Материалы докладов

международной конференции
Современные методы и проблемы
теории операторов и гармонического
анализа и их приложения — VIII
Ростов-на-Дону, 22-27 апреля 2018 года
www.otha.sfedu.ru/conf2018
E-mail: otha.conference@gmail.com

Ростов-на-Дону
2018

УДК 519.71:519.72:004

Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения

С 34: Материалы VIII международной конференции “Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения VIII” (г. Ростов-на-Дону, 22–27 апреля 2018г.) / Под редакцией Гиля А.В. — Электрон. текстовые дан. — Ростов н/Д: Издательство Ростовского отделения Российской инженерной академии, 2018. — 142 с. — Режим доступа: http://rozmisly.ru/, http://otha.sfedu.ru/upload/documents/abstracts/tethis_conf_2018_SFEDU.pdf

ISBN 978-5-6040259-4-9

Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis

Proceedings of the VIII international conference "Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis VIII"(Rostov-on-Don, 22 - 27 April, 2018).

ISBN 978-5-6040259-4-9

Table of content

Session I

Functional Analysis and Operator Theory

A. V. Abanin (Rostov-na-Donu, Russia)
avabanin@sfedu.ru

MINIMALITY OF OVERFULL REPRESENTING SYSTEMS AND RELATED PROBLEMS OF WEIGHTED FUNCTION SPACES

As is well known, representing systems of exponentials in function spaces are, as a rule, overfull, that is, we can remove from such a system any finite number of elements without loss of the property to be representing. It seems this implies that there is not any reasonable way to define a concept of minimality for such systems. But it is nevertheless possible for some model spaces such as the space of all holomorphic functions in a bounded convex domain. On the other hand, there is no such a way for the space of all entire functions.

The main problem we will discuss in the talk is the following. Given a function space, how to determine if there is a reasonable way to define minimal representing systems of exponentials or their analogs in this space? There will be presented a general approach and given an answer to this problem stated in terms of multipliers classes of dual weighted function spaces.

E. G. Bakhtigareeva (Moscow, Russia)
salykai@yandex.ru

AN OPTIMAL IDEAL SPACE FOR A CONE OF NONNEGATIVE GENERALLY DECREASING FUNCTIONS

Let $T_0 \in (0, \infty]$, $Y = Y(0, T_0)$ be an ideal space (shortly: IS), generated by an ideal quasinorm (shortly: IQN) ρ, let $M = M(0, T_0)$ be the set of measurable almost everywhere finite functions, $M_+ = \{f \in M : f \geq 0\}$. Let M_+ be ordered with the following order relation:

$$f \prec g \Leftrightarrow \int_0^t f d\tau \leq \int_0^t g d\tau, \quad f, g \in M_+(0, T_0), \quad t \in (0, T_0). \tag{1}$$

Consider the operator $(Bf)(t) = t^{-1} \int_0^t f d\tau : Y \to Y.$ (2)

Consider a cone of nonnegative generally decreasing functions

$$K = \left\{ h \in Y : h \geq 0, t^{-1} \int_0^t h d\tau \downarrow \right\}, \rho_K(h) = \rho(h), \quad h \in K. \tag{3}$$

Consider the operator $A_0 : M(0,T_0) \to M_+(0,T_0)$

$$(A_0 f)(t) = \left\| \tau^{-1} \int_0^\tau |f| d\xi \right\|_{L_\infty(t,T_0)}, \quad t \in (0,T_0). \tag{4}$$

Theorem 1. *Let $Y = Y(0,T_0)$ be an IS, generated by an IQN ρ, which is coordinated with order relation (1). Let K be a cone (3). Assume that restriction of operator (2) to cone (3) is bounded with the norm $\|\cdot\|_Y$. For $f \in M_+(0,T_0)$ consider the functional $\rho_0(f) = \rho(A_0 f)$. Here $A_0 f$ is an operator (4). Then, ρ_0 is an IQN, coordinated with order relation (1), and space*

$$X_0 = X_0(0,T_0) = \{f \in M(0,T_0): \quad \rho_0(|f|) < \infty\}, \textit{generated by} \quad \rho_0,$$

is an IS, moreover X_0 is an optimal IS among all ISs X such that $K \longmapsto X$ and $\|\cdot\|_X$ is coordinated with the operator A_0 in the following way:

$$\|f\|_X \le c_0 \|A_0 f\|_X .$$

REFERENCES

1. *E.G. Bakhtigareeva, M. L. Goldman.* Construction of an Optimal Envelope for a Cone of Nonnegative Functions with Monotonicity Properties. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2016. Vol. 293, pp. 37–55.

Hichem Ben-El-Mechaiekh (Department of Mathematics and Statistics, Brock University, Saint Catharines, Ontario, CANADA)
hmechaie@brocku.ca

GENERALIZED VARIATIONAL INEQUALITIES WITHOUT CONVEXITY

The talk discusses a general umbrella set-up for the well-posedness of generalized variational inequalities (GVIs) in the absence of convexity for both objectives and feasibility domains. The solvability of such GVIs calls upon far-reaching extensions of the Poincaré-Miranda theorem (an $n-$dimensional version of Bolzano intermediate value theorem) for the existence of equilibria for nonlinear set-valued operators defined on neighborhood retracts of arbitrary normed spaces and subject to non-smooth tangency conditions. Possible applications to non-convex optimization are also discussed.

REFERENCES

1. *Abdul Latif, Ben-El-Mechaiekh H.* Topological fixed point theory and applications to variational inequalities. Fixed Point Theory and Applications, Springer Open (2015) 1-26.
2. *Ben-El-Mechaiekh H.* Spaces and maps approximation and fixed points. J. Comp. Appl. Math **113** (2000) 283-308.
3. *Ben-El-Mechaiekh H., Kryszewski W.* Equilibria of set-valued maps on nonconvex domains. Trans. Amer. Math. Soc.**349**(1997) 4159-4179.
4. *Bounkhel, Jofre M. and A.* Subdifferential stability of the distance function and its applications to nonconvex economies and equilibrium. J. Nonlinear Convex Anal. **5** (2004) 331-347.
5. *Bothe D.* Multivalued differential equations on graphs and applications, Ph.D. thesis, Universit?at Paderborn, 1992.
6. *Cornet B.* Euler characteristic and fixed point theorems. Positivity **6** (2002) 243-260. 7. *Kryszewski W.* Topological structure of solution sets of differential inclusions: the constrained case. Abstract and Applied Analysis **6** (2003) 325-351

8. *Kryszewski W.* Graph-approximation of set-valued maps on noncompact domains. Topology and its Application **83** (1998) 1-21.
9. *Singer I.* Duality for nonconvex programming. CMS Books in Math. Halifax 2006.
10. *J. van Mill* Infinite dimensional topology. North Holland, Amsterdam 1989.

I. N. Braeutigam (Archangelsk, Russia), D. M. Polyakov (Vladikavkaz, Russia)
irinadolgih@rambler.ru, DmitryPolyakow@mail.ru

SPECTRAL ANALYSIS OF A FOURTH ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR WITH MATRIX COEFFICIENTS [1]

Let $L_2^k[0,1] = L_2[0,1] \times \dots \times L_2[0,1]$ (k times). The inner product in $L_2^k[0,1]$ is defined by

$$(f,g) = \sum_{i=1}^{k} (f_i, g_i), \quad (f_i, g_i) = \int_0^1 f_i(t)\overline{g_i(t)}\,dt, \quad f, g \in L_2^k[0,1].$$

We consider the operator $L : D(L) \subset L_2^k[0,1] \to L_2^k[0,1]$ determined by the differential expression

$$l(y) = y^{IV} - \mathfrak{A}(t)y'' - \mathfrak{B}(t)y$$

with the domain $D(L) = \{y \in (W_2^4)^k[0,1] : y(0) = y(1) = 0,\, y''(0) = y''(1) = 0\}$. Here $\mathfrak{A}(t) = (a_{pj}(t))$, $\mathfrak{B}(t) = (b_{pj}(t))$ are $k \times k$ matrices and a_{pj}, $b_{pj} \in L_2[0,1]$, $p, j = 1, \dots, k$. By $\mathfrak{A}_0$ we denote the matrix $\mathfrak{A}_0 = (a_{0,pj})$, $a_{0,pj} = \int_0^1 a_{pj}(t)\,dt$, $p, j = 1, \dots, k$, and suppose that this matrix has the simple structure.

The aim of this talk is to discuss the spectral properties of the operator L. Below we formulate the main result.

Definition 1. For every bounded matrix A acting in $\mathbb{C}^k$ the weighted average of the eigenvalues is defined by $\widehat{\lambda} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \lambda_i$, where λ_i are the eigenvalues of the matrix A.

Using the method of similar operators, we get

Theorem 1. *There exists $m \in \mathbb{N}$ such that the spectrum $\sigma(L)$ of the operator L has the form $\sigma(L) = \sigma_{(m)} \cup (\cup_{n \geqslant m+1} \sigma_n)$, where $\sigma_{(m)}$ is finite set and the set σ_n has not more than k points. Then for $\widehat{\lambda}_n$, $n \geqslant m+1$ we obtain*

$$\widehat{\lambda}_n = (\pi n)^4 + \frac{(\pi n)^2}{k} \sum_{j=1}^{k} \mu_j - \frac{(\pi n)^2}{k} \sum_{j=1}^{k} a_{2n,jj} + O(n),$$

where μ_j, $j = 1, \dots, k$, are the eigenvalues of matrix $\mathfrak{A}_0$ and $a_{2n,jj}$, $n \in \mathbb{N}$, are Fourier coefficients of the function a_{jj}, $j = 1, \dots, k$.

[1]The first author is supported by MES of Russia and DAAD (Mikhail Lomonosov - 12791.2018/12.2). The second author is supported by Grant MC-1056.2018.1 of the President of the Russian Federation.

E. Burtseva (Luleå, Sweden)
Evgeniya.Burtseva@ltu.se

GENERALIZED HARDY-TYPE AND FRACTIONAL OPERATORS IN MORREY-TYPE SPACES

We study the following weighted generalized multidimensional Hardy-type operators, defined by

$$H_w^a f(x) := a(|x|)\frac{w(|x|)}{|x|^{-n}} \int\limits_{|y|<|x|} \frac{f(y)}{w(|y|)}\, dy,$$

$$\mathcal{H}_w^a f(x) := w(|x|) \int\limits_{|y|>|x|} \frac{a(|y|)f(y)}{w(|y|)|y|^n}\, dy.$$

We provide conditions for H_w^a and $\mathcal{H}_w^a$ with radial quasi-monotone weights $w\left(|x|\right)$, to be bounded from the generalized Morrey space $L^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ into the Orlicz-Morrey space $L^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ with the Young function $\Phi(r)$.

We also study the weighted boundedness of the generalized fractional operator

$$I^a f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{a(|x-y|)f(y)\, dy}{|x-y|^n}$$

as operator mapping from generalized Morrey spaces to Orlicz-Morrey spaces. We find conditions on $\varphi(r)$, $\Phi(r)$, the weight $w(|x|)$ and the kernel of the fractional operator, which insure such a boundedness. We prove a pointwise estimate for weighted fractional operator $wI^a\frac{1}{w}$ with power weights $w(|x|) = |x|^\mu$, which allows us to obtain weighted boundedness of the fractional operator I^a from the boundedness for Hardy-type operators in the case of power weights. The general case of quasi-monotone weights is reduced to the case of power weights by using the properties of such weights.

* The talk is based on the joint paper with N. Samko: Burtseva E. and Samko N. On weighted generalized fractional and Hardy-type operators acting between Morrey-type spaces. Fract. Calc. Appl. Anal. 2017. Vol. 20, No. 6, pp. 1545–1566.

V. I. Chilin (Tashkent, Uzbekistan)
vladimirchil@gmail.com

MEAN ERGODIC THEOREM IN SYMMETRIC IDEALS OF COMPACT OPERATORS

Let c_0 be a Banach lattice of all converging to zero sequences $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ of real numbers with respect to the norm $\|\{\xi_n\}\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|$, where $\mathbb{N}$ is the set of natural numbers. By

$x^* = \{\xi_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ we denote a non-increasing rearrangement of a sequence $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_0$.

The Hardy-Littlewood-Polya partial order $x \prec\prec y$ in the space c_0 is defined as follows: $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \prec\prec y = \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty})$ iff $\sum_{k=1}^{n} \xi_k^* \leq \sum_{k=1}^{n} \eta_k^*$ for all $n \in \mathbb{N}$.

A non-zero linear subspace $E \subset c_0$ with a Banach norm $\|\cdot\|_E$ is called *a fully symmetric sequences space*, if the conditions $x \prec\prec y$, $x \in c_0$, $y \in E$, imply that $x \in E$ and $\|x\|_E \leq \|y\|_E$.

Let $\mathcal{H}$ be a complex separable infinite-dimensional Hilbert space and let $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ be the C^*-algebra of all compact linear operators in $\mathcal{H}$ with respect to the uniform norm $\|\cdot\|_\infty$.

If $(E, \|\cdot\|_E) \subset c_0$ is a fully symmetric sequence space, then the set $\mathcal{C}_E := \{x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) : \{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in E\}$ is a proper two-sided ideal in $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, in addition, $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ is a Banach space with respect to the norm $\|x\|_{\mathcal{C}_E} = \|\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\|_E$, where $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ are the singular values of x (i.e. the eigenvalues of $(x^*x)^{1/2}$ in decreasing order). In this case we say that $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ is a *Banach symmetric ideal*.

Let $T : \mathcal{K}(\mathcal{H}) \to \mathcal{K}(\mathcal{H})$ be a positive Dunford-Schwartz operator (writing $T \in DS^+$), i.e. T is a positive linear operator such that $\|T(x)\|_1 \leq \|x\|_1$ for all $x \in \mathcal{C}_1$ and $\|T(x)\|_\infty \leq \|x\|_\infty$ for all $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, where $(\mathcal{C}_1, \|\cdot\|_1) = (\mathcal{C}_{l_1}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_{l_1}})$. It is known that $T(\mathcal{C}_E) \subset \mathcal{C}_E$ and $\|T\|_{\mathcal{C}_E \to \mathcal{C}_E} \leq 1$ for any fully symmetric sequences space $(E, \|\cdot\|_E)$ and every $T \in DS^+$.

The following Theorem gives the necessary and sufficient conditions for the validity of the mean ergodic theorem for a Banach symmetric ideal.

Theorem. *Let $(E, \|\cdot\|_E)$ be a fully symmetric sequence space. Then the following conditions are equivalent:*

(i). For any $T \in DS^+$ and $x \in \mathcal{C}_E$ there is an $\widehat{x} \in \mathcal{C}_E$ such that $\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k(x) - \widehat{x}\|_{\mathcal{C}_E} \to 0$ as $n \to \infty$;

(ii). E is a separable space and $E \neq l_1$.

V. I. Chilin (Tashkent, Uzbekistan), M. A. Muratov (Simferopol, Russia)
vladimirchil@gmail.com; mamuratov@gmail.com

DOMINATED ERGODIC THEOREM IN SYMMETRIC SEQUENCE SPACES

Let $\mathbb{N}$ be the set of all natural numbers and let l_∞ (respectively, l_1) be a Banach lattice of all bounded (respectively, summable) sequences $x = \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of real numbers with respect to the norm $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|$ (respectively, $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|$). If $x = \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty$ and $|x| = \{|\xi_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$, then a non-increasing rearrangement $x^* = \{\xi_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$

of x is defined by $x^* = \{\xi_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$, where

$$\xi_n^* := \inf_{card(F)<n} \sup_{n\notin F} |\xi_n|, \quad \text{where } F \text{ is a finite subset of } \mathbb{N}.$$

A non-zero linear subspace $E \subset l_\infty$ with a Banach norm $\|\cdot\|_E$ is called *symmetric sequence space* if the conditions $y \in E$, $x \in l_\infty$, $x^* \leq y^*$, imply that $x \in E$ and $\|x\|_E \leq \|y\|_E$. If $(E, \|\cdot\|_E)$ is a symmetric sequence space then there are the following continuous embeddings:

$(l_1, \|\cdot\|_1) \subseteq (E, \|\cdot\|_E) \subseteq (l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

Let $x = \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty$ and $x^{**} = \{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ (the maximal Hardy-Littlewood sequence). A symmetric sequence space $(E, \|\cdot\|_E)$ is called *fully symmetric sequence space*, if the conditions $x^{**} \leq y^{**}$, $x \in l_\infty$, $y \in E$, imply that $x \in E$ and $\|x\|_E \leq \|y\|_E$.

