{N}$. *Then there exist random variables Y and Z on $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}\}$ such that:*
1) $X = Y + Z$; 2) Y and Z are pairwise disjoint on Ω;
3) all moments of Y and Z are finite and moment problems for Y and Z are both determinate.

Corollary 1. *There exist random variables Y and Z with determinate moment problems such that the moment problem for $Y + Z$ is indeterminate.*

Corollary 2. *Let $F = F(x)$ be a distribution function such that all it's moments are finite. Then there exist $\alpha \in (0, 1)$ and distibution functions G and H such that:*
1) $F(x) = \alpha G(x) + (1 - \alpha)H(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$;
2) moment problems for G and H are both determinate.

Corollary 3. *There exist two distribution functions G and H with determinate moment problems such that the moment problem for some it's mixture F (i.e. $F(x) = \alpha G(x) + (1 - \alpha)H(x)$ for some $\alpha \in (0, 1)$ and all $x \in \mathbb{R}$) is indeterminate.*

Г. В. Мироненко (Ростов-на-Дону)
georim89@gmail.com

ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ИЗМЕНЕНИИ ПРИРАЩЕНИЙ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрим диффузионный процесс

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t, \quad S_0 = const,$$

где W — броуновское движение. Пусть $X_T = (S_\tau - S_0) + \gamma_\tau(S_T - S_\tau)$. Цель состоит в том, чтобы минимизировать отклонение X_T от заданной константы H:

$$\mathsf{E}[(X_T - H)^2] \to \min_{(\gamma_\tau, \tau)} .$$

Здесь $\tau \in [0, T]$ момент остановки, относительно естественной фильтрации броуновского движения $\mathbb{F} = (F_s)_{s \in [0,T]}$, γ_τ — F_τ измеримая случайная величина. Таким образом, приращение процесса S разрешается изменить только один раз в момент времени τ.

Проведя минимизацию по γ_τ^* получаем задачу об оптимальной остановке:

$$\mathsf{E}[h(S_\tau)\phi(\tau, S_\tau)] \to \min_\tau,$$

$$h(S_t) = (H - (S_t - S_0))^2, \ \phi(\tau, S_\tau) = \left(1 - I_{\{\tau < T\}} \frac{\mathsf{E}(S_T - S_\tau | F_\tau)^2}{\mathsf{E}((S_T - S_\tau)^2 | F_\tau)}\right).$$

Оптимальный момент остановки имеет вид:

$$\tau^* = \inf_t \{t \geq 0 : S_t \notin G\} \wedge T, \quad \text{где } G = \{(t,s) : s_1(t) \leq s \leq s_2(t)\}.$$

Для моделей Башелье (μ, σ константы) и Блека-Шоулза ($\mu_t = \mu S_t, \sigma_t = \sigma S_t$) были получены оценки области продолжения:

$$\tilde{G} \subset G, \quad \tilde{G} = \{(t,s) : \tilde{s_1}(t) \leq s \leq \tilde{s_2}(t)\}.$$

Численные расчеты показывают, что данные оценки являются достаточно точными. Явная численная схема описана в [1], её сходимость вытекает из теоремы сравнения для соответствующего уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана [2].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Oberman A. M.* Convergent difference schemes for degenerate elliptic and parabolic equations: Hamilton-Jacobi equations and free boundary problems. SIAM Journal on Numerical Analysis. 2006. Т. 66, № 44. С. 879–895.

2. *Touzi N.* Optimal Stochastic Control, Stochastic Target Problems, and Backward SDE. Fields Institute Monographs, New York: Springer. 2013.

Ф. С. Насыров (Уфимский государственный авиационный технический университет, Россия)
farsagit@yandex.ru

О СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений (в дальнейшем: СДУ) вида

$$\begin{cases} \eta_i(t) = \eta_i^0 + \int_0^t B^i(s, \overline{\eta}(s), \overline{W}(s))ds + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma^{ij}(s, \overline{\eta}(s)) * dW_j(s), \\ \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \end{cases} \tag{1}$$

где $\overline{W}(s) = \{W_1(s), \ldots, W_d(s)\}$– d-мерный винеровский процесс, стохастические интегралы есть интегралы Стратоновича. Пусть выполнены условия существования и единственности для системы (1). Кроме того, предполагается, что функции σ^{ij} и B^i непрерывно дифференцируемы и в каждом столбце матрицы $\Sigma = \{\sigma^{ij}\}$ существует хотя бы один отделенный от нуля элемент.

В работе выявлена структура решения систем СДУ вида (1). Показано, что

$$\eta_i(t) = \varphi_i(t, W_1(t), \ldots, W_d(t), C_1(t), \ldots, C_n(t)), \quad i = 1, \ldots, n,$$

то есть решения СДУ представляют собой неслучайные функции $\varphi_i(t, w_1, \ldots, w_d, c_1, \ldots, c_n)$ от винеровского процесса $W_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, d$, и гладких адаптированных случайных функций $C_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, которые являются решениями нормальной системы обыкновенных ОДУ, правые части которых содержат случайные функции $W_j(t)$.

Выявленная структура решений СДУ позволяет упростить различные задачи стохастического анализа. Ранее соответствующий результат был получен (см.[1]) для скалярных СДУ с одномерным винеровским процессом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Насыров Ф. С.* Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ. М. Физматлит, 2011.

I. V. Pavlov (Rostov-on-Don)
pavloviv2005@mail.ru

ON THE EXISTENCE OF INTERPOLATING MARTINGALE MEASURES FOR A STATIC MODEL OF (B,S)-MARKET [1]

Let us consider on $\{\Omega, \mathbf{F}\}$ a one period (B, S)-market, where $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ is a one-step filtration, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$, and $\mathcal{F}_1$ is generated by a decomposition of Ω into a countable number of atoms B_k^i, $1 \le k < \infty$, $1 \le i < m_k + 1$, $1 \le m_k \le \infty$. We denote by $Z = (Z_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^1$ an $\mathbf{F}$-adapted stochastic process which we think like a discounted value of a stock $(Z_0 = a, Z_1(B_k^i) = b_k)$, where b_k are different real numbers.

Suppose that this (B, S)-market is arbitrage-free. Denote by $\mathcal{P}$ the set of martingale measures P such that

1) $p_k^i := P(B_k^i) > 0$, $\forall k$ and i;

2) $b_l \neq \frac{\sum_J b_k p_k^i}{\sum_J p_k^i}$, $\forall l (1 \le l < \infty)$ and for all subset $J \subset \{(k,i), 1 \le k < \infty, 1 \le i < m_k + 1\}$ such that J^c is finite.

Measures from P can be used for so-called Haar interpolations of (B, S)-markets under consideration. Such interpolations transform arbitrage-free incomplete markets to arbitrage-free and complete ones.

In this talk we will present some new sufficiant conditions providing the existence of measures $P \in \mathcal{P}$. Other conditions cal be found in [1–2].

REFERENCES

1. *Pavlov I. V., Tsvetkova I. V., Shamrayeva V. V.* // Some results on martingale measures of static financial markets models relating noncoincidence barycenter condition. Vestn. Rostov Gos. Univ. Putei Soobshcheniya. 2012. N. 3. P. 177–181.

2. *Pavlov I. V., Tsvetkova I. V., Shamrayeva V. V.* // On the existence of martingale measures satisfying the weakend condition of noncoincidence of barycenters in case of countable probability space. Teor. Veroyatn. Primen. 2016. Vol. 61, N. 1.

[1]This work was supported by the RFBR (projects 16-01-00184, 16-07-00888, 16-01-20092).

В. В. Родоченко (Южный Федеральный Университет, Российская Федерация)
vrodochenko@gmail.com

КАЛИБРОВКА МОДЕЛЕЙ РОССИЙСКОГО СРОЧНОГО РЫНКА С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ [1]

Практически все существующие модели оценки стоимости опционов имеют некоторый набор параметров, которые нельзя наблюдать непосредственно [1]. В случае классической модели Блэка-Шоулса в этой роли выступает σ - величина рыночной волатильности. Для того, чтобы использовать их на реальных исторических данных, разрабатывают различные способы "калибровки"моделей (см., например, [2]). После проведения калибровки остро встаёт вопрос устойчивости результатов относительно изменения данных.

В рамках данной работы мы применяем некоторые из популярных алгоритмов машинного обучения (случайный лес и SVM) к задаче динамической калибровки негауссовых моделей (Мертона [3] и Хестона [4]) в формате сравнительного анализа. Использовав в качестве обучающей выборки историю изменения индекса РТС, индекса волатильности Московской биржи, а также наблюдаемые параметры опциона (такие как время экспирации, величина страйка и история торгов), мы анализируем величину ошибки каждого из алгогритмов на каждой из моделей оценки стоимости опциона. По результатам экспериментов мы делаем вывод о качестве прогнозирования каждой из моделей, – как по отношению к "самой себе то есть оптимально перекалиброванным данным модели, так и с точки зрения вероятности получить аналогичный ответ путём случайного подбора параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кудрявцев, О.Е.* Эффективные математические методы вычисления цен опционов. – Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing. – 2012.

2. *Nelder, J. A.*. A Simplex Method for Function Minimization. – Computer Journal. – 1965. – Vol. 7. – p.308-313.

3. *Merton, R.*: “Option pricing when underlying stock returns are discontinuous”. J. Financ. Econ. 1976, – v. 3, p. 125–144

4. *L. Heston* A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. Review of Financial Studies. 1993. v. 6. p. 327–343.