Let $T : l_\infty \to l_\infty$ be a Dunford-Schwartz operator (writing $T \in DS$), i.e. T is a contraction in l_∞ and in l_1 as well. In the case when E is a fully symmetric sequence space we have that $T(E) \subseteq E$ and $\|T\|_{E\to E} \leq 1$ for any $T \in DS$.

For every $T \in DS$, $x \in l_\infty$ we set $B_T(x) = \sup_{n\geq 1} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k(|x|)$. It is known that $B_T(x) \leq x^{**}$.

We say that a fully symmetric sequence space $(E, \|\cdot\|_E)$ satisfies the *dominated ergodic theorem* (writing $E \in (DET)$) if $B_T(x) \in E$ for every $T \in DS$ and $x \in E$.

The following Theorem give the necessary and sufficient conditions for the validity of the dominated ergodic theorem for a fully symmetric sequence spaces.

Theorem. *Let $(E, \|\cdot\|_E)$ be a fully symmetric sequence space. Then the following conditions are equivalent:*

(i). $E \in (DET)$;

(ii). $H(E) = \{x \in E : x^{**} \in E\} = E$.

V. M. Deundyak, D. A. Leonov (Rostov-on-Don, Russia)
vl.deundyak@gmail.com, tori_92@inbox.ru

ON THE EQUATION WITH DOUBLE CONVOLUTION ON THE DESCRETE FINITE HEISENBERG GROUP

Fourier method has been used for a long time in many fields of mathematics, physics and engineering sciences on commutative groups. The development of the fast Fourier transform that can significantly speed up the solution of important practical problems is of particular interest. But in comparison with the commutative variant the construction of the fast Fourier transforms for non-commutative groups is more difficult because of the complexity of the dual objects group in terms of which this transformation is constructed. The numerical methods of solution of double convolution equations are constructed in this report.

The obtained results demonstrate the advantage of constructed numerical solution of double convolution equations on the discrete finite Heisenberg group $\mathbb{H}(\mathbb{F}_p)$ in comparison with algorithm that uses Gauss elimination. Moreover the generation of matrix of double convolution worse than Gauss elimination in terms of computational complexity. The using of provided algorithm does not require construction of this matrix. Hence this method has the advantage in case of multiple application for double convolution equations with different kernels. Constructed algorithms are based on fast Fourier transformation on Heisenberg group described in [1].

REFERENCES
1. *Deundyak V. M., Leonov D. A.* FFT and solving of convolution equations on Heisenberg group over prime Galua field. Ecological bulletin of scientific centers of the Black Sea economic cooperation. 2016. Vol. 2, pp. 46–53.

Kirimli Elcim Elgun (Istanbul, Turkey)
elcimelgun@gmail.com

GABOR TRANSFORM ON CENTRAL GROUP EXTENSIONS

Given a locally compact group G, a locally compact Abelian group A, and a continuous mapping $w : G \times G \to A$ satisfying cocycle conditions, we construct a locally compact group $G_w = G \times_w A$ which is equipped by a Heisenberg type multiplication and contains A as an Abelian normal subgroup. Locally compact Abelian groups has been studied as a natural setting for time frequency analysis since 80s. In this talk our goal is to construct a continuous Gabor transform on non-Abelian locally compact groups of the form G_w, extending the one on A. We will observe that orthogonality and inversion properties also carry to G_w, suggesting that Heisenberg type non-Abelian locally compact groups not only play an important role in time frequency analysis of Abelian groups, but also provide a suitable setting on their own.

This is a joint work with Serap Oztop. The project is supported by TUBITAK BIDEB-2232 Program in Istanbul University.

D. V. Fufaev (Moscow, Russia)
fufaevdv@rambler.ru

SOME EQUIVALENCES RELATED TO THE TWISTED REPRESENTATION

Let G be a locally compact group with right Haar measure and $\delta(x)$ its modular function. To study the conjugation representation in $L^2(G)$, $\gamma(x)f(y) = \delta(x)^{1/2}f(x^{-1}yx)$, it is reasonable to consider the representation $\beta(x_1, x_2)f(y) = \delta(x_2)^{1/2}f(x_1^{-1}yx_2)$ of $G \times G$ in $L^2(G)$. So, similarly it is reasonable to consider the representation

$$\beta^{\phi}(x_1, x_2)f(y) == \delta(x_2)^{1/2}f(\phi(x_1^{-1})yx_2)$$

for the twisted conjugation representation $\gamma^{\phi}(x)f(y) = \delta(x)^{1/2}f(\phi(x^{-1})yx)$, where ϕ is an automorphism of G. In this way, we state some results on the β^{ϕ}:

Theorem 1. *If γ isn't equivalent to γ^{ϕ}, then β isn't equivalent to β^{ϕ}.*

Denote by $\Gamma(\phi)$ a subgroup of $G \times G$ which is the graph of ϕ: $\Gamma(\phi) = \{(h, \phi(h)), h \in G\}$.

Theorem 2. *γ is equivalent to the induced representation $\mathrm{ind}_{\Gamma(\phi)}^{G\times G} 1_{\Gamma(\phi)}$, where $1_{\Gamma(\phi)}$ is the identity representation of $\Gamma(\phi)$.*

Let ρ_r be the right regular representation of G and $\int\limits_X F^y d\alpha(y)$ its canonical decomplosition into factor representations.

Theorem 3. *There exists for each y an irreducible representation K^y of $G \times G$ such that*

1) K^y restricted to $G \times e$ is equivalent to $\bar{F}^y \circ \phi$ and K^y restricted to $e \times G$ is equivalent to F^y, where $\bar{F}^y$ is adjoint of F^y,

2) the canonical decomposition into factor representations of β^{ϕ} is given by $\int\limits_X K^y d\alpha(y)$. Moreover, if the representation ρ_r is of type I then each F^y is of the form $(\bar{L}^y \circ \phi) \times L^y$ and the canonical decomposition into factor representations of β^{ϕ} is given by

$$\int\limits_X (\bar{L}^y \circ \phi) \times L^y d\alpha(y).$$

V. Guliyev (Institute of Mathematics and Mechanics, Baku, Azerbaijan; Ahi Evran University, Kirsehir, Turkey), F. Deringoz (Ahi Evran University, Kirsehir, Turkey), S. Hasanov (Ganja State University, Ganja, Azerbaijan)

vagif@guliyev.com

CHARACTERIZATION OF LIPSCHITZ FUNCTIONS VIA THE COMMUTATORS OF SINGULAR AND FRACTIONAL INTEGRAL OPERATORS IN ORLICZ SPACES

In this talk, we shall give some new characterizations of the Lipschitz spaces via the boundedness of commutators associated with the fractional maximal operator, Riesz potential and Calderón-Zygmund operators on Orlicz spaces.

This work was supported by the Ahi Evran University Scientific Research Projects Coordination Unit. Project Number: FEF.A4.18.012.

REFERENCES

1. *Guliyev V. S., Deringoz F. and Hasanov S. G.* Riesz potential and its commutators on Orlicz spaces. J. Inequal. Appl. 2017, Paper No. 75, 18 pp.

2. *Guliyev V. S., Deringoz F. and Hasanov S. G.* Fractional maximal function and its commutators on Orlicz spaces, Anal. Math. Phys. DOI 10.1007/s13324-017-0189-1.

3. *Guliyev V. S., Deringoz F. and Hasanov S. G.* Commutators of fractional maximal operator on Orlicz spaces, accepted in Math. Notes 2018, 1-12.

A. G. Kamalyan (Yerevan State University and Institute of Mathematics NAS, Armenia)

kamalyan_armen@yahoo.com

ON PARTIAL INDICES OF TRIANGULAR MATRIX FUNCTIONS

We will discuss the problem of constructive description of set of possible tuples of partial indices of triangular matrix functions, whose diagonal elements are factorizable with indices equal to the components of the vector $\chi \in \mathbb{Z}^n$. Said set $A(x)$ contained the set $E(x)$ of all vectors obtained from χ by permuting its components and is contained in the set $M(x)$ of all vectors majorized by χ. The conditions on χ under which $A(x) = E(x)$ or $A(x) = M(x)$ are also discussed.

A. Karapetyants (Rostov-on-Don, Russia), H. Rafeiro (Colombia), S. Samko (Portugal)

karapetyants@gmail.com, silva-h@javeriana.edu.co, ssamko@ualg.pt

ON NEW SPACES OF ANALYTIC FUNCTIONS OF NONSTANDARD GROWTH

We give a simple proof of the boundedness of Bergman projection in various Banach spaces of functions on the unit disc in the complex plain. The approach of the paper is based on the idea of V.P. Zaharyuta, V.I. Yudovich (1964) where the boundedness of the Bergman projection in Lebesgue spaces was proved using Calderón-Zygmund operators. We exploit this approach and treat the cases of variable exponent Lebesgue space, Orlicz space, variable exponent generalized Morrey spaces and Grand Lebesgue spaces. In the case of variable exponent Lebesgue space the boundedness result is known, so in that case we provide a simpler proof, whereas the other cases are new. The major idea of this study is to show that the approach can be applied to a wide range of function spaces. We also study the rate of growth of functions near the boundary in spaces under consideration and their approximation by mollified dilations.

Acknowledgement: RFBR 18-01-00094(a) and 18-51-05009 Apm(a).

REFERENCES

1. *Karapetyants A., Samko S.* On boundedness of Bergman projection operators in Banach spaces of holomorphic functions in half plane and harmonic functions in half space. Journal of Mathematical Sciences. 2017. Vol. 226, No. 4, pp. 344-354. https://doi.org/10.1007/s10958-017-3538-6

2. *Karapetyants A., Rafeiro H., Samko S.* Boundedness of the Bergman projection and some properties of Bergman type space. Complex Anal. Oper. Theory (2018). https://doi.org/10.1007/s11785-018-0780-y

3. *Karapetyants A., Samko S.* On grand and small Bergman spaces. Preprint 2018.

Z. A. Kusraeva (Vladikavkaz, Russia)
zali13@mail.ru

ON REPRESENTATION OF A CLASS OF HOMOGENEOUS POLYNOMIALS[1]

We use the standard notation and terminology of Aliprantis and Burkinshaw [1] for the theory of vector lattices.

Definition 1. *Let E and F be vector lattices. A mapping $P : E \to F$ is called an* **n-homogeneous polynomial** *if there exists an n-linear operator $\varphi : E^n \to F$, such that $P = \varphi \circ \Delta_n$, where $\Delta_n : E \to E^n$ is the* **diagonal mapping** *$\Delta_n : x \mapsto (x, \dots, x) \in E^n$.*

The center $\mathcal{Z}(F)$ of F is defined as the collection of linear operators T in F such that $-cI_F \le T \le cI_F$ for some $0 < c \in \mathbb{R}$.

Definition 2. *An n-linear operator $T : E^n \to F$ is said to be* **disjointness preserving** *if for any choice of $1 \le j \le n$ and $x_k \in E$, $j \ne k \le n$ the linear operator $x \mapsto T(x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_n)$ is disjointness preserving. It can be easily seen that an order bounded n-linear operator T is disjointness preserving if and only if $|T(x_1, \dots, x_n)| = |T(|x_1| \dots, |x_n|)|$ for all $x_k \in E$.*

Theorem. *Let E and F be vector lattices with F universally complete and assume that an f-algebra multiplication $*$ is fixed in F. Let P be an n-homogeneous polynomial from E to F. Denote $K(m) := \{(k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{N}^m : \sum_{i=1}^m k_i = n\}$. The following conditions are equivalent:*

(1) *There exists an order bounded disjointness preserving n-linear operator T from E^n to F such that $P(x) = T(x, \dots, x)$ for all $x \in E$.*

(2) *There exist a band projection $\tau \in \mathbb{P}(F)$, a collection of lattice homomorphisms $T_1, \dots, T_n$ from E to F, and a partition of unity $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ in $\mathbb{P}(F)$, such that for every $m \le n$ there exists a disjoint family $\{\pi_{k_1,\dots,k_m} : (k_1, \dots, k_m) \in K(m)\}$ in $\mathcal{Z}(F)$ such that for all $x \in E$ we have*

$$P(x) = (\tau - \tau^{\perp}) \sum_{m=1}^{n} \varrho_m \sum_{(k_1,\dots,k_m) \in K(m)} \pi_{k_1,\dots,k_m} T_1(x)^{k_1} * \dots * T_m(x)^{k_m}.$$

REFERENCES

1. *Aliprantis C.D., Burkinshaw O.* Positive Operators. Acad. Press Inc. London etc. 1985.

[1] The study was supported by Russian Foundation for Basic Research (project №18-31-00205).

I. Louhichi (American University of Sharjah, UAE)
ilouhichi@aus.edu

FINITE RANK COMMUTATORS AND SEMICOMMUTATORS OF QUASIHOMOGENEOUS TOEPLITZ OPERATORS

In this talk, I shall survey our results about finite rank commutators and semicommutators of quasihomogeneous Toeplitz operators on the unit disk of the complex plane $\mathbb{C}$. A discussion of the recent developments related to this problem, for two-monomial type Toeplitz operators on the weighted Bergman space and weighted pluriharmonic Bergman space of the unit ball (resp. of the unit polydisk), shall be made.

A. R. Mirotin (Gomel, Belarus)
amirotin@yandex.ru

THE LIVSCHITS-KREIN TRACE FORMULA IN SEVERAL OPERATOR VARIABLES ON BANACH SPACES

The trace formula for a trace class perturbation of a self-adjoint operator on Hilbert space was proved in a special case by I.M. Livschits and in the general case by M.G. Krein [1] (see also [2]). In the talk we introduce a spectral shift function and prove a Livschits-Kreĭn trace formula for a trace class perturbations of several generators of holomorphic semigroups on Banach space with approximation property.

In the following $\mathcal{T}_n$ stands for the cone of negative Bernstein functions in n variables [3]. The case $n = 1$ was studied in [4].

Theorem 1. [5] *Let X be the Banach space with the approximation property. Let A and B be n-tuples of generators of pairwise commuting bounded C_0-semigroups T_{A_j} and T_{B_j} respectively on X holomorphic in the right half plane $\mathbb{C}_+$ and satisfying $\|T_{A_j}(\zeta)\|$, $\|T_{B_j}(\zeta)\| \leq M|\zeta|^{m_j}$ for some $m_j \in \mathbb{Z}_+$ ($\zeta \in \mathbb{C}_+, j = 1, \ldots, n$). If $\forall j$ $A_j - B_j$ are nuclear there exists a unique distribution $\eta_{A,B}$ supported in $\mathbb{R}^n_+$ such that for every $\psi \in \mathcal{T}_n$ with $\partial^{2m+1}\psi\big|_{s=-0} \neq \infty$ ($m = (m_1, \ldots, m_n)$) we have*

$$\mathrm{tr}(\psi(A) - \psi(B)) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+\setminus\{0\}} L\eta_{A,B}(u)d\mu(u),$$

where μ stands for the representing measure of ψ and $L\eta_{A,B}$ denotes the Laplace transform of $\eta_{A,B}$.

REFERENCES

1. *Krein M. G.* On a trace formula in perturbation theory. Mat. Sbornik. 1953. Vol. 33, pp. 597—626 (Russian).
2. *Peller V. V.* The Lifshitz-Krein trace formula and operator Lipschitz functions. Proc. Amer. Math. Soc. 2016. Vol. 144(12), No. 1, pp. 5207–5215.
3. *Mirotin A. R.* Properties of Bernstein functions of several complex variables. Mat. Zametki. 2013. Vol. 93, No. 2, pp. 257—265; English transl.: Math. Notes. 2013. Vol. 93, No. 2.