D. B. Rokhlin (Southern Federal University, Russia)
rokhlin@math.rsu.ru

MINIMAX PERFECT STOPPING RULES FOR SELLING AN ASSET NEAR ITS ULTIMATE MAXIMUM

Assume that an agent wants to sell an asset before the maturity date T at a price X_τ, which is as close as possible to the ultimate maximum $X_T^* = \max_{0\le t\le T} X_t$. The

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РГНФ, проект №15-32-01390.

asset price is a continuous function $t \mapsto X_t(\omega)$, depending on an unknown outcome $\omega \in \Omega$. A selling rule $\tau(\omega)$ may depend on the price history $\{X_s : s \le \tau(\omega)\}$.

To each selling rule we associate the regret over the past, the regret over the future and the overall regret. Based on the latter quantity we introduce the notion of a perfect stopping rule. The idea is that it improves any earlier stopping rule and cannot be improved by further delay. We show that a perfect stopping rule is unique and has the following simple form: one should sell the asset if its price X_t deviates from the running maximum X_t^* by a certain time-dependent quantity.

An optimality of such selling rule ("let profits run but cut losses") was first justified in [1] for a discrete time model. This result was inspired by the paper [2], which studied the case of a divisible asset. The approach of [1, 2] was based on discrete-time specific recurrent dynamic programming formulas. In continuous-time probabilistic setting the problem of stopping near the ultimate maximum became popular after the stimulating paper [3].

To illustrate our results assume that the price trajectories satisfy the inequalities

$$-l \cdot (t-s) \le X_t(\omega) - X_s(\omega) \le u \cdot (t-s), \quad 0 \le s < t \le T$$

with some constants $l, u > 0$. Then the perfect stopping rule is the following: $\tau^*(\omega) = \inf\{t \ge 0 : (X_t^* - X_t)(\omega) \ge u \cdot (T-t)\}$. Note, that it depends only on one parameter u, which shows how fast the price can go upwards.

REFERENCES

1. *Bawa V. S.* Minimax policies for selling a nondivisible asset. Manage. Sci. 1973. Vol. 19, no 7. P. 760–762.
2. *Pye G.* Minimax policies for selling an asset and dollar averaging. Manage. Sci. 1971. Vol. 17, no 7. P 379–393.
3. *Graversen S. E., Peskir G., Shiryaev A. N.* Stopping Brownian motion without anticipation as close as possible to its ultimate maximum. Theory Probab. Appl. 2001. Vol. 45, no 1. P. 125–136.

В. Н. Русев, А. В. Скориков (РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М.Губкина, Россия)
vnrusev@yandex.ru, skorikov.a@gubkin.ru

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ДИСКРЕТНЫЕ МЕТОДЫ В ИССЛЕДОВАНИИ ПАРАМЕТРА ПОТОКА ОТКАЗОВ В ТРАНСПОРТЕ ГАЗА

Исследуется зависимость между показателями надежности невосстанавливаемых и восстанавливаемых систем и их элементов (в случае газоперекачивающих агрегатов (ГПА) объекты с точки зрения отказов или аварийных остановов можно рассматривать с двоякой позиции: как ремонтируемые, так и неремонтируемые). В качестве модели рассматривается рекуррентный поток отказов, для которого указанная связь выражается интегральным уравнением Вольтерра, связывающим параметр потока $\omega(t)$ и плотность $f(t)$ распределения времени ξ_k между отказами :

$$\omega(t) = f(t) + \int_0^t \omega(\tau) f(t-\tau)\, d\tau.$$

В работе [1] было найдено асимптотическое , $t \to +\infty$, решение уравнение Вольтерра в виде ряда, в предположении, что жизненный цикл функционирования объектов системы транспорта газа описывается с помощью закона распределения Вейбулла-Гнеденко.

Для нахождения приближенного решениия $\omega(t),\ t > 0$ рассматриваются три способа дискретизации уравнения (1).

1. Решение ищется в виде суммы кусочно-постоянных функций равных на каждом отрезке разбиения значению искомого решения в конечной точке, как в квадратурном методе прямоугольников.

2. Полагается значение решения на каждом отрезке разбиения равное среднему значению, как это делается в методе трапеций.

3. На каждом отрезке разбиения, используя мнгочлен Лагранжа первой степени, искомое решение заменяется линейной функцией, т.е. рассматривается приближение точного решения ломаной.

Получены алгоритмы, проверенные на модельных распределениях, и проведены численные расчеты для реальных эксплуатационных данных по механическим отказам ГПА Ростовского УМГ.

ЛИТЕРАТУРА

1.*Русев В. Н., Скориков А. В.* Анализ элементов систем газоснабжения с помощью метода производящих функций моментов . Труды РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина. 2016, № 1/282. С. 85-95.

С. М. Ситник (Воронеж)
mathsms@yandex.ru

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В докладе приводятся результаты по уточнению и обобщению неравенств, ранее полученных Ю.В. Линником, М.Г. Крейном и Е.А. Гориным и для положительно определённых и характеристических функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Линник Ю. В.* Разложение вероятностных законов. Л.: Изд. Ленинградского университета, 1960.
2. *Рамачандран Б.* Теория характеристических функций. М.: Наука, 1975.
3. *Лукач Е.* Характеристические функции. М.: Наука, 1979.

4. *Горин Е. А.* Положительно определённые функции как инструмент математического анализа // Фундамент. и прикл. матем. 2012. Т. 17, № 7. С. 67–95.

5. *Певный А. Б., Ситник С. М.* Строго положительно определённые функции, неравенства М.Г. Крейна и Е.А. Горина // "Новые информационные технологии в автоматизированных системах". Материалы восемнадцатого научно-практического семинара. 2015. Москва: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, С. 247–254.

Н. В. Смородина (Санкт-Петербург)
smorodina@pdmi.ras.ru

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ, СВОЙСТВА, ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ. [1]

Будет введено понятие аналитического диффузионного процесса. Всякий такой процесс является пределом некоторой последовательности классических случайных блужданий, но предел понимается не в традиционном смысле смысле слабой сходимости мер (как в теореме Донскера-Прохорова), а в смысле сходимости обобщенных функций.

Аналитические процессы обладают рядом интересных свойств. Во-первых, их траектории всегда являются кусочно-постоянными функциями с конечным числом скачков. Кроме того, среднее значение любого функционала от аналитического процесса определяется только производными в одной единственной точке, именно, на траектории, тождественно равной константе, соответствующей значению процесса в нулевой момент времени.

С использованием аналитических диффузионных процессов удается получить вероятностные аппроксимации решений эволюционных уравнений типа Шрёдингера, но содержащих в правой части эллиптический оператор с переменным коэффициентом.

V. V. Ulyanov (Lomonosov Moscow State University, Russia)
vulyanov@cs.msu.su

ASYMPTOTIC AND NON-ASYMPTOTIC ANALYSIS OF NON-LINEAR FORMS IN RANDOM ELEMENTS [2]

First we give short review on recent approximation results for non-linear forms in independent random elements including asymptotic expan-sions (see, e.g., [1]). The errors of approximations could be described either in asymptotic way as an order of a remainder term with respect to number n of random elements or in non-asymptotic form as a bound for remainder term with dependence on n, moment characteristics

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-01453).
[2]This work was supported by RSCF 14-11-00196.

and dimension p of random elements or observations (see, e.g., Chapters 13-15 in [2]). The results are obtained by very different techniques.

We show that for most of these expansions one could safely ignore the underlying probability model and its ingredients. Indeed, similar expansions and error bounds can be derived using a general scheme reflecting some common features. This is the universal collective behavior caused by many independent asymptotically negligible variables. The following scheme of sequences of symmetric functions is studied (see [3]).

Let $h_n(\varepsilon, ..., \varepsilon_n), n \geq 1$, denote a sequence of real functions defined on $\mathbb{R}^n$ and suppose that the following conditions hold:

$$h_{n+1}(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_j, 0, \varepsilon_{j+1}, ..., \varepsilon_n) = h_n(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_j, \varepsilon_{j+1}, ..., \varepsilon_n);$$
$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_j} h_n(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_j, ..., \varepsilon_n)\Big|_{\varepsilon_j=0} = 0 \quad \text{for all} \quad j = 1, ..., n;$$
$$h_n(\varepsilon_{\pi(1)}, ..., \varepsilon_{\pi(n)}) = h_n(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \quad \text{for all} \quad \pi \in S_n,$$

where S_n denotes the symmetric group. We give the applications of the results to stochastic models as well, e.g. for high order U-statistics.

REFERENCES

1. *Prokhorov Y. V., Ulyanov V. V.* Some approximation problems in statistics and probability. // In «Limit Theorems in Probability, Statistics and Number Theory» Ed.by P. Eichelsbacher et. al., Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 2013. Vol. 42. P. 235–249.
2. *Fujikoshi Y., Ulyanov V. V., Shimizu R.* Multivariate statistics: High-dimensional and large-sample approximations. John Wiley and Sons Inc., N.J. 2010.
3. *Götze F., Naumov A., Ulyanov V.* Asymptotic analysis of symmetric functions. // Journal of Theoretical Probability. 2016. Vol. 29. See also http://arxiv.org/abs/1502.06267

В. М. Хаметов (Москва, НИУ ВШЭ), Е. В. Ясонов (Москва, НИУ ВШЭ)
khametovvm@mail.ru, evyasonov@gmail.com

МИНИМАКСНАЯ ОСТАНОВКА СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Экстремальная задача об оптимальной остановке рассматривалась в [1]. В докладе предлагается новый подход к её решению.

2. Пусть на стохастическом базисе $(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathcal{N}},\ \mathsf{P})$, $\mathcal{N} = 1, \ldots, N,\ N < \infty$ – горизонт, заданы согласованные случайные последовательности $(X_n,\ \mathcal{F}_n)_{n\in\mathcal{N}}$ и $(f_n,\ \mathcal{F}_n)_{n\in\mathcal{N}}$. Пусть $\{\mathcal{T}_n^N\}_{n\in\mathcal{N}},\ \ \tau \in \mathcal{T}_n^N$ – множество моментов остановки относительно фильтрации $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathcal{N}}$, принимающих значение в множестве $\{n, \ldots, \mathcal{N}\}$. Обозначим: 1) $\mathcal{P}$ – множество вероятностных мер эквивалентных мере P, $\ \mathsf{Q} \in \mathcal{P}$;

2) $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\xi(\omega) = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)\mathsf{Q}(\mathrm{d}\omega)$ – интеграл Лебега; 3) $\mathcal{L}_0(\Omega,\ \mathcal{F}_0)$ – множество ограниченных $\mathcal{F}_0$-измеримых случайных величин.

Рассматривается задача
$$\mathsf{E}^{\mathsf{Q}} f_\tau \to \inf_{\tau\in\mathcal{T}_0^N} \sup_{\mathsf{Q}\in\mathcal{P}} \tag{1}$$

Решением задачи (1) назовём набор $(\tau^*, \mathsf{Q}^*, \nu_0^N) \in \mathcal{T}_0^N \times \mathsf{P} \times \mathcal{L}_0(\Omega,\ \mathcal{F}_0)$ такой, что
$$\nu_0^N = \operatorname*{ess\,inf}_{\tau\in\mathcal{T}_0^N} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathcal{P}} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(f_\tau|\mathcal{F}_0) = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}(f_{\tau^*}|\mathcal{F}_0). \tag{2}$$

Обозначим $\nu_n^N = \operatorname*{ess\,inf}_{\tau\in\mathcal{T}_n^N} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathcal{P}} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(f_{N\wedge\tau}|\mathcal{F}_n)$.

Теорема. *Пусть* $N < \infty$, $\sup\limits_{n\in\mathcal{N}} |f_\tau| \le C < \infty$ P – *п.н.*, $\mathcal{P}$ – *слабо компактно. Тогда для любого* $n \in \mathcal{N}$ *справедливы следующие утверждения:*

1) $\nu_n^N = \min\left[f_\tau,\ \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathcal{P}} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(\nu_{n+1}^N|\mathcal{F}_n)\right] = \min\left[f_\tau,\ \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}(\nu_{n+1}^N|\mathcal{F}_n)\right]$, $\nu_n^N|_{n=N} = f_N$;

2) $\tau^* = \min\{n \ge 0 : f_n = \nu_n^N\}$ – *оптимальный момент остановки;*

3) $\nu_n^N = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}(f_{N\wedge\tau}|\mathcal{F}_n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Reidel F.* Optimal Stopping with Multiply Prior // Econometrica, Vol. 77, N3, 857-908 p.

И. В. Цветкова (Ростов-на-Дону)
pilipenkoIV@mail.ru

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ МАРТИНГАЛЬНЫХ МЕР, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ОСУХЕ, В СЛУЧАЕ ОДНОШАГОВОГО РЫНКА СО СЧЁТНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ[1]

В докладе рассматривается одношаговый (**B**,**S**) - рынок, который задан на фильтрованном пространстве $(\Omega, \mathbf{F})$, где $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_k)_{k=0}^1$, $\mathcal{F}_0$ — тривиальная σ- алгебра, $\mathcal{F}_1$ — σ - алгебра, порождённая разбиением Ω на счётное число атомов B_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$. Пусть $Z = (Z_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^1$ — $\mathbf{F}$ - адаптированный случайный процесс со значениями: $Z_0(\Omega) = a$, $Z_1(B_i) = b_i$, $a \in R$, $b_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots$ (R — множество всех действительных чисел). Рассмотрим случай, когда среди элементов последовательности $\{b_i\}_{i=1}^\infty$ всего r различных ($3 < r < \infty$) с соответствующими кратностями m_k, $1 \le k \le r$ (m_k — число, показывающее сколько раз значение b_k встречается в наборе $\{b_i\}_{i=1}^\infty$, $1 \le m_k \le \infty$). Обозначим через $\mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$ множество невырожденных вероятностных мер, относительно которых процесс Z является

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 16-01-00184 и 16-01-20092).

мартингалом. Предполагается, что исходный рынок является безарбитражным и неполным.

Для перехода от неполных рынков к полным мы будем использовать метод специальных хааровских интерполяций, предполагающий существование мартингальных мер, удовлетворяющих ослабленному свойству универсальной хааровской единственности (ОСУХЕ)[1]. В докладе будет представлен алгоритм вычислительных процедур для получения мартингальных мер, обладающих этим свойством. В основу этого алгоритма положена идея, представленная в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Данекянц А. Г., Павлов И. В.* Об ослабленном свойстве универсальной хааровской единственности // Обозрение прикл. и промышл. матем.,М.: 2004. Т. 11, № 3. С. 506-508.

2. *Павлов И. В., Шамраева В. В., Цветкова И. В.* О существовании мартингальных мер, удовлетворяющих ослабленному условию несовпадения барицентров, в случае счётного вероятностного пространства// Теория вероятностей и её применения. 2016. Т. 61, № 1.

Е. Г. Чуб (Ростов-на-Дону)
elenachub111@gmail.com

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ В ФОРМЕ «ОБЪЕКТ - НАБЛЮДАТЕЛЬ» [1]

В данной работе представлена новая стохастическая модель движения гиростабилизированной платформы в форме «объект - наблюдатель», которая может быть использована в подвижных измерительных системах, обеспечивающих безопасность движения железнодорожного транспорта. Канонический вид модели в параметрах Родрига-Гамильтона имеет вид:

$$m = F(m,t) + F_0(m,t)\xi,\ Z = qm + W_a,$$

где

$$F(m,t) = \frac{1}{2}\Phi(m)(R + UD(m)V^T(l)G_A + \\ +(D(m)V^T(l)G_A)^T \bigotimes D(m)V^T(l)G_A),$$

$$F_0 = \frac{1}{2}|\Phi(m)(UD(m)V^T(l)G_A + \\ +(D(m)V^T(l)G_A)^T \bigotimes D(m)V^T(l)G_A\vdots\Phi(m)|,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-20092).

$\xi = |w⋮W|^T$, w — вектор случайных возмущающих ускорений, направленных по осям гироскопического трехгранника и описываемый в общем случае БГШ с нулевым математическим ожиданием и известной матрицей интенсивности $D_w(t)$; W, W_a — БГШ с нулевыми математическими ожиданиями и матрицами интенсивности $D_W(t)$, $D_{W_a}(t)$. Вектор $q = |C_0, C_1, C_2, C_3^T|$ состоит из блоков, составляющие для которых $v_1^* = (2l_0^2 + 2l_1^2 - 1)G_N + 2l_1l_2G_L - 2l_0l_2G_E$, $v_2^* = 2l_1l_2G_N + (2l_0^2 + 2l_2^2 - 1)G_L + 2l_0l_2G_E$, $v_3^* = 2l_0l_2G_N - 2l_0l_1G_L + (2l_0^2 - 1)G_E$, а координаты — блоки соответственно:
$C_0 = 2|m_0v_1^* + m_3v_2^* - m_0v_3^*, m_3v_1^* + m_0v_2^* + m_1v_3^*, m_2v_1^* - m_1v_2^* + m_0v_3^*|^T$, $C_1 = 2|m_1v_1^* + m_2v_2^* + m_3v_3^*, m_2v_1^*, m_3v_1^*|^T$, $C_2 = 2|0, m_2v_2^*, m_3v_2^*|^T$, $C_3 = 2|0, m_2v_3^*, m_3v_2^*|^T$.

Данная модель упрощает использование современных субоптимальных методов обработки информации и управления в подвижных измерительных системах.

В. В. Шамраева (Ростов-на-Дону)
shamraeva@mail.ru

НОВЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МАРТИНГАЛЬНЫХ МЕР, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ОУНБ, В СЛУЧАЕ СЧЁТНОГО ВЕРОЯТНОСТНОГО ПРОСТРАНСТВА[1]

Рассмотрим фильтрованное пространство (Ω,$\mathbf{F}$) с одношаговой фильтрацией $\mathbf{F}= (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$, где $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$, а $\mathcal{F}_1$ порождена разбиением Ω на счетное число атомов B_i, $i \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Рассмотрим $\mathbf{F}$-адаптированный случайный процесс $Z = (Z_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^1$. Введем обозначения: $Z_0 = a$, $Z_1|_{B_i} = b_i$. Предположим, что выполняются следующие условия: $b_1 < b_2 < b_3 < b_4$; каждое из этих чисел встречается в последовательности $b_5, b_6, \dots$ бесконечное число раз, а других чисел в этой последовательности нет; $b_1 < a < b_2$. Для невырожденной вероятностной меры P на $\mathcal{F}_1$ будем использовать обозначения $p_i = P(B_i)$, $i \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что такая мера P удовлетворяет ослабленному условию несовпадения барицентров (ОУНБ), если $\forall i \in \mathbb{N}$ и для любого набора индексов $J \subset \mathbb{N}\backslash\{i\}$ с конечным дополнением $\overline{J} = \mathbb{N}\backslash J$ выполняется неравенство $b_i \neq \frac{\sum\limits_{j\in J} b_jp_j}{\sum\limits_{j\in J} p_j}$.