4. *Mirotin A. R.* Bernstein functions of several semigroup generators on Banach spaces under bounded perturbations. Operators and Matrices. 2017. Vol. 11, pp. 199–217.

5. *Mirotin A. R.* Bernstein functions of several semigroup generators on Banach spaces under bounded perturbations, II. Operators and Matrices. 2018. Vol. 12, No. 2, pp. 445 – 463.

M. N. Oreshina (Lipetsk, Russia)
m_oreshina@mail.ru

ON A RATIONAL APPROXIMATION OF THE FUNCTIONS OF LINEAR SELF-ADJOINT OPERATOR PENCILS [1]

Let $\mathbf{H}$ be a Hilbert space. We consider a linear operator pencil

$$\mathcal{L}(\lambda) = \lambda A - B, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Here $A\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ is a bounded positive definite operator, and $B\colon D(B) \subset \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ is an unbounded self-adjoint operator.

We construct a functional calculus

$$\widetilde{\Psi}(f) = \int_{\sigma(\mathcal{L})} f(\xi)\, d\widetilde{E}(\xi),$$

where $\sigma(\mathcal{L})$ is the spectrum of the pencil $\mathcal{L}$ and $\widetilde{E}$ is a special spectral decomposition. An important example of $\widetilde{\Psi}(f)$ is the operator impulse response of the linear differential equation $Ax'(t) - Bx(t) = f(t)$.

We suggest an approximate approach to the calculation of $\widetilde{\Psi}(f)$. We approximate the function f by a rational function r on the spectrum of the pencil, and then take the operator $\widetilde{\Psi}_{approx}(f, r) = \widetilde{\Psi}(r)$ as an approximation of $\widetilde{\Psi}(f)$. A similar approach to the approximate solution of the equation $x'(t) = Bx(t) + f(t)$ is used in [1].

We define a special norm $\|T\|_{\odot} = \|\sqrt{A}T\sqrt{A}\|$ and obtain the estimate of the approximation.

Theorem 1. *If the rational function r approximates the function f on $\sigma(\mathcal{L})$ with an absolute error $\varepsilon \geq 0$, i.e.*

$$|r(\xi) - f(\xi)| \leq \varepsilon, \qquad \xi \in \sigma(\mathcal{L}),$$

then the approximate operator $\widetilde{\Psi}_{approx}(f, r)$ satisfies the estimate

$$\|\widetilde{\Psi}_{approx}(f, r) - \widetilde{\Psi}(f)\|_{\odot} \leq \varepsilon.$$

The suggested approach can be used in remodeling of the complicated systems.

REFERENCES

1. *Oreshina M. N.* Approximate solution of a parabolic equation with the use of a rational approximation to the operator exponential. Differential Equations. 2017. Vol. 53, No. 3, pp. 398–408.

[1] The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research and Lipetsk region (research project No. 17-47-480305-r_a).

J. S. Pashkova (Simferopol, Russia), B. A. Rubshtein (Beer-Sheva, Izrael)
j.pashkova@gmail.com; benzion.rubshtein@gmail.com

ERGODIC THEOREMS IN REARRANGEMENT INVARIANT SPACES

Let m be the usual measure on the set nonnegative real numbers $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\mathbf{R}_+, m)$ (respectively $\mathbf{L}_\infty = \mathbf{L}_\infty(\mathbf{R}_+, m)$, $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_1(\mathbf{R}_+, m)$) be the space of all m-measurable (respectively, be the spaces of all bounded and integrable) functions $f\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$.

A positive linear operator $T : \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \to \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ is said to be an *absolute contraction* ($T \in \mathcal{PC}$) if T is a contraction in $\mathbf{L}_1$ and in $\mathbf{L}_\infty$ as well.

Let $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{PC}$. We denote by

$$B_{\{T_n\}} f(s) = \sup_n \{T_n |f|(s)\},\, f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty,\, s > 0.$$

If the operator $B_{\{T_n\}}$ is bounded, the sequence $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{PC}$ is called dominant.

Theorem 1. *Let $\mathbf{E}$ be an rearrangement invariant space, the sequence $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{PC}$ is dominant and satisfies the inequality*

$$m\{B_{\{T_n\}} f > t\} \leqslant \frac{1}{t} \int\limits_{\{B_{\{T_n\}} f > t\}} |f|\, dm.$$

Then $f \in \mathbf{H}(\mathbf{E}) = \{f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \colon f^{**} \in \mathbf{E}\}$ implies $B_{\{T_n\}} f \in \mathbf{E}$ and

$$\|B_{\{T_n\}} f\|_{\mathbf{E}} \leqslant \|f\|_{\mathbf{H}(\mathbf{E})}.$$

Theorem 2. *Let E be an rearrangement invariant space, sequence $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{PC}$ satisfies the inequality*

$$\frac{1}{2t} \int\limits_{\{|f| > t\}} |f|\, dm \leqslant m\{B_{\{T_n\}} f > t\},\; t > 0$$

for all function $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$. If $f^*(\infty) = 0$, then $B_{\{T_n\}} f \in \mathbf{E}$ implies $f \in \mathbf{H}(\mathbf{E})$.

A. Sandikci (Samsun, Turkey)
ayses@omu.edu.tr

TIME-FREQUENCY REPRESENTATIONS OF WIGNER TYPE OPERATORS ON LORENTZ SPACES

The classical Wigner representation of a signal f is defined

$$W(f)(x, w) = \int_{R^d} f(x + \frac{t}{2}) \overline{f(x - \frac{t}{2})} e^{-2\pi i t w} dt.$$

Its meaning is roughly speaking one of energy distribution of the signal in the time-frequency plane.

We consider in this work continuity properties for the two window spectrogram and the τ-Wigner representation W_τ, a modification of the Wigner representation depending on a parameter $\tau \in [0,1]$, whenever they act from product space of appropriate Lebesgue spaces into Lorentz spaces. We can then state the sufficient conditions for the boundedness of the integrals $\int_{[0,1]} W_\tau d\tau$.

Some key references are given below.

R E F E R E N C E S

1.*Boggiatto P., De Donno G., Oliaro A.* A class of quadratic time-frequency representations based on the short-time Fourier transform. Oper Theor. 2007. 172, pp. 235–249.

2.*Boggiatto P., De Donno G., Oliaro A.* Time-frequency representations of Wigner type and pseudo-differential operators. Trans Amer Math Soc. 2010. 362, pp. 4955–4981.

3.*Grochenig K.* Foundations of Time-Frequency Analysis. Birkhauser. 2001.

4.*O'Neil R.* Integral transforms and tensor products on Orlicz spaces and $L(p,q)$ spaces. J d'Analyse Math. 1968. 21, pp. 1–276.

5.*Sandikci A.* On Lorentz mixed normed modulation spaces. J Pseudo- Differ Oper Appl. 2012. 3, pp. 263–281.

6.*Sandikci A.* Continuity of Wigner-type operators on Lorentz spaces and Lorentz mixed normed modulation spaces. Turk J Math. 2014. 38, pp. 728–745.

I. A. Sheipak (Moscow, Russia)
iasheip@yandex.ru

ON CONTINUOUS SPECTRUM OF THE SPECTRAL PROBLEM FOR DIFFERENTIAL OPERATOR WITH WEIGHT-MULTIPLIRE

We study spectral properties of boundary value problem

$$-y'' = \lambda \rho y,$$

$$y(0) = y(1) = 0,$$

in the case where the weight ρ is a multiplier from the space $\overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]$ into the dual space $\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0,1]$. We have received the necessary and sufficient conditions under which a self-similar function generates multiplier in these spaces. The class of compact self-similar multipliers was described. For such weights-multipliers the spectrum of the problem is discrete and eigenvalues have exponentially growth. Characteristics of growth are determined by the parameters of self-similarity. We have constructed the class of non-compact multipliers, for which the spectrum of the problem is continuous. The full description of continuous spectrum is obtained for self-similar weights based on two subintervals.

The work is supported by Russian Scientific Fund, project N. 17-11-01215.

E. Shulman (Katowice, Poland)
ekaterina.shulman@us.edu.pl

ON POLYNOMIALS ON GROUPS AND NILPOTENCE OF NIL SUBSETS

An algebra $\mathcal{A}$ is called a *nil algebra of index* n if

$$x^n = 0, \qquad \forall x \in \mathcal{A}. \tag{1}$$

A classical result by Dubnov-Ivanov [1] and Nagata-Higman [2,3] states that a nil algebra over a field of characteristic zero is nilpotent, that is there exists an N such that $x_1 \cdots x_N = 0$ for any $x_1, \dots, x_N \in \mathcal{A}$.

We consider a generalization of this statement to the case when the identity (1) holds on some subset $\mathcal{S}$ only.

Theorem 1. *Let $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ be a subset that, for any $a, b \in \mathcal{S}$, contains also the element $a + b + ab$. If each $x \in \mathcal{S}$ satisfies the relation (1) then there exists an $M \in \mathbb{N}$ such that $x_1 \cdots x_M = 0$ for any $x_1, \dots, x_M \in \mathcal{S}$.*
The main tool of the proof is the remarkable Zel'manov theorem on nilpotence of Engel Lie algebras [4].

We apply Theorem 1 to the study of polynomial functions on groups.

In the space of all continuous functions on a topological group G we consider the classes of *polynomials* and *semipolynomials*, which are defined, respectively, by the conditions

$$(\exists n \in \mathbb{N}) \ \ (\forall\ h_1, ..., h_{n+1} \in G) \qquad \Delta_{h_{n+1}} \cdots \Delta_{h_2} \Delta_{h_1}\ f = 0 \tag{2}$$

and

$$(\exists n \in \mathbb{N}) \ \ (\forall\ h \in G) \qquad \Delta_h^{n+1}\ f = 0, \tag{3}$$

where Δ_h is the difference operator: $\Delta_h f(g) = f(gh) - f(g)$.

The problem of comparing this two families of functions has a long story. In particular, it was proved that for any Abelian group G the relations (2) and (3) are equivalent. We investigate the case of non-commutative G and prove
Theorem 2. *For any group G, any semipolynomial is a polynomial.*

R E F E R E N C E S

1. *Dubnov J., Ivanov V.* Sur l'abaissement du degré des polynômes en affineurs. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1943. Vol. 41, pp. 96–98.
2. *Nagata M.* On the nilpotency of nil-algebras. J. Math. Soc. Japan. 1952. Vol. 4, pp. 296–301.
3. *Higman G.* On a conjecture of Nagata. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1956. Vol. 52, pp. 1–4.
4. *Zelmanov E. I.* Engel Lie algebras. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1987. Vol. 292, no. 2, pp. 265–268.

S. M. Tabatabaie (Qom, Iran)
sm.tabatabaie@qom.ac.ir

FRAMES RELATED TO LOCALLY COMPACT HYPERGROUPS

A hypergroup is a locally compact Hausdorff space with an involution such that the space of its complex Radon measures is a Banach algebra.

This structure was introduced in a series of papers by C.F. Dunkl, R.I. Jewett and R. Spector. Locally compact groups, double coset spaces and polynomial hypergroups are important classes of hypergroups. On the other hand, in several papers, frames and wavelets have been studied in harmonic analysis via representations of locally compact groups. In this talk among other things, by a version of Wiener's theorem on hypergroups, we give a characterization of admissible vectors related to the left regular representation of hypergroups. Also, we give some applications of the existence of relatively compact fundamental domains for hypergroups which are strong and important tools in theory of frames.

REFERENCES

1. *Bloom W. R. and Heyer H.* Harmonic Analysis of Probability Measures on Hypergroups, De GruYter, Berlin, 1995.
2. *Sadathoseyni B.H. and S.M. Tabatabaie S.M.*, Coorbit spaces related to locally compact hypergroups, Acta Math. Hungar. 2017. Vol. 153, pp. 177–196.
3. *Tabatabaie S. M.*, The problem of density on $L^2(G)$, Acta Math. Hungar. 2016. Vol. 150, pp. 339–345.
4. *Tabatabaie S.M. and Jokar S.*, A characterization of admissible vectors related to representations on hypergroups, Tbilisi Mathematical Journal, 2017. Vol. 10, pp. 143–151.
5. *Tabatabaie S.M., Kamyabi Gol R.A. and Jokar S.*, Existence of the relatively compact fundamental domain for hypergroups, Submitted.

Ruya Uster (Istanbul, Turkey)
ruya.uster@istanbul.edu.tr

PROJECTIVITY AND INJECTIVITY OF ORLICZ SPACES

Let G be a locally compact group with left Haar measure μ and Φ be a Young function. In this talk we will consider the Orlicz space $L^{\Phi}(G)$ as an $L^1(G)$- module. If we take $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}, 1 \leq p < \infty$, $L^{\Phi}(G)$ becomes the classical Lebesgue space $L^p(G)$. We show that $L^{\Phi}(G)$ is projective $L^1(G)$- module if and only if G is compact. Also we show that the $L^1(G)$- module $L^{\Phi}(G)$ is injective whenever G is an amenable locally compact group. These results generalize classical results on L^p spaces.

This is a joint work with Serap Oztop.

B. G. Vakulov, Yu. E. Drobotov (Rostov-on-Don, Russia)
bvak1961@bk.ru, yu.e.drobotov@yandex.ru

TWO-POLE POTENTIAL TYPE OPERATORS IN WEIGHTED GENERALIZED HÖLDER SPACES

Operators to be considered are the two-pole potential type ones, defined as follows:

$$\left(K^{\alpha}cf\right)(x)=\int\limits_{\Omega}\frac{c(x,\sigma)f(\sigma)}{|x-\sigma|^{n-\alpha}|x+\sigma|^{n-\alpha}}d\sigma,\quad \Omega\subseteq\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

where $n\geq 2$, $\operatorname{Re}\alpha>0$ and $c(\cdot)$ is a characteristic. These operators are studied in the generalized variable Hölder spaces $H^{\omega(\cdot)}(\Omega,w)$, which are defined through a local continuity modulus $M_r(\cdot)$ of a function, i.e.

$$\forall f\in C(\Omega,w)\quad M_r(wf,x,t)\leq A\omega(x,t),\quad A>0,$$

where

$$M_r(f,x,t)=\sup_{y\in\Omega:|x-y|\leq t}|f(x)-f(y)|,\quad x\in\Omega,\quad t>0.$$

In [1], the operators (1) with $\Omega=\mathbb{S}^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$ and $c(\cdot)\equiv 1$ were studied in various types of the weighted spaces $H^{\omega}\left(\mathbb{S}^{n-1},\rho\right)$, where $\omega(\cdot)$ assumed to be a function from the Bary–Stechkin type class Φ^{δ}_{β}, $\beta>\delta\geq 0$, and $\rho(\cdot)$ was considered as an power function. Theorems on boundedness and isomorphisms are presented in [1] and [2].

These studies are continued here for a wider class of weights. Results for Ω which is not necessarily of finite measure are obtained. Theorems on boundedness of the operators (1) in $H^{\omega(\cdot)}(\Omega,w)$ are proven.

The study was carried out with the financial support of RFBR within the framework of the scientific project 17-301-50023 «мол_нр».

REFERENCES

1. *Vakulov B. G., Karapetyants N. K.* Operatory tipa potenciala na sfere s osobennostyami na polyusah. Proceedings of the Russian Academy of Sciences. 2003. Vol. 392, No. 2, pp. 151–154.

2. *Vakulov B. G., Kostetskaya G. S., Drobotov Yu. E.* Riesz Potential in Generalized Hölder Spaces. In *Nekrasova I., Karnaukhova O., Christiansen B. (Eds.)* Fractal Approaches for Modeling Financial Assets and Predicting Crises. IGI Global. 2018. Pp. 249–273.

M. Yakhshiboev (Tashkent, Uzbekistan)
yahshiboev@rambler.ru

UNILATERAL BALL POTENTIALS ON GENERALIZED LEBESGUE SPACES $L^{p(\cdot)}$

In this paper, we study unilateral ball potentials of variable order in variable exponent Lebesgue spaces. We will show the boundedness of unilateral ball potentials in variable exponent Lebesgue spaces [1].