Лемма. *Если $\forall k \geqslant 1$ выполняются неравенства*

$$(b_2 - b_1)p_{4k-3} > (b_3 - b_2)\sum_{j=k}^{\infty} p_{4j-1} + (b_4 - b_2)\sum_{j=k}^{\infty} p_{4j},$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 16-01-00184, 16-07-00888, 16-01-20092).

$$(b_4 - b_3)p_{4k} > (b_3 - b_1)\sum_{j=k+1}^{\infty} p_{4j-3} + (b_3 - b_2)\sum_{j=k+1}^{\infty} p_{4j-2},$$

$$(b_3 - b_1)p_{4k-3} > (b_4 - b_3)\sum_{j=k}^{\infty} p_{4j}, (b_3 - b_2)p_{4k-2} > (b_4 - b_3)\sum_{j=k}^{\infty} p_{4j},$$

$$(b_3 - b_2)p_{4k-1} > (b_2 - b_1)\sum_{j=k+1}^{\infty} p_{4j-3}, (b_4 - b_2)p_{4k} > (b_2 - b_1)\sum_{j=k+1}^{\infty} p_{4j-3},$$

то мера P удовлетворяет ОУНБ.

Теорема. *Если невырожденная мартингальная мера P процесса Z удовлетворяет условиям леммы, то она удовлетворяет ОУНБ.*

Отметим, что в [1] данный результат получен лишь для рациональных b_i совершенно другим методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Павлов И.В., Цветкова И.В., Шамраева В.В.* О существовании мартингальных мер, удовлетворяющих ослабленному условию несовпадения барицентров, в случае счетного вероятностного пространства. Теория вероятностей и ее применения. 2016. Т. 61. N1.

E. A. Shelemekh (Moscow, Russia)
letis@mail.ru

CALCULATION OF EXOTIC OPTION IN INCOMPLETE $\{1, S\}$-MARKET WITH DISCREET MEASURE (A FINITE NUMBER OF STATES)

Suppose in incomplete $\{1, S\}$-market [1] price of risky asset follows Markov chain $\{S_n\}_{n\geq 0}$: $S_n = S_{n-1}(1+\rho_n)$, $S_n|_{n=0} = S_0$, where $\{\rho_n\}_{n\geq 0}$ are i.i.d. and $\forall\ i = \overline{1,l}$: $p_i \triangleq \mathsf{P}(\rho_n = a_i) > 0$, $-1 < a_i < \infty$, $a_i \neq 0$, $p_1 + ... + p_l = 1$ (*Condition 1*). Let's use designations [1]: 1) N is for horizon; 2) $\{\pi, C\}$ is for a self-financing portfolio with consumption and X_n for its capital at a moment $n \in \{0, ..., N\}$; 3) τ is for a Markov moment with values in a set $\{0, ..., N\}$; 4) $f_n(x) : \mathbb{R}^+ \times \{0, ..., N\} \to \mathbb{R}^+$ is for a bounded Borel function. Then $f_{\tau\wedge N}(S_{\tau\wedge N})$ is a payoff of exotic option [2].

Theorem. *Suppose Condition 1 is satisfied and there is portfolio $\{\pi^*, C^*\}$ such that $\forall\ n \in \{0, ..., \tau \wedge N\}$:*

1) its capital

$X_n^* = 1_{\{\tau=n\}}f_n + 1_{\{\tau>n\}}\Big\{p_{n+1}^* X_{n+1}^*\big(S_n(1 + a_{i^*,n+1})\big) + q_{n+1}^* X_{n+1}^*\big(S_n(1 + a_{j_{n+1}^*})\big)\Big\}$,
$X_N^*|_{n=N} = f_N$, *where* $p_{n+1}^* \triangleq \dfrac{|a_{j_{n+1}^*}|}{|a_{i_{n+1}^*}| + |a_{j_{n+1}^*}|}$, $q_{n+1}^* \triangleq 1 - p_{n+1}^*$;

2) quantity of risky asset
$\gamma_{n+1}^* = \Big[X_{n+1}^*\big(S_n(1+a_{j_{n+1}^*})\big) - X_{n+1}^*\big(S_n(1+ \quad +a_{i_{n+1}^*})\big)\Big] / \Big[S_n(a_{j_{n+1}^*} - a_{i_{n+1}^*})\Big]$, $\gamma_0^* = 0$;
3) quantity of risk-free asset $\beta_{n+1}^* = \beta_n^* - \triangle\gamma_{n+1}^* S_n$, $\beta_0^* = X_0^*$;
4) consumption $\triangle C_{n+1}^* = \gamma_{n+1}^* \triangle S_{n+1} \; - \triangle X_{n+1}^*$, $C_0^* = 0$, *where* i_n^*, j_n^*:
$\max\limits_{1\le i,j\le l}\Big\{\frac{|a_j|}{|a_i|+|a_j|}X_n^*\big(S_{n-1}(1+a_i)\big) + \frac{|a_i|}{|a_i|+|a_j|}X_n^*\big(S_{n-1}(1+a_j)\big)\Big\} = p_n^* X_n^*\big(S_{n-1}(1+a_{i_n^*})\big) + q_n^* X_n^*\big(S_{n-1}(1+ + a_{j_n^*})\big)$, $a_{i_n^*}a_{j_n^*} < 0$. *Then* $X_{\tau\wedge N}^* = f_{\tau\wedge N}$ *and for any other superhedging portfolio* $\{\pi, C\}$ *it holds, that* $X_n^* \le X_n$, $n \in \{0, ..., \tau\wedge N\}$.

Theorem provides a way to construct a perfect superhedging portfolio with minimal capital for exotic option in stated above $\{1, S\}$-market.

R E F E R E N C E S

1. *Shiryaev A. N.* Fundamentals of Stochastic Financial Mathematics. Volu-me 2: Theory [in Russian]. M.: Fazis, 1998.

2. *Hull J. C.* Options, Futures And Other Derivatives. Pearson Prentice Hall, 2009.

Секция V

Биоинформатика и математическое моделирование

Х. Абдулрахман, В. А. Скороходов (Ростов-на-Дону)
abdulrahm.haidar@gmail.com, pdvaskor@yandex.ru

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ РЕСУРСНОГО ПОТОКА В ДВУХРЕСУРСНЫХ СЕТЯХ

Рассмотрим ресурсные сети, вершинам v_i которых приписаны неотрицательные числа q_i^1 и q_i^2, изменяющиеся в дискретном времени и называемые величинами соответственно первого и второго ресурса в вершине v_i. Состоянием сети в момент времени t называется вектор

$$Q(t) = \left(\begin{pmatrix} q_1^1(t) \\ q_1^2(t) \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} q_2^1(t) \\ q_2^2(t) \end{pmatrix}; \ldots; \begin{pmatrix} q_n^1(t) \\ q_n^2(t) \end{pmatrix} \right)$$

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. *Для однородной двусторонней полной сети с двумя ресурсами и для любого суммарного ресурса $W = W_1 + W_2$ если последний меньше либо равен суммарной пропускной способности в сети, тогда при любом начальном состоянии, первый и второй ресурс равномерно распределяются в вершинах сети. Их величины для каждой вершины соответственно равны $\frac{W_1}{n}$ и $\frac{W_2}{n}$. В противном случае при любом начальном состоянии сети, в котором хотя бы в двух вершинах ресурсы не равны, выравнивание ресурсов не происходит.*

Теорема 2. *В несимметричной двусторонней полной сети с петлями, двумя ресурсами и одной пропускной способностью для любого начального состояния и любого суммарного ресурса $W = W_1 + W_2$, существует такой момент времени, после которого выполняются, что сумма первого и второго ресурса ($q_i = q_i^1 + q_i^2$) меньше, чем сумма входной пропускной способности для каждой вершины v_i некоторого подмножества вершин сети.*

Разработаны методы нахождения порогового значения и предельного состояния в несимметричных двусторонних полных сетях с петлями, двумя ресурсами и двумя пропускными способностями, где пороговое значение является количеством первого ресурса, для которого первый ресурс и второй ресурс распределяются независимо друг от друга.

В. А. Батищев (Ростов-на-Дону)
batishev-v@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ СПИРАЛЬНЫХ ВОЛН В АОРТЕ

Спиральные течения крови в крупных кровеносных сосудах активно изучаются со второй половины прошлого столетия. Существует ряд причин вращательных течений крови, например, в левом желудочке сердца это закрученная форма стенок желудочка.

В докладе приводится математическая модель коротких спиральных волн в аорте, построенная совместно с профессором Ю.А. Устиновым. Модель основана на уравнениях Навье-Стокса и уравнениях тонкой упругой изотропной оболочки. Спиральные волны в восходящей аорте вызваны закрученным потоком крови, поступающим из левого желудочка сердца.

Эксперименты показали, что в аорте можно выделить средний стационарный поток жидкости. Этот поток моделируется в первом случае течением Пуазейля, а во втором случае - равномерным потоком жидкости, ограниченным пограничным слоем Блазиуса на стенках сосуда. На фоне этого потока выделяются длинные пульсовые продольные и спиральные волны.

Спиральные волны рассчитаны численными и асимптотическими методами. Показано, что длинные спиральные волны локализованы в пограничном слое вблизи стенок аорты и вызваны упругими свойствами стенок сосудов. Короткие спиральные волны заполняют все поперечное сечение кровеносного сосуда. Кроме этих волн, рассчитаны и квазистационарные моды, которые в главном приближении не зависят от времени.

Показано, что комбинации спиральных мод приводят к различным способам закручивания жидкости во время систолы. Систола - это одна из фаз сердечного цикла, а именно, сокращение сердца. Рассчитан один из вариантов закручивания жидкости во время систолы, когда жидкость вращается в одном направлении, кроме небольшого промежутка времени, в течение которого возникает обратное вращение. Этот режим описан в литературе и подтвержден экспериментально. Показано, что стационарный поток и длинные продольные волны являются механизмом переноса коротких спиральных волн.

Н. В. Боев (Ростов-на-Дону)
boyev@math.rsu.ru

КОРОТКОВОЛНОВАЯ ДИФРАКЦИЯ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ НА ТРОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ШАРОВЫХ ПРЕПЯТСТВИЙ В УПРУГОЙ СРЕДЕ [1]

Методами геометрической теории дифракции (ГТД) исследована задача о прохождении плоской упругой продольной волны через троякопериодическую систему твердых шаровых включений, находящихся в кубе из упругого материала. С одной из этих граней в куб вводится плоская высокочастотная, монохроматиче-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (грант № 15-19-10008).

ская продольная упругая волна, а на противоположной грани принимается прошедшая продольная волна. Падающая плоская упругая волна заменяется набором точечных источников сферических продольных волн. Каждую сферическую волну, распространяющуюся в телесном угле с вершиной в источнике, направленном в сторону препятствий и стягивающимся полусферой заменяем системой соответствующих радиальных лучей распространения продольной волны. Таким образом, проблема сводится к исследованию задачи коротковолновой дифракции упругих волн в локальной постановке. Суммарное поле на грани приема распространяющихся упругих волн складывается из лучей, прошедших через систему шаров, которые могут быть трех типов: лучи, прошедшие через систему препятствий без дифракции; лучи, отразившиеся от системы один или конечное число раз. Однократная и многократная дифракция продольной волны исследуется в рамках модификации интегрального представления перемещений в отраженной волне физической теории дифракции Кирхгофа. Получено аналитическое выражение главного члена асимптотики перемещений в точке приема многократно отраженной продольной волны, которое соответствует ГТД. Таким образом, в локальной постановке задачи для каждого луча расчет перемещений в прошедшей упругой продольной волне на грани приема проходит в два этапа. На первом этапе решается геометрическая задача. Рассчитываются траектории каждого однократно или многократно отраженного луча. На втором этапе на основе полученных явных выражений вычисляются радиальные перемещения в точках приема однократно и многократно отраженных лучей и вычисляется суммарное поле перемещений в прошедшей продольной упругой волне.

V. A. Getman (Rostov-on-Don, Russia)
vagetman@sfedu.ru

LONG PULSE WAVES IN BLOOD VESSEL

Long waves in a fluid which fills a cylindrical tube with elastic border have been studied by many authors since the end of the nineteenth century [1, 2]. An important contribution to the study of the theoretical aspect was made by the Russian physicist I.S. Gromeka [2]. Literature review on this subject is provided in a well - known monograph by T.Pedley "Hydrodynamics of large blood vessels"(1983) [1].The calculated phase velocity of the waves in a liquid in an elastic tube is well proved experimentally. Prof. Ustinov Yu.A. was the first to investigate long helical waves in a blood vessel with the anisotropy of walls [3].

Long longitudinal and spiral waves were calculated on the basis of the Navier-Stokes's system and the dynamic equations of a thin elastic isotropic membrane, taking into

consideration infinitesimality of a viscosity coefficient. Some small parameters arise upon transition to dimensionless variables. The parameter connected with viscosity is proportional to the thickness of the boundary layer arising by the wall. The second small parameter is inversely proportional to the phase speed of the Mouensa-Kortevega wave. A well-known method to calculate long waves with the use of a slow axial coordinate is applied. Asymptotic expansions are presented in the form of a series based on the degrees of the second-order small parameter. In the main approach there is a linear problem which serves the basis to calculate the long waves propagating in the steady flow. The velocity vector of this flow has only one nonzero component (Poiseuille's parabola), directed along the cylinder axis. It is shown that amplitude longitudinal velocity component at the beginning of a systole grows in time, reaches a maximum, and further on, in the second half of a systole, decreases to zero. At the end of a systole there is a inverse flow zone, this zone being localized in a boundary layer. The speed of a countercurrent tends to zero when it leaves the boundary layer, and approaches a vascular wall.

REFERENCES

1. *Pedley T.* Hydrodynamics of large blood vessels. // - Academic Press, 1983. 400 p.

2. *Gromeka I. S.* The velocity of spread of the wave-like movement of fluids in elastic tubes - Collected Works. Izd. USSR Academy of Sciences, 1952. p.172-183.

3. *Ustinov Y. A.* Model of helical pulse motion of blood in the arterial vessels // DAN. 2004. T. 398. № 3. Pp. 71-76.

М. Е. Гришанов, В. А. Родин (ВГУ и ВИ МВД России)
rodin_v@mail.ru

О ТОЧКАХ ФЕРМА-ШТЕЙНЕРА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Введение. *На плоскости даны три точки A, B и C не лежащие на одной прямой. Найти точку M, сумма расстояний от которой до этих точек была бы минимальной.*

Эта задача Ферма-Торричелли-Штейнера насчитывает более 350 лет. Она получила огромное прикладное значение после широкого применения сетей Штейнера [1,2], причем в разных задачах расстояние между объектами в сети измерялось в различных метриках.

Для общего числа точек $n \geq 4$ аналитического решения в общем случае, для определения координат точки (ФШ) с оптимальной суммой до фиксированных точек в настоящее время нет. Частичное решение есть в работе [3].

Рассмотрим известные пространства l_p^N, $1 \le p \le \infty$. С метриками

$$\left\|\overrightarrow{C}\right\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{N} |c_k|^p\right)^{1/p} \quad \text{для} \quad 1 \le p < \infty, \qquad \text{и} \quad \left\|\overrightarrow{C}\right\|_{l_\infty} = \max |c_k|.$$

Задача 1. *В координатных банаховых пространствах определить координаты точки M, сумма расстояний в различных метриках от которой до фиксированных n точек $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ минимальна.*

В докладе отмечено, что построен алгоритм численного определения координат точки (ФШ) для произвольной метрики, например для пространств l_p, $1 \le p \le \infty$.

Метрики в конечномерном пространстве эквивалентны.

Задача 2. *При каких условиях координаты точки Ф.Т.Ш. будут различны при измерении расстояний в различных метриках в многомерном пространстве? И когда эти точки совпадут.*

Утверждение. *Для правильных многоугольников с числом вершин $n = 2k$ точки в задаче (ФШ) в метриках l_1, l_2, l_∞ совпадают, а для номеров $n = 2k+1$ координаты их различны.*

Утверждение легко получить, рассматривая симметрию относительно образующих единичных “шаров” в пространствах l_1, l_2, l_∞.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Иванов А. О. , Тужилин А. А.* Теория экстремальных сетей. — Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – ISBN 5-93972-292-X

2. *Протасов В. Ю.* Максимумы и минимумы в геометрии. Библ. “ Мат. Об” Вып.31. Изд. Моск. Ц. непр. мат. Обр. Москва 2005. С. 55.

3. *Уланов Е. А., Утешев А. Ю.* Аналитическое решение обобщенной задачи Ферма-Торричелли-Штейнера. // Процессы управления и устойчивость: Труды 42-й международной научной конференции аспирантов и студентов. Под ред. А. С. Ерёмина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2011. С. 201–206.

А. В. Дереза (Симферопроль)
gdevredina@ukr.net

ОБ УСЕЧЕННОЙ МАТРИЦЕ ИНЦИДЕНТНОСТИ МОДЕЛИ ДИСКРЕТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В работе в качестве математической модели, позволяющей моделировать сложные дискретные динамические системы с параллелизмом, рассматривается модель Петри со временем — временная сеть Петри. При этом, исследуя возможности редуцирования детальной модели Петри исследуемой дискретной динамической системы с помощью выделения в ней составных компонент [1] и получения редуцированной модели — компонентой сети Петри со временем [2], получен новый инструмент установления структурных свойств временной сети Петри исследуемой системы — усечённая матрица инцидентности.

Усечённая матрица инцидентности временной сети Петри, относительно матрицы инцидентности детальной временной сети Петри исследуемой системы, представляет собой матрицу, с меньшим числом строк, что достигается введением правила "склеивания". По этому правилу происходит "склеивание"тех строк исходной матрицы инцидентности детальной временной сети Петри, которые соответствуют местам, обладающим общим временным свойством получения и лишения фишек.

Инструмент — усеченная матрица инцидентности позволяет исследовать структурные и динамические свойства исходной детальной модели дискретной динамической системы. При этом размер матрицы инцидентности уменьшен на число одновременно функционирующих участков детальной временной сети Петри, выделение которых учитывает специфический способ функционирования этой сети, моделирующей систему с параллелизмом. Что на этапе получения структурных характеристик исключает "лишние"последовательности срабатываний переходов детальной временной сети Петри.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лукьянова Е. А.* О компонентном моделировании систем с параллелизмом // НаУКМА. Компьютерные Науки, 2012. № 121.

2. *Дереза А. В.* Определение временной компонентной сети Петри для различных путей ее построения. // Научные записки Таврического Национального университета им. В.И. Вернадского, 2014. Т. 27(67), № 1. С. 211–221.

I. M. Erusalimskiy (Rostov-on-Don, Russia)
dnjme@math.sfedu.ru

GRAPH-LATTICE. WAYS AND RANDOM WALKS

Graf-lattice has vertices at the points of the plane with integer coordinates i.e. in the set $Z \times Z$, where Z - the set of integers. From each vertex of the first quadrant ($Z_+ \times Z_+$, where Z_+- the set of non-negative integers) leaves two arcs: horizontal and vertical neighboring vertices (right and top). In each of the other quadrants the graph-lattice locally isomorphic to its subgraph on the first quadrant. On the arcs of the graph- lattice defined of transition probabilities. The transition probabilities for the arcs coming out of the vertex are equals and are equal to the “one” divided by “the number of arcs coming out of this vertex. Therefore, the transition probabilities on the arcs emanating from the origin are equal $^1/_4$, on the edges, leaving the vertices lying on the coordinate axes are equal $^1/_3$ and are equal to $^1/_2$ for arcs leaving from the another vertices. The lengths of all arcs are equal to one.