Unilaterals ball potentials of an order $\alpha>0$ we will define equalities [2]:

$$(B^{\alpha}_{+}f)(x)=\frac{2}{\Gamma(\alpha)\omega_{n-1}}\int\limits_{|y|<|x|}\frac{\left(|x|^2-|y|^2\right)^{\alpha}}{|x-y|^n}f(y)dy,$$

$$(B_-^\alpha f)(x) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)\omega_{n-1}} \int\limits_{|y|>|x|} \frac{\left(|y|^2 - |x|^2\right)^\alpha}{|x-y|^n} f(y)dy.$$

Теорема 1. *Let $\Omega \subset R^n$ be a bounded, open set and $0 < \alpha < n$. Let $p \in P^{log}(R^n)$ with $1 < p^- \leq p^+ < \frac{n}{\alpha}$. If $k \geq max\{\frac{p^+}{n-\alpha p^+}, 1\}$, then*

$$\|B_+^\alpha f\| \leq C|x|^\alpha k^{\frac{1}{p^+}} Mf(x)^{1-\frac{\alpha p(x)}{n}}$$

for every $f \in L^{p(.)}(\Omega)$ with $\|f\|_{p(.)} \leq 1$ and every $x \in \Omega \subset R^n$. The constant depends only on $\alpha, n, c_{log}(p)$, and $diam(\Omega)$.

Теорема 2. *Let $p \in P^{log}(R^n)$, $0 < \alpha < n$ and $1 < p^- \leq p^+ < \frac{n}{\alpha}$. Then the following estimate holds for operator B_+^α*

$$\||x|^{-\alpha} B_+^\alpha\|_{q(.)} \leq C(n, p, \alpha)\|f\|_{p(.)},$$

where the constant depends on p only via $c_{log}(p)$, p^- and p^+.

REFERENCES

1. *S.Samko.* Convolution type operators in $L^{p(\cdot)}$. Integr. Trans. And Special Funct.1998. Vol. 7, No. (1-2), pp. 123–144.
2. *S. G. Samko, A.A. Kilbas and O.I.Marichev.* Fractional integrals and derivatives. Theory and applications. Gordon and Breach Seience Publishers, London- New York. 1993.

Abdel Rahman Yousef (The University of Jordan, Jordan)
abd.yousef@ju.edu.jo

COMMUTING TOEPLITZ OPERATORS ON THE BERGMAN SPACE WITH BOUNDED SYMBOLS

Various algebraic problems related to Toeplitz operators have been extensively studied in the literature. One of the most interesting problems in the field is the commuting problem of two Toeplitz operators on the Bergman space of the unit disk. This problem was motivated by the same problem for Toeplitz operators on the Hardy space over the unit circle, which was solved by Brown and Halmos in their seminal paper " Algebraic properties of Toeplitz operators". In this talk, I will present the recent contributions toward solving this problem, then I will show that if a Toeplitz operator on the Bergman space of the unit disk, with right-terminating bounded symbol, commute with another Toeplitz operator whose right-terminating bounded symbol is neither analytic nor coanalytic, then a nontrivial linear combination of both symbols is constant on the unit disk.

О. Г. Авсянкин (Ростов–на–Дону, Россия)
avsyanki@math.rsu.ru

ОБ ОДНОЙ C^*-АЛГЕБРЕ, ПОРОЖДЕННОЙ МНОГОМЕРНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ И РАДИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

Пусть $\mathbb{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| \leqslant 1\}$. В пространстве $L_2(\mathbb{B}_n)$ рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{B}_n} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{B}_n,$$

предполагая, что функция $k(x,y)$ определена на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) $k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n} k(x,y)$, $\forall\, \alpha > 0$;
2) $k(\omega(x), \omega(y)) = k(x,y)$, $\forall\, \omega \in SO(n)$;
3) $k(e_1, y)|y|^{-n/p} \in L_1(\mathbb{R}^n)$, где $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$.

Известно, что оператор K ограничен в пространстве $L_2(\mathbb{B}_n)$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — наименьшая C^*-подалгебра C^*-алгебры $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{B}_n))$, содержащая все операторы вида $\lambda I + K + T$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, а T — компактный в $L_2(\mathbb{B}_n)$ оператор. Далее, определим в пространстве $L_2(\mathbb{B}_n)$ оператор M_α, где $\alpha \in \mathbb{R}$, равенством

$$(M_\alpha \varphi)(x) = |x|^{i\alpha}\varphi(x), \quad x \in \mathbb{B}_n.$$

Обозначим через $\mathfrak{B}$ C^*-алгебру, порожденную всеми операторами A из алгебры $\mathfrak{A}$ и всеми операторами M_α. С помощью метода, изложенного в книге [1], для алгебры $\mathfrak{B}$ построено операторное символическое исчисление, в терминах которого получен критерий нетеровости операторов из этой алгебры.

Общие результаты применяются к изучению важного частного случая, а именно операторов вида

$$B = I + K_1 + M_\alpha K_2.$$

Для таких операторов получены эффективные скалярные условия нетеровости и формула для вычисления индекса.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения: операторный подход. Минск: Изд-во «Университетское», 1988.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-01-00094-А

Х. Алмохаммад (Москва, Россия)
Khaleel.almahamad1985@gmail.com

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЁННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ ТИПА БЕССЕЛЯ И ТИПА РИССА

Пространство потенциалов. Пространство потенциалов $H_E^G \equiv H_E^G(\mathbb{R}^n)$ определяем как множество свёрток ядер потенциалов с функциями из базового пространства

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) = \{u = G * f : \ f \in E(\mathbb{R}^n)\},$$
$$\|u\|_{H_E^G} = \inf\{\|f\|_E : \ f \in E(\mathbb{R}^n), \ G * f = u\}.$$

где E — перестановочно-инвариантное пространство, а ядро G — специального вида,

$$c_1\Phi(r) \leqslant G(x) \leqslant c_2\Phi(r), \quad r = |x| \in \mathbb{R}_+ \,,$$

где $0 < \Phi \downarrow$ на $\mathbb{R}_+$;

$$\int\limits_0^r \Phi(\rho)\rho^{n-1}\, d\rho < \infty, \quad \forall r \in \mathbb{R}_+$$

в случае, когда базовое пространство $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda_p(v)$ — весовое пространство Лоренца с нормой

$$\|f\|_E = \left(\int\limits_0^\infty f^*(t)^p v(t)\, dt\right)^{\frac{1}{p}}; \quad 1 < p < \infty.$$

Получено описание оптимально-перестановочного инвариантного пространства $X_0(\mathbb{R}^n)$ для вложения $H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$: $X_0(\mathbb{R}^n) = \Gamma_p(\omega)$, где $\Gamma_p(\omega)$ — весовое Г-пространство Лоренца с весом ω, зависящим от v, Φ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алмохаммад Х., Альхалиль Н. Х.* Интегральные свойства обобщённых потенциалов типа Бесселя и типа Рисса. Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». 2017. Том. 25, № 4. стр. 340–349.

Н. Х. Альхалиль (Москва, Россия)
Nisreen.homadeh@gmail.com

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЁННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ БЕССЕЛЯ

Пространство потенциалов типа Бесселя. Пространство потенциалов $H_E^G \equiv H_E^G(\mathbb{R}^n)$ определяем как множество свёрток ядер потенциалов с функциями из базового пространства

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) = \{u = G * f : \ f \in E(\mathbb{R}^n)\},$$
$$\|u\|_{H_E^G} = \inf\{\|f\|_E : \ f \in E(\mathbb{R}^n), \ G * f = u\}.$$

где E — перестановочно-инвариантное пространство, а ядро G — специального вида,

$$G = G_R^0 + G_R^1;$$
$$G_R^0 = G \cdot \chi_R; \quad G_R^1 = G \cdot \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_R},$$
$$c_1 \Phi(r) \leqslant G_R^0(x) \leqslant c_2 \Phi(r), \quad r = |x| \in (0, R)\,,$$

где $0 < \Phi(\rho) \downarrow$ на $\mathbb{R}_+$;

$$\int_0^R \Phi(\rho)\rho^{n-1}\,d\rho < \infty, \quad G_R^1 \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap E'(\mathbb{R}^n),$$

где $E'(\mathbb{R}^n)$ — ассоциированное для $E(\mathbb{R}^n)$.

При $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda_p(v)$ — весовое пространство Лоренца дан критерий вложения $H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset C(\mathbb{R}^n)$. Получено описание оптимального пространства Кальдерона $\Lambda^k(C; X)$ с нормой

$$\|u\|_{\Lambda^k(C;X)} = \|u\|_c + \left\|\omega_c^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right)\right\|_{X(0,1)}$$

для модулей непрерывности потенциалов $\omega_c^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Альхалиль Н.Х., Алмохаммад Х.* Дифференциальные свойства обобщённых потенциалов типа Бесселя и типа Рисса. Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». 2018. Том. 26, № 1. стр. 3–12.

Е. И. Бережной (Ярославль, Россия)
ber@uniyar.ac.ru

ОЦЕНКИ РЯДОВ РАДЕМАХЕРА В ПРОСТРАНСТВАХ МОРРИ

Пусть $I = [0, 1]$ отрезок, у которого мы будем точки 0 и 1 отождествлять. Зафиксируем последовательность $\tau_i = 2^{-i}$, $i = 1, 2, ...$

Пусть l идеальное пространство последовательностей со стандартным базисом $\{e^i\}_1^\infty$, в котором ограничен оператор $T(\sum_{i=1}^\infty e^i x_i) = \sum_{k=1}^\infty e^k(\sum_{i=k}^\infty x_i)$.

Дискретным пространством Морри M_{l,L^p}^τ будем называть множество периодических функций $f \in L^{1,loc}(I)$, для каждой из которых конечна норма

$$\|f|M_{l,L^p}^\tau\| = \sup_h \|\sum e^i \|f(h+.)\chi(B(0,\tau_i))|L^p\||l\|,$$

($\chi(D)$ - характеристическая функция множества D, $B(0, r)$ – "шар"с центром в нуле радиуса r.)

Пусть $r_k(t) = sign \sin(2^k \pi t)$, $k = 1, 2, ...$ функции Радемахера. Зафиксируем числовую последовательность $\{c_k\}_1^\infty$ и построим ряд Радемахера $R(t) = \sum_{k=1}^\infty c_k r_k(t)$.

Теорема 1. Зафиксируем сдвиг $h_0 \in (0,1)$. Если

$$\| \sum_{l=1}^{\infty} e^l 2^{-l/p} \{ (\sum_{j=l+2}^{\infty} c_j^2)^{1/2} + \sum_{k=1}^{l+1} |c_k| \} |l\| < \infty,$$

то $\|R_m(h_0 + .)|M^{\tau}_{l,L^p}\| < \infty$.

Для того, чтобы выполнялось неравенство

$$\|R_m(h_0 + .)|M^{\tau}_{l,L^p}\| < B_p (\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2)^{1/2}$$

достаточно выполнение неравенства

$$\| \sum_{l=1}^{\infty} e^l \sum_{k=1}^{l+1} |c_k| \} |l\| < b_p.$$

При доказательстве теоремы существенно используются утверждения и конструкции из [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бережной Е. И.* Дискретный вариант локальных пространств Морри. Известия РАН. 2017. Том. 81, №. 1, стр. 3–30.

Е. И. Бережной, В. В. Кочерова В. В. (Ярославль, Россия)
ber@uniyar.ac.ru

О ВЛОЖЕНИИ $W^{1,n}(\Omega)$ ДЛЯ МНОЖЕСТВА ПРОИЗВОЛЬНОЙ МЕРЫ

Пусть в $\Omega \subseteq R^n$, $(n \geq 2)$ – открытое множество, $S(\mu;\Omega)$ – пространство измеримых на Ω функций $x : \Omega \to R$, X – симметричное пространство в $S(\mu;\Omega)$. Через $W^{1,p}(\Omega, X)$, $(1 \leq p < \infty)$ обозначим замыкание $C_0^{\infty}(\Omega)$ по норме Соболева

$$\|x|W^{1,p}(\Omega, X)\| = \|\nabla x|L^p\| + \|x|X\|.$$

Определим функцию $\psi_{R,n} : (0,\rho) \to R_+$ равенством

$$\psi_{\rho,n}(t) = nC_n^{1/n} \begin{cases} (ln\frac{\rho}{t})^{-1/n'}, & \text{при } t \in (0, \rho e^{-1/n'}), \\ (\frac{1}{n'})^{-1/n'}, & \text{при } t \in [\rho e^{-1/n'}, \rho) \end{cases} .$$

По функциям $\psi_{\rho,n}$ построим пространства Марцинкевича $M(\psi_{\rho,n})$, нормы в которых определяется равенством

$$\|x|M(\psi)\| = \sup_{0<t<\rho} \frac{\psi_{\rho,n}(t)}{t} \int_0^t x^*(s)ds,$$

$x^*(\cdot)$ – перестановка функции $|x(\cdot)|$ в невозрастающем порядке.

Теорема 1. *Зафиксируем* Ω. *Тогда для любого* x *из единичного шара пространства* $W^{1,n}(\Omega, X)$ *справедливо точное неравенство*

$$\sup_{\rho\in(0,\mu(\Omega))} \{2\|(x^*(.) - x^*(\rho))\chi(0,\rho)|M(\psi_{\rho,n})\|+$$

$$\|x^*(\rho)\chi(0,\rho) + x^*(.)\chi(\rho,\mu(\Omega))|X\|\} \le \|x|W^{1,n}(\Omega, X)\|. \quad (1)$$

Если в качестве пространства X взять пространство L^n с нормой $\|x|L^n\|_m = \frac{1}{m}\|x|L^n\|$, то в случае $\mu(\Omega) < \infty$ в (1) можно перейти к пределу и получить точную теорему вложения для пространства Соболева $W^{1,n}(\Omega)$ в норме Дирихле.

В случае $\Omega = R^n$ из теоремы 1 следуют результаты [1-2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Adachi S., Tanaka K.* Trudinger type inequality in R^n and their best exponent. // Pros. AMS., 1999, v. 128, p. 2051–2057.
2. *Li X., Ruf B.* A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in R^n. // Indiana Univ. Math. J., 2008, v. 57, p. 451–480.

В. С. Будыка (Донецк)
budyka.vik@gmail.com

НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ ПРЕДЕЛ ДЛЯ $2P \times 2P$ ОПЕРАТОРОВ ДИРАКА С ТОЧЕЧНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

Рассмотрим $2p \times 2p$ оператор Дирака, ассоциированный с дифференциальным выражением

$$D = \begin{pmatrix} c^2/2 & -i\,c\,\frac{d}{dx} \\ -i\,c\,\frac{d}{dx} & -c^2/2 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_p. \quad (1)$$

в $\mathfrak{H} = L^2(\mathcal{I}) \otimes \mathbb{C}^{2p}$. Здесь $c > 0$ обозначает скорость света, $\mathbb{I}_p = \mathbb{I}_{\mathbb{C}^p}$ — единичный оператор в $\mathbb{C}^p$, $\mathcal{I} = (a, b)$ с $-\infty < a < b \le +\infty$.

В работе рассматриваются реализации $D_{X,\alpha}$ выражения Дирака (1) с точечными взаимодействиями

$$\mathrm{dom}(D_{X,\alpha}) = \Big\{ f \in W^{1,2}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{I}\backslash X) \otimes \mathbb{C}^{2p} : f_I \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathcal{I}), f_{II} \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathcal{I}\backslash X);$$

$$f_{II}(a+) = 0\,, \quad f_{II}(x_n+) - f_{II}(x_n-) = -\frac{i\alpha_n}{c} f_I(x_n),\ n \in \mathbb{N} \Big\}$$

на дискретном множестве $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ на полуоси, где $\alpha_n = \alpha_n^* \in \mathbb{C}^{p\times p}$ и $f_I = \{f_1\ f_2\ \dots\ f_p\}^\top$, $f_{II} = \{f_{p+1}\ f_{p+2}\ \dots\ f_{2p}\}^\top$, $f = \{f_I\ f_{II}\}^\top$.

Обобщаются определенные результаты работы [2] на матричный случай. Показано, что эти реализации всегда самосопряженные.

Исследован нерелятивистский предел при стремлении скорости света к бесконечности

$$s - \lim_{c\to+\infty} \left(D^c_{X,\alpha} - (z + c^2/2)\right)^{-1} = (\mathrm{H}_{X,\alpha} - z)^{-1} \bigotimes \begin{pmatrix} \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_p \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p \end{pmatrix},$$

где $\mathrm{H}_{X,\alpha}$ — матричный оператор Шрёдингера с точечными взаимодействиями (см. [3]).

Эта работа основана на статье [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Budyika V., Malamud M., Posilicano A.* Nonrelativistic limit for $2p \times 2p$–Dirac operators with point interactions on a discrete set. Russian J. Math. Phys. 2017. V. 24, №. 4, pp. 426–435.

2. *Carlone R., Malamud M., Posilicano A.* On the spectral theory of Gesztesy–Šeba realizations of 1–D Dirac operators with point interactions on a discrete set. J. Differential Equations. 2013. V. 254, №. 9, pp. 3835–3902.

3. *Kostenko A.S., Malamud M.M., Natyagailo D.D.* Matrix Schrödinger operator with δ–interactions. Math. Notes. 2016, V. 100, №. 1, pp. 48–64.

Х. Х. Бурчаев (Грозный, РФ), Г. Ю. Рябых (Ростов-на-Дону, РФ)
bekhan.burchaev@gmail.com, ryabich@aaanet.ru

НАСЛЕДОВАНИЕ ГЛАДКОСТИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ БЕРГМАНА[1]

Пусть $A(R)$ – функции, аналитические в круге $D(R)$ радиуса $R \geq 1$; $0 < p < \infty$, l_g – линейный функционал над пространствами Бергмана A_p по $D = D(1)$, образованный g из $A(1)$ [1-2]. Функция $f \in A_p$ экстремальна для l_g, т.е. $l_g(f) == \|l_g\|$ и $\|f\|_{L_p(D)} = 1$. Положим, что

$$\Lambda_\alpha A := A(1) \bigcap \mathrm{Lip}(\alpha, T = \partial D), \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Теорема 1. *Если $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $g \in A_{q_1}$, $q < q_1 < \infty$, то $f = bh$, где b – произведение Бляшке, $h \in A_{(p-1)q_1}$ и не имеет нулей.*

Теорема 2. *Если $1 \leq p < \infty$, и $g \in A(R)$, $R > 1$, то f и $X : \min\limits_{x \in A_p} \|\bar{g} - x\|_{L_p} = \|\bar{g} - X\|_{L_p}$ обладают такой же гладкостью.*

Теорема 3. *Пусть $1 \leq p \leq 2$ и $g \in \Lambda_\alpha A$, тогда $f = bh$, где b – произведение Бляшке, $h \in \Lambda_\alpha A$ и не имеет нулей.*

Теорема 4. *Пусть $m \geq 2$, $\frac{2}{m+1} < p < \frac{2}{m}$ и $g^{(m-2)} \in \Lambda_\beta A$, где $\beta = \frac{2}{p} - m + \nu < 1$, $\nu > 0$. Тогда экстремальная функция для l_g существует, но может быть неединственной. Если $\mathcal{F}$ экстремальна для l_g, то $\mathcal{F} = \mathcal{B}\mathcal{H}$, где $\mathcal{B}$ – произведение Бляшке, $\mathcal{H}$ не имеет нулей и $\mathcal{H}^{(m-2)} \in \Lambda_\beta A$.*

Теоремы 1,2 и 3,4 являются продолжением [2–3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Захарюта В. П., Юдович В. И.* Общий вид линейного функционала в H_p' // Успехи матем. наук.— 1964.— Т. XIX.–2(116).—С. 139–142.

2. *Бурчаев Х. Х., Рябых В. Г.* Общий вид линейного функционала в метрическом пространстве H_p', $0 < p < 1$ // Сибирс. матем. ж. Деп в ВИНИТИ.— 1975.— 736–75.—С. 1–10.

3. *Бурчаев Х. Х., Рябых В. Г., Рябых Г. Ю.* Аналитичность в $\mathbb{C}$ экстремальных функций функционала, образованного полиномом над пространством Бергмана // Мат. форум (Итоги науки. Юг России). Исследования по математическому анализу. ЮМИ ВНЦ РАН и РСО–А.— 2014.— Т. 8, Ч. 1.— С. 204–214.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-01-00017).

В. Е. Владыкина (Москва, Россия)
vika-chan@mail.ru

РЕГУЛЯРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ИНВОЛЮЦИЕЙ[1]

Пусть L дифференциальный оператор, заданный дифференциальным выражением $Ly = l(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y, \quad p_j \in W_1^n[a,b],\ j = 1, ..., n$
с областью определения $D(L) = \{y \in W_1^{2n}[a,b] | U_j(y) = 0,\ j = 1, ...n\}$,где

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}y^{(k)}(a) + b_{jk}y^{(k)}(b).$$

Пусть $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ — инволюция отрезка $[a,b]$, т.е. $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = a$, $\varphi'(x) < 0$ и $\varphi(\varphi(x)) = x$. Предполагаем, что $\varphi \in W_1^{2n+1}[a,b]$.

Мы изучаем спектральную задачу

$$JLy = \mu y, \qquad U_j(y) = 0, \quad j = 1, ..., n, \qquad (Jf)(x) = f(\varphi(x)) \tag{1}$$

(здесь μ — спектральный параметр). Заметим, что оператор $T = (JL)^2$ корректно опеределен и является обыкновенным дифференциальным оператором $2n$-го порядка. Основной результат доклада следующий.

Теорема. *Пусть оператор $T = (JL)^2$ регулярен по Биркгофу. Тогда собственные и присоединенные функции оператора JL (спектральной задачи (1)) образуют безусловный базис Рисса со скобками пространства $L_2(a,b)$.*

Частные случаи этой теоремы для $JL = -y''(-x)$, $[a,b] = [-1,1]$ ранее были доказаны в работах [1,2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сарсенби А. М.* Безусловные базисы, связанные с неклассическим дифференциальным оператором второго порядка. Дифференциальные уравнения. 2010. Том 46. № 4. стр. 506–511
2. *Садыбеков М. А., Сарсенби А. М.* Критерий базисности системы собственных функций оператора кратного дифференцирования с инволюцией. Дифференциальные уравнения. 2012. Том 48. № 8. стр. 1126–1132

А. В. Гиль (Ростов-на-Дону, Россия)
gil-alexey@yandey.ru

ОЦЕНКИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ С ОСОБЕННОСТЯМИ ЯДЕР НА СФЕРАХ

Рассматривается оператор свертки $M_\theta^{\overline{\beta}}\varphi = m_\theta^{\overline{\beta}} * \varphi$ с ядром, имеющим степенные особенности на конечном объединении сфер:

$$m_\theta^{\overline{\beta}}(y) = \theta_1(|y|)(r_1^2 - |y|^2 + i0)^{\beta_1 - 1} \times \ldots \times \theta_{s-1}(|y|) \times$$
$$\times r_{s-1}^2 - |y|^2 + i0)^{\beta_{s-1}-1}\theta_s(|y|)(1 - |y|^2)_+^{\beta_s - 1},$$

[1]Работа поддержана грантом РНФ № 17-11-01215.

где $\overline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$, $\beta_j > 0$, $1 \le j \le s$, $0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_{s-1} < r_s = 1$. Здесь $\theta_j(r)$ - гладкие функции, $\theta_j(r_j) \neq 0$, $1 \le j \le s$.

Через $H^p = H^p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < \infty$, обозначим множество всех $\mathcal{S}'$ - распределений таких, что

$$f^+(x) = \sup_{0<\varepsilon<\infty} |(f * \varphi_\varepsilon)(x)| \in L^p,$$

где $\varphi \in \mathcal{S}$ и $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx \neq 0$, $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ и

$$(f * \varphi_\varepsilon)(x) = \langle f, \varphi_\varepsilon(x - \cdot)\rangle.$$

Положим $\|f\|_{H^p} = \|f^+\|_{L^p}$ (см. [1 , стр. 269]).

На $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$ - плоскости рассмотрим множество:

$$\mathcal{L}(\beta, n) = \left\{ \begin{array}{rl} \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right), 0 < p \le q < \infty : \frac{1}{p} - \frac{n}{q} \le \beta, & \text{если} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \le 1 \\ \frac{n}{p} - \frac{1}{q} \le \beta + (n-1), & \text{если} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ge 1 \end{array} \right\}.$$

Через $\mathcal{H}(M_\theta^{\overline{\beta}})$ обозначим множество всех пар $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$, для которых оператор $M_\theta^{\overline{\beta}}$ ограничен из H^p в H^q.

Теорема 1. *Пусть* $\beta_j > 0$, $1 \le j \le s$, $\beta_0 = \min\{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$. *Тогда* $\mathcal{L}(\beta_0, n) = \mathcal{H}(M_\theta^{\overline{\beta}})$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Miyachi A.* On some singular Fourier multipliers // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo., Sec. IA., 1981 V.28 P. 267–315

Д. Б. Диденко (Воронеж, Россия)
dmixtry@gmail.com

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРНЫХ ПОЛИНОМОВ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ N-ОГО ПОРЯДКА

Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, $\operatorname{End}\mathcal{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$. Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — линейный оператор с непустым резольвентным множеством $\rho(A)$ и $B_1, B_2, \ldots, B_N$ — операторы из алгебры $\operatorname{End}\mathcal{X}$, $N \in \mathbb{N}$

Определение 1. Пусть $\mathcal{B} : D(\mathcal{B}) \subset \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ — замкнутый оператор. Рассмотрим следующие условия:

1) $\operatorname{Ker}\mathcal{B} = \{0\}$, т.е. оператор $\mathcal{B}$ инъективен;
2) $1 \le n = \dim\operatorname{Ker}\mathcal{B} < \infty$;
3) $\operatorname{Ker}\mathcal{B}$ — бесконечномерное подпространство из $\mathcal{Y}$;
4) $\operatorname{Ker}\mathcal{B}$ — дополняемое подпространство в $\mathcal{Y}$;
5) $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{B}} = \operatorname{Im}\mathcal{B}$;
6) $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{B}} \neq \operatorname{Im}\mathcal{B}$;

7) $\operatorname{Im}\mathcal{B}$ — замкнутое дополняемое подпространство из $\mathcal{Z}$ конечн ой коразмерности ($\operatorname{codim}\operatorname{Im}\mathcal{B} = m < \infty$);

8) $\operatorname{Im}\mathcal{B}$ — зам кнутое дополняемое подпространство из $\mathcal{Z}$ бесконечной коразмерности;

9) $\operatorname{Im}\mathcal{B} = \mathcal{Z}$, т.е. $\mathcal{B}$ — сюръективный оператор;

10) $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{B}} \neq \mathcal{Z}$;

11) оператор $\mathcal{B}$ непрерывно обратим, т.е. $\mathcal{B}^{-1} \in \operatorname{Hom}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y})$.

Если для оператора $\mathcal{B}$ выполнены все условия из совокупности непротиворечивых условий $S \subset \{1, 2, \dots, 11\}$, то будем говорить, что оператор $\mathcal{B}$ находится в состоянии обратимости S. Множество состояний обратимости оператора $\mathcal{B}$ обозначим символом $\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathcal{B})$.

Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A} = A^N + B_1 A^{N-1} + \dots + B_N : D(A^N) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ с областью определения $D(\mathcal{A}) = D(A^N)$, $N \in \mathbb{N}$.

Наряду с оператором $\mathcal{A}$ определим оператор $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ с помощью матрицы $\mathbb{A} \sim \begin{pmatrix} A & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A & -I & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A & -I \\ B_N & B_{N-1} & B_{N-2} & \dots & B_2 & A + B_1 \end{pmatrix}$.

Теорема 1. *Множества состояний обратимости операторов* $\mathcal{A} : D(A^2) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *и* $\mathbb{A} : D(A)^N \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ *совпадают, т.е.* $\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathcal{A}) = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathbb{A})$.

П. А. Иванов (Ростов-на-Дону, Россия)
pavel_rsm@mail.ru

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ МНОГОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ПОММЬЕ

Для областей Ω_j, $1 \le j \le N$, в $\mathbb{C}$, содержащих 0, введем полицилиндрическую в $\mathbb{C}^N$ область $\Omega := \prod_{j=1}^{N} \Omega_j$. Частные операторы Поммье определяются следующим образом:

$$D_{j,0}(f)(t) := \begin{cases} \frac{f(t) - f(t_1, \dots, t_{j-1}, 0, t_{j+1}, \dots, t_N)}{t_j}, & t_j \neq 0, \\ \frac{\partial f}{\partial t_j}(t_1, \dots, t_{j-1}, 0, t_{j+1}, \dots, t_N), & t_j = 0, \end{cases}$$

$1 \le j \le N$, $f \in A(\Omega)$, $t = (t_j)_{j=1}^N \in \Omega$. Операторы $D_{j,0}$, $1 \le j \le N$, линейно и непрерывно действуют в пространстве Фреше $A(\Omega)$ всех аналитических в Ω функций. Для $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^N \in \mathbb{N}_0^N$, где $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, положим $D_0^\alpha := D_{1,0}^{\alpha_1} \cdots D_{N,0}^{\alpha_N}$.

В докладе идет речь о циклических векторах системы операторов $\mathcal{D}_0 := \{D_{j,0} : 1 \le j \le N\}$ в $A(\Omega)$. При этом функция $f \in A(\Omega)$ называется циклическим вектором $\mathcal{D}_0$ в $A(\Omega)$, если система $\{D_0^\alpha(f) : \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ полна в $A(\Omega)$.

Основным результатом является

Теорема. *Пусть Ω_j, $1 \le j \le N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие 0. Функция $f \in A(\Omega)$ является циклическим вектором $\mathcal{D}_0$ в $A(\Omega)$ тогда и только тогда, когда f отлична от рациональной функции.*

Следствие. *Целая в $\mathbb{C}^N$ функция f является циклическим вектором $\mathcal{D}_0$ в $A(\mathbb{C}^N)$ тогда и только тогда, когда f отлична от многочлена.*

Ранее приведенные результаты были получены в одномерном случае (см. [1]).

В доказательстве теоремы существенно используются операторы сдвига T_z, $z \in \mathbb{C}^N$, для оператора Поммье. Они определяются таким образом, что для любых многочлена f и $z \in \mathbb{C}^N$ выполняется равенство $T_z(f) = \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} z^\alpha D_0^\alpha(f)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Линчук Н. Е.* Представление коммутантов оператора Поммье и их приложения. 1988. Т. 44, № 6, стр. 794–802.

Н. Р. Изварина (Москва, Россия)
izvarinanat@gmail.com

ОБ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ ОПЕРАТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ДИФФЕОМОРФИЗМАМИ

Объектом изучения данной работы являются операторы, ассоциированные с действием дискретной группы G диффеоморфизмов на гладком многообразии, или G-операторы.

На сфере S^m рассмотрим диффеоморфизм

$$g: \quad \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m, \tag{1}$$

а также рассмотрим G-операторы, которые представляются в виде конечной суммы

$$D = \sum_k D_k T^k : \quad H^s(\mathbb{S}^m) \to H^{s-d}(\mathbb{S}^m), \tag{2}$$

где $Tu(x) = u(g^{-1}x)$ — оператор сдвига, а D_k — это псевдодифференциальные операторы (ПДО) порядка d на сфере $\mathbb{S}^m$, $k \in \mathbb{Z}$.

Как известно, эллиптичность оператора (2) зависит от показателя гладкости s пространства Соболева. Именно поэтому интересно выяснить, для каких s оператор эллиптичен.