The problem of the number of paths of the length n, leaving from the vertices of the graph. It is proved that the number of such paths, emanating from the origin, is equal to $4(2^n-1)$, from the vertices lying on the coordinate axes – $2^{n+1}-1$, from the vertices, lying inside the quadrants, – 2^n.

The same problem is considered in the case of restrictions on reachability of two types: magnetic and mixed (see [1]) when restrictions are generated by either the vertical or horizontal arcs of the graph-lattice.

We also consider the problem of the random walk on the tops of the graph-lattice without restrictions on the reachability and with restrictions. In the first case, this process is a Markov process, and if there are restrictions on reachability it is not a Markov process. The results are an extension of the results of [2].

REFERENCES

1. *Erusalimskyi I. M., Skorohodov V. A., Kuzminova M. V., Petrosyan A. G.* Graphs with a non-standard reachability. Problems and application (Rus.)/ Rostov-on-Don: Southern Federal University, 2009.

Н. С. Орлова, М. В. Волик (Владикавказ)
norlova.umi.vnc@gmail.com, volikmv@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ОБВАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНТИНУАЛЬНОГО ПОДХОДА [1]

В настоящее время оценка размеров зон поражения, вызванных обвалами массы горных пород, представляется актуальным научно-практическим исследованием. Осуществить такое исследование возможно с использованием математического моделирования. На сегодняшний день для описания обвалов используются, в основном, только дискретные модели, которые описывают движение потока в виде движения совокупности отдельных структурных частиц. При этом отсутствует математическая модель, учитывающая ожижение обломков, вызванное их хаотическим движением. Кроме того, дискретные модели позволяют моделировать ограниченное количество движущихся обломков.

В данной работе для описания движения обвалов используется двухжидкостная модель, когда движение потока вещества представляется в виде сплошной среды. Рассматривается движение двух фаз - газовой и твердой. Для описания ожижения обломков горной породы в процессе их движения по склону используется кинетическая теория гранулярного газа, которая учитывает хаотическое движение обломков (вследствие их столкновений друг с другом и с поверхностью склона) как в плотном, так и в разреженном состоянии.

Задача решалась в двумерном приближении. Рассматривался склон, сопряженный с горизонтальными участками рельефа.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-35-00147).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Михайлов В. О.* Классификация численных математических моделей селевых и склоновых процессов // Инженерная геология. 2011. № 3. С. 56–63.

2. *Rammer W., Brauner M., Dorren L., Berger F., Lexer M.* Evaluation of 3-D rockfall module within a forest patch model // Natural Hazards and Earth system Sciences. 2010. № 10.P. 669–711.

3. *Михайлов В. О.* Трехмерная математическая модель обвальных процессов // Вестник Московского университета. Серия 5. География. 2011. № 4. С. 53–58.

В. И. Субботин (Новочеркасск)
geometry@mail.ru

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МНОГОГРАННИКОВ С РОМБИЧЕСКИМИ ВЕРШИНАМИ

Рассматриваются замкнутые выпуклые многогранники с ромбическими вершинами в трёхмерном евклидовом пространстве.

Определение 1. *Вершина многогранника называется ромбической, если её звезда состоит из равных одинаково расположенных ромбов.*

Определение 2. *Ромбическая вершина называется симметричной, если она расположена на оси вращения многогранника.*

Определение 3. *Ромбическая вершина называется изолированной, если её звезда не имеет общих элементов со звездой любой другой ромбической вершины многогранника.*

Если рассматривать многогранники, каждая вершина которого является симметричной ромбической, но не изолированной, то, как известно, класс таких многогранников исчерпывается двумя многогранниками: ромбическим додекаэдром и ромботриаконтаэдром.

Примером многогранника с изолированными симметричными ромбическими вершинами является один из параллелоэдров-удлинённый ромбический додекаэдр: через каждую его шестиугольную грань проходит ось вращения многогранника.

В работе доказано,что многогранник с шестиугольными гранями, отделяющими симметричные изолированные ромбические вершины, является либо удлинённым ромбическим додекаэдром, либо дважды усечённым икосаэдром. Кроме того, показано, как при помощи двух последовательных преобразований удлинения ромбоэдра можно получить ромбический додекаэдр.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Долбилин Н. П.* Параллелоэдры: ретроспектива и новые результаты. // Труды Московского математического общества. 2012. Т. 73, № 2.. С. 259–276.

Т. К. Узаков (Симферополь)
timur.uzakov@gmail.com

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА РЕГИОНА С УЧЕТОМ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО КАПИТАЛА

Изучается проблема математического моделирования экономического роста региона с учетом человеческого капитала. Человеческий капитал (см. [1]-2]) является интенсивным производительным фактором экономического развития, включающий высококвалифицированную часть трудовых ресурсов, знания, инструментарий интеллектуального и управленческого труда, среду обитания и трудовой деятельности. Поэтому в последнее время большое внимание уделяется проблемам влияния человеческого капитала на развитие региональной экономики, в том числе и динамическому моделированию как одному из наиболее эффективных методов исследования качественных и количественных характеристик поведения сложных экономических и социальных систем.

Составим мультипликативную трехфакторную производственную функцию неоклассического типа:

$$Y(t) = A(t) \cdot K(t)^{\alpha} \cdot [L(T) \cdot H(t)]^{1-\alpha}, \;\; 0 < \alpha < 1. \tag{1}$$

Здесь: $Y(t)$ — функция выпуска, $K(t)$ — капитал, $H(t)$ — человеческий капитал, $A(t)$ — технический прогресс, $L(t)$ — труд, t — время, α — эластичность капитала.

Введем обозначения: $\lambda = A'(t)/A(t)$, $y = Y(t)/(A(t)L(t))$, знания $k = K(t)/(A(t)L(t))$, трудовые навыки $l = 1/A(t)$, $h = H(t)/(A(t)L(t))$.

Приведем модель (1) к дифференциальному виду

$$\frac{Y'(t)}{y} = \lambda + \alpha\frac{K(t)}{k} + (1-\alpha)\frac{L'(t)}{l} + (1-\alpha)\frac{H'(t)}{h}. \tag{2}$$

С использованием дифференциальной модели (2) и статистических данных было исследовано динамическое поведение экономического роста Крыма.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Корчагин Ю. А.* Российский человеческий капитал: фактор развития или деградация? Воронеж: ЦИРЭ, 2005. 252 с.

2. *Макаров В. Л.* ОЭкономика знаний: уроки для России // Вестник РАН. 2003. Т. 73, No 5. С. 450–456.

Б. Я. Штейнберг, Ж. М. Абу-Халил, М. Г. Адигеев, А. А. Бут, А. В. Гутников, А. В. Керманов, А. П. Крошкина, Е. А. Пшеничный, Г. В. Раманчаускайте, Д. Е. Романов (ЮФУ, Ростов-на-Дону)
rdme@ya.ru

ПАКЕТ ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ГЕНОМНЫХ ДАННЫХ

Представлен пакет высокопроизводительных программ для работы с нуклеотидными последовательностями. Пакет разрабатывается в Южном Федеральном Университете. В пакет входит несколько модулей для ряда задач биоинформатики, включая современные постгеномные задачи. Наиболее ресурсоемкие расчеты оптимизированы с помощью специальных структур данных и параллельного выполнения. Часть модулей доступна по сети (http://mmcs.sfedu.ru/bio/).

Пакет включает в себя две реализации алгоритма парного выравнивания (параллельный блочный и параллельный блочный с оптимальным использованием памяти) и учитывает возможности мультипроцессорных систем и ускорителей.

Тесты производительности показали, что выигрыш в производительности первого алгоритма по сравнению с классическим алгоритмом Нидлмана-Вунша может достигать 60% и по сравнению с программой EMBOSS — 30%. Второй алгоритм выравнивает длинные последовательности быстрее, чем EMBOSS Stretcher на 40%.

Модуль поиска мотивов для ускорения работы использует обобщенные суффиксные деревья ограниченной глубины, что позволяет достичь ускорения в определенных ситуациях до 10–20 раз. Ускорение программы поиска повторяющихся участков генома реализовано на основе VP-дерева.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Steinberg B. J., et al.* A package of fast tools for genomic sequence analysis // International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, v. 10, 2016, p. 42-50. ISSN: 1998-0140.

2. *Адигеев М. Г., Бут А. А.* Анализ эффективности суффиксных деревьев для решения некоторых задач биоинформатики // Современные проблемы науки и образования. 2012. № 6. URL: www.science-education.ru/106-7418

3. *Абу–Халил Ж. М, Морылев Р. И., Штейнберг Б. Я.* Параллельный алгоритм глобального выравнивания с оптимальным использованием памяти. // Современные проблемы науки и образования. 2012. № 6. URL: http://www.science-education.ru/107-8139

Секция VI

Интеллектуальный анализ данных

A. V. Abramyan, L. S. Chernova
(Southern Federal University, Russia)
avabramyan@sfedu.ru, chernova_l.s@list.ru

MACHINE LEARNING APPROACH FOR SOLUTION OF THE HANDWRITTEN DIGITS CLASSIFICATION PROBLEM

We solve the problem of creating and training the neural network [1], [2], designed for classification of handwritten digits images.

The investigation was done using MatLab computing environment.

As input data there was used a set of marked 5000 grayscale images of handwritten digits of 20×20 pixel size. The regularized logistic regression model was used to solve the problem. As an activation function there was selected the exponential sigmoid function.

There was constructed a neural network with the following architecture:

1) the first (input) layer consists of 401 neurons (corresponding to the number of pixels in the input image and bias);

2) the second (hidden) layer;

3) third (output) layer of 10 neurons (corresponding to the number of markers).

To configure the network weights, there was used the backpropagation algorithm [3].

The database elements were randomly permuted. The first 4000 marked images were taken as the training set, the remaining marked images were used as the test set.

After 50 iterations the training accuracy was about 95.5%, the test accuracy was about 92.5% (this may vary up to ±1% due to randomization of the input). The higher accuracies may be obtained by training the neural network using more iterations. For instance, after 1000 iterations the training accuracy becomes about 99.5%, the test accuracy becomes about 94%.

REFERENCES

1. *Haykin S.* Neural Networks: A Comprehensive Foundation. M: Williams, 2006.
2. *Galushkin A. I.* Neural network: basic theory. Moscow, Telecom, 2012 (Russian).
3. *Galushkin A. I.* Synthesis of multilayer pattern recognition systems. Moscow, Energiya, 1974 (Russian).

G. I. Beliavsky, E. V. Puchkov (Rostov-on-Don, Russia)
beliavsky@hotmail.com

THE DEEP LEARNING:TWO PROBLEMS [1]

We must to evaluate the $\min F(w) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} f_i(w)$ on the deep learning. The N is the sample value, $w \in R^d$ is the weight vector of the neural network. If we will use the

[1]The reported study was partially supported by RFBR, research project No. 14-01-00579 a.

gradient method: $w_{k+1} = w_k - \alpha_k \nabla F(w_k)$, then we will face with two problems. The iteration price of the G-method is $NL(D)$, $L(D)$ - number of operations for the gradient evaluation. For the deep neuron net N and $L(D)$ are large. Look for on the first problem (large N). The stochastic gradient method (Robins and Monro, 1951) is an alternative to the gradient method. The iteration step is: $w_{k+1} = w_k - \alpha_k \nabla f_\xi(w_k)$. The random variable ξ is uniform distributed on the set **N**={1,...,N}. The iteration price of the SG-method is $L(D)$. The error for the G-method is $r_k = F(w_k) - F(w_*) = O(C^k), 0 < C < 1$ and is $r_k = EF(w_k) - F(w_*) = O(1/k)$ for the SG-method. The difference between the geometrical and the linear speed of the convergence can compensate the difference between iterations prices. The stochastic average gradient method (SAG, Shmidt at all, 2013) is a compromise between the speed and the memory. On the first step we evaluate the N components $y_i^1 = \nabla f_i(w_0)$, the first direction $g_1 = \dfrac{1}{N}\sum_1^N y_i^1$, and the first approximation $w_1 = w_0 - \alpha_1 g_1$. On the iteration step we evaluate the next direction, the next approximation: $g_k = g_{k-1} - \dfrac{1}{N} y_{\xi_k}^{k-1} + \dfrac{1}{N}\nabla f_{\xi_k}(w_{k-1})$, $w_k = w_{k-1} - \alpha_k g_k$, and change the one component: $y_{\xi_k}^k = \nabla f_{\xi_k}(w_{k-1})$. The sequence ξ_k is i.i.d. with common distribution as ξ. For SAG the memory size is ND and the convergence is the same as the gradient method. The modified SAG is SAG with step-by-step accumulation of components. On the first step $y_{\xi_1}^1 = \nabla f_{\xi_1}(w_0)$, $y_i^1 = 0$ for $i \neq \xi_1$. The first direction is $g_1 = \nabla f_{\xi_1}(w_0)$, the first approximation $w_1 = w_0 - \alpha_1 g_1$. On the iteration step: $g_k = \dfrac{1}{m_k}(m_{k-1} g_{k-1} - y_{\xi_k}^{k-1}) + \dfrac{1}{m_k}\nabla f_{\xi_k}(w_{k-1})$, $w_k = w_{k-1} - \alpha_k g_k$, and change the one component: $y_{\xi_k}^k = \nabla f_{\xi_k}(w_{k-1})$. The normalize factor $m_k = \begin{cases} m_{k-1}, y_{\xi_k}^{k-1} \neq 0 \\ m_{k-1}+1, y_{\xi_k}^{k-1} = 0 \end{cases}$, $m_1 = 1$. This method is faster then SAG on first iterations and is same as SAG on large iterations. The second problem is the large number calculation to evaluate the gradient $\nabla f_i(w)$ in any point w. To solve the second problem we will change the gradient on the empirical gradient. For this let's consider the point w neighborhood: $B_h(w) = \{v \in R^D : |v_i - w_i| \leq h\}$, and select the subset $P_h(w) = \{z_j\}$ of the orthogonal, $(z_j - w, z_k - w) = \delta_{j,k}$, boundary points of the neighborhood $B_h(w)$, $|P_h(w)| = D$. Let's vectors $z_j = w + hu_j$. The components vectors u_j equal -1,0 or 1. To construct orthogonal vectors u_j we can use the Harr algorithm. The empirical gradient $\tilde{\nabla} f_i(w) = \dfrac{1}{h} A^{-1} U F_i$. The matrix A is the diagonal matrix with diagonal elements $a_j = (u_j, u_j)$, columns of the matrix U is u_j, and components of the vector F_i: $F_{i,j} = f_i(z_j)$. Matrix A and matrix U are not depending on the iteration, and the calculation price of the empirical gradient is $O(D^2)$. Thus we announce the deep learning method, which decide two problems of the iteration price. The iteration price of this method is $O(D^2)$.

В. М. Деундяк (Южный федеральный университет), М. А. Жданова (Южный федеральный университет), Могилевская Н. С. (Донской государственный технический университет)
vlade@math.rsu.ru, mary.zhdanova@gmail.com, broshka@nm.ru

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ ВЫБОР МОДЕЛИ ПОТОКА ОШИБОК В ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ ОЦЕНКИ ПРИМЕНИМОСТИ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОГО КОДИРОВАНИЯ

Для решения задачи согласования параметров помехоустойчивого кодека и характеристик канала связи удобно использовать информационные системы оценки применимости схем алгебраического помехоустойчивого кодирования (ИС ОПСАПК), основанные на имитационном моделировании помехоустойчивых каналов связи (например, ИС «Канал» [1]). При составлении эффективной пары кодек-канал для заданного канала связи важно, чтобы модель канала связи в ИС была адекватна реальному каналу, для которого подбирается кодек. Поэтому необходимо уметь подбирать модель потока ошибок для реального канала передачи данных. Решение этой задачи в общем случае затруднительно, однако возможно в частных случаях, например, для скрытых полумарковских моделей [2].

В докладе рассказывается о модификации структуры ИС ОПСАПК с учетом использования скрытых полумарковских моделей в качестве базовых моделей источников ошибок и применения метода подбора модели источника ошибок для конкретного канала связи.

Результаты работы частично опубликованы в [1], [2], [3].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Могилевская Н. С., Чугунный К. А.*Особенности реализации механизма подключения библиотек сторонних разработчиков в информационной системе «Канал» // Вестник Донского гос. техн. ун-та. 2015. № 3.

2. *Zhdanova M. A.* Inverse problems of HSMM-based mathematical modeling of jamming environment// Proceedings of the Modern methods, problems and applications of operator theory and harmonic analysis, April, 2015 - P. 185

3. *Деундяк В. М., Жданова М. А., Могилевская Н. С.* Об автоматизированном выборе модели потока ошибок информационной системе оценки применимости помехоустойчивого кодирования //Труды научной школы И. Б. Симоненко. Выпуск 2 / под ред. М. Э. Абрамяна, Я. М. Ерусалимского, В. С. Пилиди, Б. Я. Штейнберга; ЮФУ. – Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2015. — С. 116–125.

М. Н. Игнатьева (Москва)
mariyaignatieva@mail.ru

РАЗВИТИЕ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ Q-ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Интеллектуальный анализ данных является одним из важных и современных направлений развития технологий искусственного интеллекта. Его характерным признаком является обработка информации с выявлением в ней глубинных ключевых признаков на основе использования нетривиальных и нестандартных приемов анализа, использующего неклассические приемы вычислений[1].

Математическими моделями широкого класса задач интеллектуального анализа данных являются системы линейных уравнений. [1,2]. Их реализация связана с неполнотой исходных данных, что затрудняет использование традиционных алгоритмов их решения. Основным фактором, препятствующим точному решению, является плохая обусловленность задачи. В работе предложена модификация вариационных методов решения СЛАУ с использованием аппарата q-исчисления [2,3]. Она заключается в изменении подхода к расчету их параметров, таких, как шаг спуска. Показано, что порядок q-производной, фигурирующей в итерационном процессе, может зависеть от дополнительных условий связи между решениями на текущей и следующей итерациях. Это делает метод близким к методикам решения СЛАУ, использующим сопряженные направления. При проведении численного эксперимента показано, что предложенный подход для ряда задач может повысить точность решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Паклин Н. Б. Орешков В. И.* Бизнес-аналитика: от данных к знаниям. Питер, 2013.
2. *Шарый С. П.* Курс вычислительных методов. Учеб. пособие. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т., 2014.
3. *Кац В. Г., Чен П.* Квантовый анализ М.: МЦНМО, 2005.

Е. А. Лукьянова (Симферополь)
lukyanovaea@mail.ru

О РЕДУЦИРОВАНИИ, ЯЗЫКАХ И СМЕЖНЫХ ВОПРОСАХ СЕТЕЙ ПЕТРИ

При моделировании функционирования параллельных распределённых систем приходится сталкиваться с так называемой проблемой "взрыва состояний", когда полная модель системы становится необозримо большой. Что является серьёзной проблемой для дальнейшей верификации детальных моделей реальных систем. Применение для моделирования параллельных распределённых систем компонентных сетей Петри [1, 2] позволяет строить адекватные редуцированные модели. Изучение [3, 4] и сравнение языков построенных моделей (исходной детальной и её редуцированной сетей Петри) позволяет исследовать поведенческие свойства моделей и осуществлять поиск трасс приводящих к ошибочным состояниям.