В данной работе была исследована эллиптичность оператора вида (2), ассоциированного с диффеоморфизмом (1), где g — диффеоморфизм типа Морса-Смейла.

Также было получено, что в случае, когда g представляет собой сдвиг вдоль траектории параболического диффеоморфизма, эллиптичность оператора (2) не зависит от показателя гладкости s.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Antonevich A.B. Linear functional equations. Operator approach. Operator Theory: Advances and Applications. Vol. 83. Basel: Birkh?user Verlag, 1996.*

2. *Savin A.Yu., Sternin B.Yu. Elliptic theory for operators associated with diffeomorphisms of smooth manifolds. Pseudo-Differential Operators, Generalized Functions and Asymptotics, Operator Theory: Advances and Applications. 231, Basel:Springer, 2013. p. 1-26.*

Л. Ю. Кабанцова (Воронеж, Россия)
dlju@yandex.ru

УСЛОВИЯ ОБРАТИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть $\mathcal{X}$ – комплексное банахово пространство и $\mathrm{End}\mathcal{X}$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$.

Рассмотрим разностный оператор второго порядка $\mathrm{L} : l^p(\mathbb{Z},\mathcal{X}) \to l^p(\mathbb{Z},\mathcal{X})$, действующий по правилу

$$(\mathrm{L}x)(n) = x(n+2) + B_1x(n+1) + B_2x(n), \quad x \in l^p,\ n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где $B_1, B_2 \in \mathrm{End}\mathcal{X}$, и разностный оператор первого порядка $\mathbb{L} : l^p(\mathbb{Z},\mathcal{X}^2) \to l^p(\mathbb{Z},\mathcal{X}^2)$, действующий по правилу

$$\mathbb{L} : \begin{pmatrix} x \\ Sx \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} S & -I \\ B_2 & S+B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ Sx \end{pmatrix},\ x \in l^p.$$

Здесь через S обозначен оператор сдвига последовательностей из l^p: $S \in \mathrm{End}\,l^p$, $(Sx)(n) = x(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in l^p$. Одновременная обратимость операторов L и $\mathbb{L}$ установлена в статье [1].

Изучение условий обратимости линейного разностного оператора второго порядка (1) проводится в условиях наличия разделенных корней соответствующего "алгебраического" операторного уравнения

$$X^2 + B_1X + B_2 = 0, \tag{2}$$

рассматриваемого в банаховой алгебре $\mathrm{End}\mathcal{X}$.

Два корня Λ_1 и Λ_2 назовём *разделёнными*, если оператор $\Lambda_1 - \Lambda_2$ обратим в алгебре $\mathrm{End}\mathcal{X}$.

Теорема 1. *Пусть* Λ_1, Λ_2 *- разделённая пара корней уравнения (2). Тогда для обратимости операторов* $\mathrm{L} : l^p(\mathbb{Z},\mathcal{X}) \to l^p(\mathbb{Z},\mathcal{X})$ *и* $\mathbb{L} : l^p(\mathbb{Z},\mathcal{X}^2) \to l^p(\mathbb{Z},\mathcal{X}^2)$ *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$(\sigma(\Lambda_1) \cup \sigma(\Lambda_2)) \cap \mathbb{T} = \varnothing,$$

где $\sigma(\Lambda_k)$ *– спектры операторов* Λ_k, $k = 1, 2$; $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

Кроме того, получено представление (формулы) обратных операторов к рассматриваемым операторам L и $\mathbb{L}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баскаков А. Г., Дуплищева А. Ю.* Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка. Известия РАН. Сер. матем., 2015. Том. 79, №. 2. стр. 3–20.

В. М. Каплицкий (Южный федеральный университет, Южный математический институт ВНЦ РАН, Россия)
kaplitsky@donpac.ru

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ О МОДЕЛИ ИЗИНГА

В работе получена общая формула, дающая представление статистической суммы обобшенной модели Изинга на конечной решетке, в виде функционала от спектральных инвариантов некоторой теплицевой матрицы. Получено асимптотическое выражение статистической суммы при больших N (N—число узлов решетки), которое может быть основой для точного вычисления представляющих интерес физических величин, например, удельной свободной энергии при больших N. Обсуждаются некоторые математические задачи, связаннае с теорией теплицевых матриц, решение которых представляет интерес в связи с исследованиями точно решаемых моделей статистической физики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бакстер Р.* Точно решаемые модели в статистической механике. М.: Мир, 1978.
2. *Вергелес С. Н.* Калибровочная суперсимметричная модель Изинга на кубической решетке вблизи критической точки в представлении свободных полей // Письма в ЖЭТФ, 96:2(2012), 128-134.
3. *Березин Ф. А.* Плоская модель Изинга // УМН, 24:3(147),1969, 3-22.

В. Н. Козлов, Ефремов А. А. (Санкт-Петербург, Россия)
saiu@ftk.spbstu.ru

НЕГЛАДКИЕ ПРОЕКТОРЫ МИНИМИЗАЦИИ НОРМЫ НА КОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВАХ

Операторы на основе ортогональных проекторов на линейные многообразия и негладких проекторов на параллелепипеды для экстремальной задачи в конечномерном пространстве: вычислить

$$
\begin{gathered}
x_* = \arg\min \Big\{ \varphi = \|x - C\|^2 \;\Big|\; x \in D^0 \cap D^1 \neq \emptyset\,, \\
D^0 = \{x \,|Ax = b, rang\, A = m\} \in R^{m\times n}, \\
D^1 = \{x \,|\, x^- \leq x \leq x^+\} \neq \emptyset \Big\} \in R^n.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Придельные точки имеют следующий вид

$$x_*(\alpha_*) = p_2 + \alpha_* p = P^1\left[P^0[p_1]\right] + \\ \alpha_*\left\langle P^1\left[P^0(p_1)\right] - p_1\right\rangle = P^1\left[P^0\left[P^1\left(P^0(C)\right)\right]\right] \\ +\alpha_*\left\langle P^1\left[P^0\left[P^1\left(P^0(C)\right)\right]\right] - P^1\left(P^0(C)\right)\right\rangle, \tag{2}$$

где аффинный и негладкий проекторы и параметры определены равенствами

$$P^0(C) = P^0 C + P_A b,\ \ P^0 = E_n - P^{\perp} = P_A A, \\ P_A = A^T\left(AA^T\right)^{-1},\ \alpha_* = \min_{i\in[1,\dots,m]}\left[b - (A_i, p_0)\right], \\ P^1\left(x^0\right) = 0,5\left(\left|X^0 - X^-\right| - \left|X^0 - X^+\right| + X^- + X^+\right).$$

Задачу (1) можно также решить релаксационно-проекционным методом

$$X^0_{k+1} = P^0\left(X^0_k\right) \in D^0,\ \ X^1_{k+1} = P^1\left(X^0_{k+1}\right) \in D^1, \\ k = 0, 1, 2, \dots\ ,\ \ X^0_0 = P^0(C), \tag{3}$$

для которого (2) определяет предельные точки метода, поскольку последовательность (3) асимптотически сходится $x_* = \lim\ x_n,\ n \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В. Н.* Негладкие системы, операторы оптимизации и устойчивость. Изд-во Политехн. ун-та. СПб. 2012.

В. Д. Кряквин, Г. П. Омарова (ЮФУ, Россия)
kryakvin@sfedu.ru, om.gulnara@yandex.ru

ОБЩАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА-ЗИГМУНДА ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА ГЛАДКОСТИ НА $\mathbb{R}^n_+$.

Рассматриваются операторы Грина A из алгебры Буте де Монвеля (см. [1]) в функциональных пространствах Гельдера-Зигмунда $\Lambda^{s(\cdot)}(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ с переменным показателем гладкости $s(\cdot)$ (см. [2]), где $s(\cdot)$ — непрерывная ограниченная вещественнозначная функция такая, что $|s(x+y) - s(x)| \le \frac{S_1}{|\log_2|y||}$ для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, $0 < |y| < 1$.

Доказано, что оператор Грина

$$A = \begin{pmatrix} P_+ + G & K \\ T & Q \end{pmatrix} : \begin{matrix} \Lambda^{s(\cdot)}(\overline{\mathbb{R}}^n_+) \\ \bigoplus \\ \Lambda^{s(\cdot',0)-m+\lambda}(\mathbb{R}^{n-1}) \end{matrix} \to \begin{matrix} \Lambda^{s(\cdot)-m}(\overline{\mathbb{R}}^n_+) \\ \bigoplus \\ \Lambda^{s(\cdot',0)-\gamma}(\mathbb{R}^{n-1}) \end{matrix},$$

где $P_+ = r^+ P e^+$ — псевдодифференциальный оператор порядка m на полупространстве со свойством трансмиссии, G — сингулярный оператор Грина порядка m и класса $r \ge 0$, K — оператор Пуассона (кограничный) порядка λ, T — граничный оператор порядка γ и класса r, Q — псевдодифференциальный оператор на

$\mathbb{R}^{n-1}$ порядка $-m+\lambda+\gamma$, ограничен в указанных пространствах, если выполняются условия:
i)существует $\varepsilon > 0$ такое, что $s(x', x_n) = s(x', 0)$ для любого $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $|x_n| \leq \varepsilon$;
ii) $s(x', 0) \geq s_0 > r-1$ при любом $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Boutet de Monvel* Boundary problems for pseudo-differential operators. Acta Math. 1971. V. 126. P. 11–51.
2. *Кряквин В. Д.* Об ограниченности псевдодифференциальных операторов в пространствах Гельдера-Зигмунда переменного порядка. Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, № 6. С. 1315–1327.

Д. М. Поляков (Владикавказ, Россия)
DmitryPolyakow@mail.ru

ОБ ОПЕРАТОРАХ С РАЗДЕЛЕННЫМ СПЕКТРОМ[1]

Рассмотрим самосопряженный оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ с областью определения $D(A)$ из комплексного гильбертова пространства $\mathcal{H}$. В настоящей работе изучаются спектральные свойства возмущенного оператора $A - B : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, где оператор B принадлежит банаховой алгебре $\operatorname{End}\mathcal{H}$ линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H}$.

Ниже символом $\mathbb{J}$ обозначается одно из следующих множеств $\{0, 1, \ldots, N\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Предположим, что спектр $\sigma(A)$ оператора A допускает представление вида

$$\sigma(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{J}} \sigma_n, \tag{1}$$

где множества σ_n, $n \in \mathbb{J}$, являются замкнутыми, взаимно не пересекаются, причем выполнено условие $d = \inf_{n \in \mathbb{J}} d_n > 0$, где $d_n = \operatorname{dist}\big(\sigma_n, \sigma(A) \setminus \sigma_n\big)$. Оператор A с таким свойством спектра будем называть *оператором с разделенным спектром* относительно представления (1). Отметим, что множества σ_n, $n \in \mathbb{J}$, могут быть неограниченными.

Введем следующее

Определение. *Множество Δ_0 из спектра $\sigma(A)$ линейного оператора A называется спектральным, если гильбертово пространство $\mathcal{H}$ является прямой суммой $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ инвариантных относительно A замкнутых подпространств $\mathcal{H}_k$, $k = 0, 1$. Отметим, что при этом спектры $\sigma(A_k)$, $k = 0, 1$, сужений $A_k = A|\mathcal{H}_k : D(A_k) = D(A) \cap \mathcal{H}_k \subset \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_k$, $k = 0, 1$, оператора A на $\mathcal{H}_k$ обладают следующими свойствами: $\sigma(A_0) = \Delta_0$, $\sigma(A_1) = \Delta_1$, $\operatorname{dist}(\Delta_0, \Delta_1) > 0$.*

Основным результатом является

Теорема 1. *Пусть для возмущения $B \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ выполнено условие $\|B\| < d/(4\pi)$.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-00205)

Тогда спектр $\sigma(A-B)$ *оператора* $A-B$ *представим в виде* $\sigma(A-B)=\cup_{n\in\mathbb{J}}\widetilde{\sigma}_n$, *где множества* $\widetilde{\sigma}_n$, $n\in\mathbb{J}$, *являются спектральными. Кроме того, имеют место оценки*

$$\operatorname{dist}(\widetilde{\sigma}_n,\sigma_n)<d/\pi,\quad \operatorname{dist}(\widetilde{\sigma}_n,\sigma(A-B)\setminus\widetilde{\sigma}_n)>d(1-2/\pi).$$

В. В. Семёнов (Киев, Украина)
semenov.volodya@gmail.com

КОНЕЧНОЕ ЧИСЛО ИТЕРАЦИЙ В ДВУХЭТАПНЫХ АЛГОРИТМАХ ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

В докладе планируется рассказать о сходимости некоторых недавно предложенных методов [1, 2] решения вариационных неравенств при условии остроты.

Рассматривается вариационное неравенство

$$\text{найти } x\in C:\ (Ax,y-x)\geq 0\quad \forall y\in C,$$

где C — непустое выпуклое замкнутое подмножество гильбертова пространства H, $A:H\to H$ — нелинейный монотонный и липшицевый оператор. Предполагается непустота его множества решений S и выполнение условия остроты

$$\exists\alpha>0:\ (Ax,x-P_Sx)\geq\alpha\,\|x-P_Sx\|\quad \forall x\in C,$$

где P_S — оператор метрического проектирования на S.

Анализируемые методы имеют вид

$$\begin{cases} y_n=2x_n-x_{n-1},\\ x_{n+1}=P_C\left(x_n-\lambda Ay_n\right)\end{cases}$$

и

$$\begin{cases} T_n=\left\{z\in H:\ (x_n-\lambda Ay_{n-1}-y_n,z-y_n)\leq 0\right\},\\ x_{n+1}=P_{T_n}\left(x_n-\lambda Ay_n\right),\\ y_{n+1}=P_C\left(x_{n+1}-\lambda Ay_n\right),\end{cases}$$

где $\lambda\in\left(0,\frac{\sqrt{2}-1}{L}\right)$, $L>0$ — постоянная Липшица оператора A.

Доказано, что последовательности (x_n), генерируемые алгоритмами, сходятся к некоторому решению вариационного неравенства за конечное число итераций, то есть существует номер $n\in\mathbb{N}$ такой, что $x_n\in S$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Malitsky Yu. V., Semenov V. V.* An extragradient algorithm for monotone variational inequalities. Cybernetics and Systems Analysis. 2014. Vol. 50. P. 271–277.

2. *Malitsky Yu.* Projected reflected gradient methods for monotone variational inequalities. SIAM Journal on Optimization. 2015. Vol. 25. P. 502–520.