В продолжении изучения вопроса о том насколько "схожи"языки детальной модели исследуемой системы и её редуцированной компонентной модели, вводится понятие подобия языков сетей Петри, как преобразования языков сетей Петри, определённых над одним и тем же алфавитом, позволяющего восстанавливать язык одной сети Петри по языку другой. Устанавливается, что рассматриваемое преобразование является сюръективным гомоморфизмом и, что по языку редуцированной модели (компонентной сети Петри) можно восстановить язык её детальной модели Петри исследуемой системы, что позволит проводить качественный анализ языков рассматриваемых сетей Петри.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лукьянова Е. А.* О структурных элементах компонентной сети Петри // Проблеми програмування. 2012. № 2-3. С. 25–32.

2. *Лукьянова Е. А., Дереза А. В.* Исследование однотипних структурних элементов CN-сети в процессе компонентного моделирования и анализа сложной системы с параллелизмом // Кибернетика и системный анализ. 2012. № 6. С. 20–29.

3. *Лук'янова О. О.* Про зв'язок мови CN-моделі з компонентами-переходам і мови детальної моделі Петрі паралельної розподіленої системи // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. 2012. № 4. С. 145–150.

4. *E. Lukyanova* Component modeling: on connections of detailed Petri model and component model of parallel distributed system // ITHEA. 2013. Vol. 2, №1. P. 15-22.

T. S. Lushpanova, V. S. Pilidi
(Southern Federal University, Russia)
tsharenko@gmail.com, pilidi@sfedu.ru

ON SOME ALGORITHMS OF EDGE DETECTION IN THE PRESENCE OF NOISE

Edge detection is one of important steps in the problems of digital image processing, image recognition and in the computer vision in general. The aim of edge detectors is to find the points of the image in which there is a sharp change of brightness. These points should be further combined in lines, which form the edges in the image. The presence of the noise may complicate significantly the given problem [1].

The edge detection methods may be divided into several categories [2]. We mention the following approaches: methods based on the search for maxima, methods based on the search for zeroes, statistical methods, methods using fuzzy logic, methods using dispersive phase stretch transform.

In this investigation, the edge detection is used at the stage of preparation of initial data for detection of objects on X-ray images with the aid of the generalized

Hough transform [3], whose temporal and spatial complexity depends essentially on the number of points of interest on the image, so it is important to define the exact boundaries in the noisy images. The features of the given application area also requires the correct detection of the rounded borders as well as of the boundaries of varying contrast.

We have implemented various methods of edge detection including the approaches mentioned above. Evaluation of their advantages and weaknesses was made empirically using the experimental set of images. The obtained results may be the basis for the design of an automatic system for analysis of medical X-ray images.

REFERENCES

1. *Canny J.* A computational approach to edge detection. IEEE Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1986. Vol. 8, No. 6. P. 679–698.
2. *Maini R., Aggarwal H.* Study and comparison of various image edge detection techniques. International Journal of Image Processing. 2009. Vol. 3, No. 1. P. 1–11.
3. *Pilidi V. S., Sharenko T. S.* A modified Hough algorithm for pattern detection on the medical X-ray images. Proc. of the scientific school of I. B. Simonenko. Issue 2. 2015. Rostov-on-Don. Publishing House of Southern Federal University. P. 270–278.

А. А. Остапец (Москва)
aostapec@mail.ru

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ АВТОМАТИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ТОВАРОВ НА ОСНОВЕ ТЕКСТОВОЙ ИНФОРМАЦИИ

Автоматическая классификация товаров по категориям является важной частью жизненного цикла товаров в электронной коммерции и используется для многих последующих этапов работы с товаром, таких как поиск подходящих товаров, рекомендациях похожих товаров, построение каталогов и т.п.. Эта задача может быть сформулирована как задача обучения с учителем, где категории товаров являются целевым классом, а признаками - некоторые атрибуты, извлеченные из текстовых описаний товаров. Большое количество классов (несколько тысяч) и наличие классов с маленьким числом объектов в обучающей выборке (например, всего один или два объекта) являются достаточно типичными особенностями подобных задач классификации текстов.

Доклад посвящён участию в Международном соревновании «cDiscount 2015 product classification», где решалась задача построения алгоритма, осуществляющего автоматическую классификацию товаров по категориям. Организаторы конкурса предоставили описания продуктов, расположенных на сайте [1] и задача соревнования заключалась в разработке системы, которая будет осуществлять автоматическую классификацию этих продуктов.

Для решения задачи использовались линейные модели (из библиотеки Liblinear [2]) в качестве базовых моделей. Финальное решение было взвешенной комбинацией нескольких базовых моделей. Для классификации использовался метод «один-против-всех», когда объекты одного класса отделяются от объектов всех остальных классов. Для построения решения использовался только анализ текстовых описаний продуктов (организаторы предоставляли и другие данные, например, фотографии продуктов, но в данном решении эти данные никак не использовалось). Описанное решение показало 66% точности на скрытой (private) тестовой выборке, что позволило автору занять 6 место (из 175 команд).

ЛИТЕРАТУРА

1. http://www.cdiscount.com

2. *Rong-En Fan, Kai-Wei Chang, Cho-Jui Hsieh, Xiang-Rui Wang, and Chih-Jen Lin* Liblinear: A library for large linear classification. The Journal of Machine Learning Research, 9:1871–1874, 2008.

E. V. Puchkov (Rostov-on-Don, Russia)
puchkoff@i-intellect.ru

MODERN NEURAL NETWORK METHODS FOR TIME SERIES PREDICTION

Time series are especially difficult to predict using the financial and economic data as distinct from climate data [1]. The reason is because time series data are often noisy, not-stationary, have high dimen-sionality and there are not always sufficient information for analysis.

Recurrent neural networks are often used for time series prediction. Some versions like Long Short-Term Memory (LSTM), as well as its generalization Gated Recurrent Unit (GRU) can be marked. Such RNN allow to store and use information about previous events for analysing subsequent events. This gives it a great advantage in comparison with other neural networks provided that there are time dependencies in the data [2]. Using of convolutional neural network (CNN) and its modifica-tions has become a non-standard way for time series prediction. In [3] has obtained good prediction results for trading strategy. CNN may also be useful for feature extraction and next using them as input data for LSTM. Another interesting approach in solving prediction problem is reinforcement learning [4], but significant results have not yet to be received. The behavior of reinforcement learner needs further analysis. It should be noted that the success of neural network applications depends on high-quality preparation of the training data, which can be done using wavelet transform or Kalman filter.

Modern neural network methods are not a panacea for prediction of complex time series. The combination of different neural network architectures and design methods provides a more powerful model, which in some cases can improve the quality of the prediction.

R E F E R E N C E S

1. *Silver N.* Signal and the Noise: The Art and Science of Prediction // Penguin Books Ltd. 2013.
2. *Chen K., Zhou Y., Dai F.* A LSTM-based method for stock returns prediction: A case study of China stock market // Big Data IEEE International Conference. 2015 P. 2823-2824.
3. *Mittelman R.* Time-series modeling with undecimated fully convolu-tional neural networks // arXiv preprint arXiv:1508.00317. 2015.
4. *Corazza M. Bertoluzzo F.* Q-Learning-based financial trading systems with applications // University Ca' Foscari of Venice, Dept. of Economics Working Paper Series. No. 15. 2014.

A. V. Raskin (Rostov-on-Don, Russia)
Raskin.anton.v@gmail.com
Ya. M. Demyanenko (Rostov-on-Don, Russia)
demyanam@gmail.com

AUTOMATIC ANALYSIS OF BLURRED IMAGES

The main aim of this research is based on comparison of image characteristics in order to find blurred image criteria. Such analysis is based on the appearance of the functions, defined in the area of oriented gradients histogram construction.

As the result of constructing and scrutiny of 200 images with different quality and resolution, authors find, that common symptom of indicating blurred images, is character of convexity or concavity of the gradient intensity values function.

If the image is sharp, it contains more abrupt tone transitions, so, the average values will dominate in the distribution of gradient intensities. As a result, function, describing such intensities, will be convex or it will be similar to linear function. If the image is blur, values of gradients intensity will be few on the whole image. So, the gradients intensity function will be "pulled up", thereby changing the nature of the convexity from a linear to concave function. Therefore, by increasing or decreasing the degree of the image blur, the function will change the nature of the concavity is directly proportional to image blur.

In more complicated situation - when image consists of blurred and sharp areas - the function of a gradient intensity distribution can have an uncertain character of convexity. The research found, that the gradient function changing of convexity is strictly relative to the linear function, defined on the interval from the histogram peak to its first zero value. Monitoring such changes of histogram intensities function with comparison to described line function, make it possible to calculate image blur factor.

This results made it possible to describe screening methods and write image filtering algorithm. The main qualities of proposed algorithm are high speed, flexibility, versatility to the input parameters, and a wide range of further modifications.

R E F E R E N C E S

1. *1. Chen Ming-Jun, Bovik. A. C.* No-reference image blur assessment using multiscale gradient. // EURASIP Journal on Image and Video Processing. Vol. 1. P. 1–11, 2011.

2. *Cannon M.* Blind Deconvolution of Spatially Invariant Image Blurs with Phase. // Acoustics, Speech and Signal Processing Vol. 24. P. 58–63, 1996.

Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — VI» в г. Ростове-на-Дону. Материалы конференции. Издательство: ООО «Фонд науки и образования», Ростов н/Д, 2016. — 170 с. ISBN: 978-5-9908135-0-2