Н. Б. Ускова (Воронеж, Россия)
nat-uskova@mail.ru

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПОДОБИЯ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ[1]

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_2[0,\omega]$ рассматриваются операторы L_i, $i = 1,2,3$, которые задаются следующими дифференциальными выражениями

$$
\begin{aligned}
(l_1x)(s) &= \frac{dx}{ds} - a_1x(s) - v_1(s)x(\omega - s),\\
(l_2x)(s) &= \frac{dx}{ds} - q_0(s)x(s) - q_1(s)x(\omega - s),\\
(l_3x)(s) &= \frac{dx}{d\xi}\bigg|_{\xi=\omega-s} - g_0(s)x(s) - g_1(s)x(\omega - s),
\end{aligned}
$$

с областями определения $D(L_i)$, $i = 1,2,3$, задаваемыми периодическими краевыми условиями, т. е. $D(L_i) = \{x \in W_2^1[0,\omega] : x(0) = x(\omega)\}$, $i = 1,2,3$. Потенциалы v_1, q_0, q_1, g_0, g_1 принадлежат $\mathcal{H}$, $a_1 \in \mathbb{C}$. Символом $\mathfrak{L}_0 : D(\mathfrak{L}_0) = D(L_i) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ обозначен оператор дифференцирования $(\mathfrak{L}_0x)(s) = dx/ds$, спектральные проекторы P_l, $l \in \mathbb{Z}$, которого задаются формулой $(\mathcal{P}_lx)(s) = (x(s), e^{i2\pi ls/\omega})e^{i2\pi ls/\omega} = \widehat{x}(l)e^{i2\pi ls/\omega}$ и пусть $\mathcal{P}_{(k)} = \sum_{|i|\leqslant k}\mathcal{P}_i$. Основной результат содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Существует такое число $k \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, что каждый из операторов L_i, $i = 1,2,3$, подобен оператору $\mathfrak{L}_0 - \mathcal{V}_i$, $i = 1,2,3$, где операторы $\mathcal{V}_i$, $i = 1,2,3$, принадлежат идеалу операторов Гильберта-Шмидта $\mathfrak{S}_2(L_2[0,\omega])$ и имеют место равенства $L_iU_i = U_i(\mathfrak{L}_0 - \mathcal{V}_i)$, $i = 1,2,3$, подпространства $\mathcal{H}_{(k)} = \operatorname{Im}\mathcal{P}_{(k)}$ и $\mathcal{H}_j = \operatorname{Im}\mathcal{P}_j$, $|j| > k$, являются инвариантными относительно операторов $\mathfrak{L}_0$, $\mathcal{V}_i$, $i = 1,2,3$. Более того, операторы L_i, $i = 1,2,3$, есть U_i-ортогональная прямая сумма вида*

$$L_i = U_i(\mathfrak{L}_0 - a_iI - \big(\mathcal{V}_{i(k)} \oplus \bigoplus_{|j|>k}\mathcal{V}_{ij}\big))U_i^{-1}, \quad i = 1,2,3,$$

где $a_2 = \widehat{q}_0(0)$, $a_3 \in \mathbb{C}$, относительно U_i-ортогонального разложения пространства $L_2[0,\omega]$ вида $L_2[0,\omega] = U_i\mathcal{H}_{(k)} \oplus \oplus_{|j|>k}U_i\mathcal{H}_j$. Каждый из операторов $\mathcal{V}_{i(k)}$ имеет ранг $2k+1$, а операторы $\mathcal{V}_{ij}$, $|j| > k$, $i = 1,2,3$, — ранг 1. Обратимые операторы преобразования U_i, $i = 1,2,3$, принадлежат $\operatorname{End} L_2[0,\omega]$ *и $U_1 - I \in \mathfrak{S}_2(L_2[0,\omega])$.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00197)

Session II

Function Theory and Approximation Theory

Fedotov A. I. (Kazan, Russia)
fedotovkazan@mail.ru

SOLVED AND OPENED PROBLEMS OF TRIGINOMETRIC INTERPOLATION

Let $\mathcal{P}_n$ be the trigonometrical polynomial Hermite-Fejer interpolation operator

$$(P_n x)(\tau) = \sum_{|k|\le n} (x(t_k) + ix'(t_k)(1 - e_1(\tau - t_k)))\xi_n(\tau, t_k),$$

w.r.t. the equally-spaced multiple collocation points on $[-\pi, \pi]$, and H^s be Sobolev space.

Theorem 1. *The operator $\mathcal{P}_n$ is bounded and the following estimation is valid*

$$\|\mathcal{P}_n\|_{H^{1+s}\to H^{1+s}} \le 2\sqrt{\zeta(2s)}, \quad n = 1, 2, ..., \ s > \frac{1}{2},$$

where $\zeta(t) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-t}$- is the Riemann's ζ-function bounded and decreasing for $t > 1$.

Let $P_{\mathbf{n}}$ be the trigonometrical polynomial m-dimesional Hermite-Fejer interpolation operator

$$(P_{\mathbf{n}} u)(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{I_n}} (u(\mathbf{t_k}) + i\mathbf{u}'_{\tau}(\mathbf{t_k}) \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{e_1}(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{t_k})))\xi_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{t_k}),$$

w.r.t. the equally-spaced by each dimension multiple collocation points on $[-\pi, \pi]^m$, and H^s be m-dimesional Sobolev space.

Theorem 2. *For all $m \in N$, $m \ge 2$, $s > m/2$, and $\mathbf{n} \in N^m$ the following estimation is valid:*

$$\|P_{\mathbf{n}}\|_{H^{1+s}\to H^{1+s}} \le 2^m m^{1+s/2} M^{1+s}(2\mathbf{n} + \mathbf{1})\sqrt{\zeta(2s - m + 1)},$$

$$M(\mathbf{n}) = \left(\frac{\sqrt{\mathbf{n}^2}}{\min(\mathbf{n})}\right).$$

However many problems of triginometric interpolation are still opened.

H. Hayrapetyan (Yerevan State University, Yerevan, Armenia)
hhayrapet@gmail.com

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH INFINITE INDEX

In the work it is investigated Riemann boundary value problem in a unit circle $D^+ = \{z; |z| < 1\}$ with the following setting:

Problem R

Determine analytic in $D^+ \cup D^-$ function $\varphi(z), \varphi(\infty) = 0$ such that the following holds:

$$\lim_{r \to 1-0} \|\varphi^+(rt) - a(t)\varphi^-(r^{-1}t) - f(t)\|_{L^p(\rho)} = 0, \tag{1}$$

where $1 \le p < \infty$, $\rho(t) = \prod_{k=1}^{\infty} |t_k - t|^{\delta_k}$, $\delta_k > 0, \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty$.

On a solution

In the case $1 < p < \infty$ it is shown that problem (1) is normally solvable. In other words, the homogeneous problem has a finite number of linearly independent solutions, and the inhomogeneous problem is solvable for any function $f \in L^p(\rho)$. If $p = 1$, $a(t) \equiv 1$ and

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k ln|1 - t_k| > -\infty$$

then the general solution of the homogeneous problem (1) can be represented in the form:

$$\varphi_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{t_k - z},$$

where $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k < \infty$. In the work it is received the general solution of problem (1).

REFERENCES

1. *Hayrapetyan H. M., Petrosyan V. G.* Riemann Problem in the weighted spaces $L^1(\rho)$, *Journal of Contemporary Mathematical Analysis* **51** (2016), 215–227

M. A. Karapetyants (Moscow, Russian Federation)
karapetyantsmk@gmail.com

SUBDIVISION SCHEMES ON A DYADIC HALF-LINE

We consider the subdivision operator on a dyadic half-line. Necessary and sufficient convergence conditions, the connection between the subdivision scheme and the refinement equation, existence criterion of a fractal curve and continuous solution of the refinement equation and some combinatorial properties of a subdivision scheme are studied. The conjecture on convergence of subdivision schemes with non-negative masks is also formulated.

REFERENCES

1. *Protasov V. Yu.* Dyadic wavelets and refinable functions on a half-line. Sbornic: Mathematics. 2006. Vol. 197, No. 10, pp. 129–160.
2. *Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A.* Walsh series and transforms: theory and applications. Nauka.1987.
3. *Daubechies I.* Ten lectures on wavelets. SIAM.1992.

4. *Golubov B. I.* Binary analysis elements. LKI.2007.
5. *Novikov I. A., Protasov V. Yu., Skopina M. A.* Wavelet theory. PhysMatLit.2005.
6. *Melkman A. A.* Subdivision schemes with non-negative masks converge always - unless they obviously cannot. Baltzer Journals. 1996.

A. A. Shkalikov (Moscow, Russia)
ashkaliko@yandex.ru

SPECTRAL PORTRAITS AND THE EIGENVALUE DYNAMICS OF NON-SELF-ADJOINT STURM-LIOUVOLLE OPERATORS WITH SMALL PARAMETER

The objective of the talk is a non-self-adjoint Sturm-Liouville problem of the form

$$\varepsilon^2 y'' + q(x,\lambda)y = 0$$

where q — is an entire function on x and analytic on λ in a domain $G \subset \mathbb{C}$. Here λ plays the role of non-liinear spectral parameter (in particular, the case $q(x,\lambda) = q(x) - \lambda$ corresponds to the usual spectral problem), and ε is the physical parameter, which is assumed to be small or large. Our goal is to learn the behavior of the spectrum of this problem on a finite segment, on the semi-axis and on the whole axis as ε tends to 0 (certainly, it is assumed that in the case of finite interval or semi-axis boundary conditions are involved).

We will show that the spectrum of the problem in question is localized in an ε-neighborhood of a set, which we call the limit spectral graph. This set consists of three types of curves and the equations for these curves will be written down. Moreover, the dynamics of the eigenvalues along these curves will be explained (the so called quantization formulae). We will pointed out the connection of the problem with the celebrated Orr-Sommerfeld equation arising in hydrodynamics.

Special attention will be paid to the so-called PT-symmetric potential.

The talk is based on the joint works with S.N.Tumanov.

The work is supported by Russian Science Foundation, grant № 17-11-01215.

I. G. Tsar'kov (Russia, Moscow)
tsar@mech.math.msu.su

SMOOTHING OF UNIFORMLY CONTINUOUS FUNCTIONS ON L_p [1]

Let X be a Banach space, and let A be a nonempty subset of X. We say that a function $f : A \to \mathbb{R}$ belongs to the class $H^\alpha(M)$ ($\alpha \in (1,2]$) if it lies in $D(A)$, and f' belongs to the Hölder class of order $\alpha - 1$ on A. Such functions will be called α-smooth functions.

[1]This research was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research (grant no. 16-01-00295)

By $(\mathcal{H}^\alpha)$ we denote the class of all real Banach spaces X such that the norm on X belongs to the class $H^\alpha(X \setminus B, \mathbb{R})$, where $B = \{x \in X \mid \|x\| \leqslant 1\}$ is the unit ball in this space. Such spaces will be called α-smooth spaces. We note that L_p-space $(1 < p < \infty)$ belongs to the class $(\mathcal{H}^\alpha)$, where $\alpha = \min\{p, 2\}$.

In this work we investigate the problem on the uniform approximation of uniformly continuous functions by functions having the maximum possible uniform smoothness.

For any function $g : A \to Y$, where $A \subset X$ and Y be a Banach space, by $\|g\|$ and $\omega(g, \varepsilon)$ $(\varepsilon \geqslant 0)$ we denote correspondingly

$$\sup_{x \in A} \|g(x)\|_Y \quad \text{and} \quad \sup\{\|g(x) - g(y)\|_Y \mid x, y \in A : \|x - y\| \leqslant \varepsilon\}.$$

Theorem 1. *Let $X \in (\mathcal{H}^\alpha)$, $\alpha \in (1, 2]$; $A \subset X$ be a nonempty set. Then there exists $K > 0$ such that for each $\varepsilon > 0$, each uniformly continuous function $f : A \to \mathbb{R}$ there exists a α-smooth function $\varphi : X \to \mathbb{R}$ for which*

$$\|f - \varphi\| \leqslant 3\omega(f, \varepsilon), \quad \omega(\varphi', \Delta) \leqslant K \frac{\omega(f, \varepsilon)}{\varepsilon^\alpha} \Delta^\alpha,$$

where $\Delta \in [0, \varepsilon/\sqrt{2}]$. In particularly, if $X = L_p$ $(1 < p < \infty)$ then above assertion is fulfilled for $\alpha = \min\{p, 2\}$. We note that for $X = L_p$ $(1 < p < \infty)$ the order $\alpha = \min\{p, 2\}$ is the maximum possible order of smoothing.

М. В. Невский, А. Ю. Ухалов (Ярославль, Россия)
mnevsk55@yandex.ru, alex-uhalov@yandex.ru

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Пусть $Q_n = [0, 1]^n$, $S \subset Q_n$ — n-мерный невырожденный симплекс. Рассмотрим интерполяционный проектор P, действующий из $C(Q_n)$ на пространство линейных функций n переменных, узлы которого совпадают с вершинами S. Через $\|P\|$ обозначим норму P как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$. Пусть θ_n есть минимальное возможное значение $\|P\|$. Положим также $\xi(S) = \min\{\sigma \geq 1 : Q_n \subset \sigma S\}$, $\xi_n = \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$. Под σS понимается образ S при гомотетии относительно центра тяжести симплекса с коэффициентом σ.

При любом n выполняются неравенства

$$\frac{n+1}{2n} (\theta_n - 1) + 1 \leq \xi_n \leq \frac{n+1}{2} (\theta_n - 1) + 1.$$

Справедливы соотношения $\theta_n \asymp n^{1/2}$, $n \leq \xi_n < n + 1$. По поводу этой тематики и различных оценок см. [1]. Точные значения θ_n сегодня известны лишь для

$n = 1, 2, 3, 7$. Величины ξ_n мы знаем для $n = 2$, $n = 5$, $n = 9$ и бесконечной совокупности тех n, для каждого из которых существует матрица Адамара порядка $n + 1$. За исключением $n = 2$, все известные значения ξ_n равны n.

В докладе предполагается привести новые результаты, уточняющие теоретические верхние границы чисел θ_n (для $n \leq 26$) и чисел ξ_n (для $n \leq 118$). Многие оценки удалось получить, построив симплексы с максимальным объёмом в Q_n. В качестве примеров приведём неравенства ([2], [3])

$$\theta_{23} \leq \frac{9}{2}, \quad \theta_{24} \leq \frac{103}{21}, \quad \theta_{25} \leq 5, \quad \theta_{26} \leq \frac{474}{91},$$

$$\xi_{50} \leq \frac{1162}{23}, \quad \xi_{60} \leq \frac{1985}{33}, \quad \xi_{90} \leq \frac{1538}{17}, \quad \xi_{118} \leq \frac{8641}{73}.$$

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ, проект № 1.10160.2017/5.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Невский М. В.* Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции. Ярославль: ЯрГУ. 2012.

2. *Невский М. В., Ухалов А. Ю.* О минимальном коэффициенте поглощения для n-мерного симплекса (статья принята к печати).

3. *Невский М. В., Ухалов А. Ю.* Об оптимальной интерполяции линейными функциями на n-мерном кубе (статья принята к печати).

Д. А. Полякова (Ростов-на-Дону, Владикавказ, Россия)
forsites1@mail.ru

ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В работе рассматривается частный случай пространств ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на числовой прямой, а именно, пространства $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$, порождаемые весами $\omega(t) = t^{\rho(t)}$, где $\rho(t) \to \rho \in (0, 1)$ — некоторый уточненный порядок.

Данные пространства в определенном смысле представляют собой обобщенные проективные аналоги известных классов Жевре.

В пространстве $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ исследуется дифференциальное уравнение бесконечного порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)} = g\,, \tag{1}$$

разрешимое в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ при любой правой части $g \in \mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$.

Символом уравнения (1) служит целая функция $\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-i)^k z^k$, удовлетворяющая определенным условиям роста.

Основной результат работы заключается в следующем. По символу μ уравнения (1) в явном виде строится возрастающая последовательность $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$ положительных чисел такая, что система экспонент $\left\{e^{\mp i\nu_j x}\right\}_{j=1}^{\infty}$ является абсолютно представляющей в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$, и такая, что для $|\mu(\mp\nu_j)|$ выполняется подходящая оценка снизу.

Это позволяет доказать, что если правая часть g уравнения (1) разложена в абсолютно сходящийся ряд по указанной системе

$$g = \sum_{j=1}^{\infty} g_j^{+} e^{-i\nu_j x} + \sum_{j=1}^{\infty} g_j^{-} e^{i\nu_j x},$$

то функция

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j^{+}}{\mu(\nu_j)} e^{-i\nu_j x} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j^{-}}{\mu(-\nu_j)} e^{i\nu_j x}$$

является решением уравнения (1).

Доказательство основано на аналогичных результатах из [1], полученных для пространств функций на конечном интервале, а также на известном свойстве устойчивости слабо достаточных множеств и абсолютно представляющих систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полякова Д. А.* О решениях уравнений свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций. Алгебра и анализ. 2014. Т. 26, № 6, стр. 121–142.

В. В. Шустов (Москва, Россия)
vshustov@gosniias.ru

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ СОСТАВНЫМИ ДВУХТОЧЕЧНЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ ЭРМИТА

Как продолжение работ [1-2] рассматривается задача о представлении функции составным многочленом, являющимся кусочно-заданной функцией, определенной на объединении отрезков, на каждом из которых функция представлена двухточечным интерполяционным многочленом Эрмита [1].

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[x_0,x_n]$ и имеет достаточное число производных на этом отрезке. Пусть также в точках $x_i = x_0 + ih$, i=0,1,...,n этого отрезка, где h=$(x_n$−$x_0)/n$, заданы значения функции $f(x)$ и ее производных до порядка m включительно:

$$f^{(j)}(x_i) = f_i^{(j)}, \quad j = 0, 1, ..., m, \;\; i = 0, 1, ...,n. \tag{1}$$

Необходимо построить составной многочлен $H(x){=}H_i(x)$, $x \in [x_i,x_{i+1})$, $i = 0,1,...,n-1$, удовлетворяющий условию (1), и оценить остаточный член r_m. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию (1). Тогда она может быть представлена в виде:* $f(x){=}H_m(x){+}r_m(x)$, где

$$H_m(x) = (1-\xi)^{m+1}\sum_{j=0}^{m}\frac{f_i^{(j)}h^j}{j!}\xi^j\sum_{k=0}^{m-j}c_{m+k}^k\xi^k+\xi^{m+1}\sum_{j=0}^{m}\frac{f_{i+1}^{(j)}h^j}{j!}(\xi-1)^j\sum_{k=0}^{m-j}c_{m+k}^k(1-\xi)^k,$$

$$\xi = \left\{\frac{x-x_0}{h}\right\}, i = \left[\frac{x-x_0}{h}\right],$$

$$r_m = \frac{f^{(2m+2)}(\eta_i)h^{2m+2}}{(2m+2)!}\xi^{m+1}(\xi-1)^{m+1}, \eta_i \in (x_i,x_{i+1}).$$

Отметим, что составные многочлены сохраняют гладкость исходной функции до порядка m включительно и в отличие от сплайнов [3] представляются в конечном виде, не требуя решения уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шустов В.В.* О приближении функций двухточечными интерполяционными многочленами Эрмита // ЖВММФ. 2015. Т. 55, № 7, С. 1091.

2. *Шустов В.В.* Аппроксимация функций несимметричными двухточечными многочленами Эрмита и ее оптимизация // ЖВММФ. 2015. Т. 55, № 12, С. 1999.

3. Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972.

Session III

Differential Equations and Mathematical Physics

A. H. Babayan (Yerevan, Armenia)
barmenak@gmail.com

ON A DIRICHLET PROBLEM FOR ONE IMPROPERLY ELLIPTIC EQUATION

Let $D = \{z : |z| < 1\}$ be a unit disk and $\Gamma = \partial D$ its boundary. We consider the improperly elliptic sixth order differential equation

$$\sum_{k=0}^{6} A_k \frac{\partial^6 u}{\partial x^k \partial y^{6-k}}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{1}$$

where A_k are such complex constants ($A_0 \neq 0$), that the numbers λ_j ($j = 1, \ldots, 6$) – the roots of characteristic equation $\sum\limits_{k=0}^{6} A_k \lambda^{6-k} = 0$, satisfy the condition: $\lambda_1 = \ldots = \lambda_4 \neq i$, $\Im\lambda_j > 0$, $j = 1, \ldots, 4$, $\lambda_5 = \lambda_6 \neq -i$, $\Im\lambda_6 < 0$.

The solution of the equation (1) belongs to the class $C^6(D) \bigcap C^{(2,\alpha)}(\overline{D})$, and on the boundary Γ ($z = e^{i\theta}$) satisfy Dirichlet conditions:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^j \partial \bar{z}^{2-j}}\right|_{\Gamma} = F_j(\theta), \;\; u(1,0) = c_0, \; u_x(1,0) = c_1, \; u_y(1,0) = c_2. \tag{2}$$

Here $j = 0, 1, 2$; F_j are given functions, c_j are given constants. Let $B^{(\alpha)}(r)$ be the space of the functions g, analytic in the ring $\{r < |z| < 1\}$ and Holder continuous with second order derivatives up to the boundary; and $\mu = \frac{i-\lambda_1}{i+\lambda_1}$. Then obtained result may be formulated as follows.

Theorem 1. *Let* $z = \frac{(i-\lambda_1)(i+\lambda_6)}{(i+\lambda_1)(i-\lambda_6)}$. *Then, if the boundary functions* F_j *belong to the class* $B^{(\alpha)}(|\mu|)$ *then the problem (1), (2) has a unique solution if and only if the conditions*

$$det\left(\sum_{j=0}^{l-2} (j+1) z^j W_j\right) \neq 0, \quad l = 4, \ldots \tag{3}$$

hold. Here

$$W_j = \begin{pmatrix} l-j-1 & (j+2)(l-j-2) \\ (j+2)(l-j-1) & (j+2)(j+3)(l-j-2) \end{pmatrix}.$$

If the conditions (3) failed, then the homogeneous problem (1), (2) (if $F_j \equiv 0$, $c_j = 0$*) has finite number linearly independent solutions and the same number of linearly independent conditions necessary and sufficient for the solvability of inhomogeneous problem (1), (2). These defect numbers are determined in explicit form.*

V. Barrera-Figueroa (Instituto Politécnico Nacional, México)
vbarreraf@ipn.mx

NUMERICAL METHODS IN THE SPECTRAL THEORY OF QUANTUM GRAPHS

Let us consider periodic metric graphs Γ equipped by Schrödinger operators

$$S_q = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \quad x \in \Gamma \setminus \mathcal{V}$$

with bounded potentials q, and certain conditions at their vertices $\mathcal{V}$.

Graphs are periodic with respect to a group $\mathbb{G}$ isomorphic to $\mathbb{Z}^m$. Schrödinger operators on periodic metric graphs have been widely studied on an analytical basis (see, *e.g.*, [3]) but the investigation at the numerical level is rather restricted.

In this talk we consider the application of the limit operators method [5] and the spectral parameter power series method [4] for the numerical analysis of the spectra of $\mathbb{G}$-periodic quantum graphs. The effectiveness of the joint application of both methods has been shown in the works [1] and [2] for quantum graphs having Kirchhoff-Neumann and Dirac delta vertex conditions, respectively.

REFERENCES

1. *Barrera-Figueroa V., Rabinovich V. S.* Effective numerical method of spectral analysis of quantum graphs. J. Phys. A: Math. Theor. 2017. Vol. 50, No. 21, 215207 (33 pp.).

2. *Barrera-Figueroa V., Rabinovich, V. S, Maldonado Rosas M.* Numerical estimates of the essential spectra of quantum graphs with delta-interactions at vertices.
Appl. Anal. 2017. DOI: 10.1080/00036811.2017.1419201.

3. *Berkolaiko G., Carlson R., Fulling S. A., and Kuchment P. (eds)* Quantum Graphs and Their Applications (Contemporary Mathematics vol 415). American Mathematical Society. 2006.

4. *Kravchenko V. V. Porter M. R.* Spectral parameter power series for Sturm-Liouville problems. Math. Meth. Appl. Sci. 2010. Vol. 33, pp. 459–468.

5. *Rabinovich V. S., Roch S., Silbermann B.* Limit Operators and Their Applications in Operator Theory. Birkhäuser. 2004.

S. A. Buterin (Saratov, Russia)
buterinsa@info.sgu.ru

ON RECOVERING A DISCONTINUOUS INTEGRO-DIFFERENTIAL OPERATOR[1]

Consider the boundary value problem $L = L(q, M, \alpha_0, \alpha_1, \beta)$:

$$-y'' + q(x)y + \int_0^x M(x-t)y(t)\,dt = \lambda y, \quad x \in \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big) \cup \Big(\frac{\pi}{2}, \pi\Big),$$

$$y\Big(\frac{\pi}{2}+0\Big) = \alpha_0 y\Big(\frac{\pi}{2}-0\Big), \quad y'\Big(\frac{\pi}{2}+0\Big) = \alpha_1 y'\Big(\frac{\pi}{2}-0\Big) + \beta y\Big(\frac{\pi}{2}-0\Big),$$

$$y(0) = y(\pi) = 0,$$

[1]This work was supported by RSF (Project no. 17-11-01193).

where $q(x)$ and $(\pi - x)M(x)$ are complex-valued functions in $L_2(0,\pi)$, $\alpha_0, \alpha_1, \beta \in \mathbb{C}$ and $\alpha_0 + \alpha_1 \neq 0$. The following theorem holds.

Theorem 1. *The spectrum $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of the problem L has the form*

$$\lambda_n = \Big(n + \frac{\omega_1 - (-1)^n\omega_2}{\pi n} + \frac{\varkappa_n}{n}\Big)^2, \quad \{\varkappa_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l_2, \tag{1}$$

where

$$\omega_1 = \frac{\beta}{\alpha_0 + \alpha_1} + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(x)\,dx, \tag{2}$$

$$\omega_2 = \frac{\beta}{\alpha_0 + \alpha_1} + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{\alpha_0 + \alpha_1}\Big(\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^\pi q(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} q(x)\,dx\Big). \tag{3}$$

Consider the *inverse problem*: find the function $M(x)$ from the spectrum $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, provided that the potential $q(x)$ along with the numbers $\alpha_0, \alpha_1, \beta$ are known a priori. In the case $\alpha_0 + \alpha_1 \notin (-\infty, 0]$, the uniqueness of its solution is proven and necessary and sufficient conditions for the solvability are obtained, i.e. the following theorem holds.

Theorem 2. *Let an arbitrary function $q(x) \in L_2(0,\pi)$ along with the numbers α_0, α_1, $\beta \in \mathbb{C}$, $\alpha_0 + \alpha_1 \notin (-\infty, 0]$, be given. Then for any sequence of complex numbers $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of the form (1)–(3) there exists a unique (up to values on a set of measure zero) function $M(x)$, such that $(\pi - x)M(x) \in L_2(0,\pi)$ and $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is the spectrum of the corresponding boundary value problem $L(q, M, \alpha_0, \alpha_1, \beta)$.*

The proof is constructive. References to some latest works on inverse spectral problems for integro-differential operators can be found in [1].

REFERENCES

1. *Buterin S. A.* On an inverse spectral problem for first-order integro-differential operators with discontinuities. Appl. Math. Lett. 2018. V. 78. P. 65–71.

M. A. Dorodnyi (St. Petersburg, Russia)
mdorodni@yandex.ru

HOMOGENIZATION OF A NONSTATIONARY MODEL EQUATION OF ELECTRODYNAMICS

In $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, we consider a self-adjoint operator $\mathcal{L}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, generated by the differential expression

$$\operatorname{curl} \eta(\mathbf{x}/\varepsilon)^{-1} \operatorname{curl} - \nabla\nu(\mathbf{x}/\varepsilon) \operatorname{div}.$$

Here the matrix function $\eta(\mathbf{x})$ with real entries and the real function $\nu(\mathbf{x})$ are periodic with respect to some lattice, are positive definite, and are bounded. We study the behavior of the operators $\cos(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2})$ and $\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2})$ for $\tau \in \mathbb{R}$ and small ε. It is shown that these operators converge to $\cos(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})$ and $(\mathcal{L}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})$, respectively, in the norm of the operators acting from the Sobolev space H^s (with a suitable s) to L_2. Here $\mathcal{L}^0$ is an effective operator with constant coefficients. In [1], the following sharp order error estimates were obtained:

$$\|\cos(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\|_{H^2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \le C_1(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{1}$$

$$\|\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{L}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \le C_2(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{2}$$

We confirm that (1), (2) are sharp (with respect to the operator norm) and distinguish conditions on the operator under which the result can be improved:

$$\|\cos(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \le C_3(1+|\tau|)\varepsilon,$$

$$\|\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{L}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \le C_4(1+|\tau|)\varepsilon.$$

The results are used for homogenizing the Cauchy problem for the model hyperbolic equation $\partial_\tau^2\mathbf{v}_\varepsilon = -\mathcal{L}_\varepsilon\mathbf{v}_\varepsilon$, $\operatorname{div}\mathbf{v}_\varepsilon = 0$, appearing in electrodynamics. We study the application to a nonstationary Maxwell system for the case in which the magnetic permeability is equal to $\mathbf{1}$ and the dielectric permittivity is given by the matrix $\eta(\mathbf{x}/\varepsilon)$.

The talk is based on the joint work with Tatiana Suslina.

REFERENCES

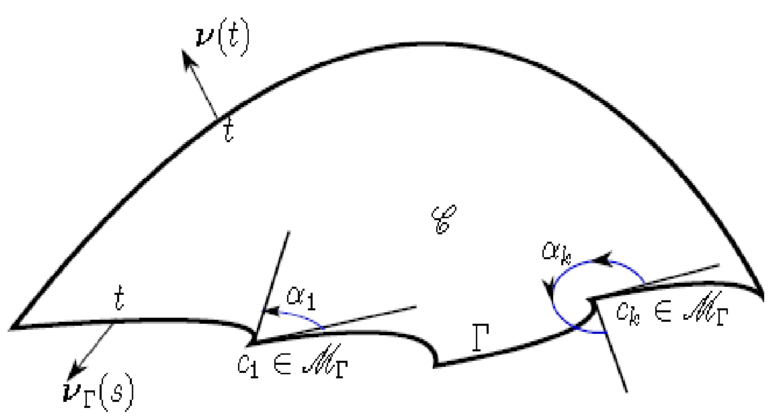
1. *Dorodnyi M. A., Suslina T. A.* Homogenization of a nonstationary model equation of electrodynamics. Mathematical Notes. 2017. Vol. 102, No. 5–6, pp.645–663.

R. Duduchava (The University of Georgia & A.Razmadze Mathematical Institute, Georgia)

r.duduchava@ug.edu.ge

HELMHOLTZ EQUATION IN DOMAINS WITH LIPSCHITZ BOUNDARY

Let $\mathcal{C}$ be a smooth hypersurface in $\mathbb{R}^3$ with the Lipschitz boundary $\Gamma = \partial\mathcal{C}$. We assume a bit more: the boundary Γ is piecewise-smooth, i.e., the tangent vector to Γ has jumps only at the finite number of knots $\mathcal{M}_\Gamma := \{c_1, \ldots, c_n\} \subset \Gamma$. The inner angle α_j between arcs at the knot c_j satisfies the inequality $0 < \alpha_j < 2\pi$. The boundary Γ is decomposed



in two parts $\partial\mathcal{C} = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ and we study the mixed boundary value problems of the following type

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\mathcal{D})u(t) = f(t), & t \in \mathcal{C}, \\ [\mathbf{B}_1(\mathcal{D})u]^+ = g(s), & \text{on} \quad \Gamma_1, \\ [\mathbf{B}_2(\mathcal{D})u]^+ = h(s), & \text{on} \quad \Gamma_2, \end{cases}$$

where $\mathbf{A}(\mathcal{D})$, $\mathbf{B}_1(\mathcal{D})$, $\mathbf{B}_2(\mathcal{D})$ are differential operators of order 2, r_1, r_2, compiled of Günter's tangential derivatives on the surface $\mathcal{D}_j := \partial_j - \nu_j\partial_{\boldsymbol{\nu}}, \quad j = 1, 2, 3$. The problem we consider in the non-classical setting (which includes the classical setting $s = 1$, $p = 2$):

$$u \in \mathbb{H}^s_p(\mathcal{C}),\ f \in \widetilde{\mathbb{H}}^{s-2}_p(\mathcal{C}),\ g \in \mathbb{H}^{s-r_1-1/p}_p(\Gamma_1),\ h \in \mathbb{H}^{s-r_2-1/p}_p(\Gamma_2),$$

$1 < p < \infty,\ s > 0$.

The first step is to write the quasi-local representative of the formulated BVP at each angular point of the surface $\mathcal{C}$ and prove that *the initial mixed boundary value problem in the non-classical setting is Fredholm if and only if all local representatives on the model domains are Fredholm for each angular point of the surface* $\mathcal{C}$.

Some model mixed boundary value problems for the Helmholtz equation in a planar angular domain $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ of magnitude α is investigated in details. The BVP is considered in a non-classical setting when a solution is sought in the Bessel potential spaces $\mathbb{H}^s_p(\Omega_\alpha)$, $s > 1/p$, $1 < p < \infty$. The problems are investigated using the potential method by reducing them to an equivalent boundary integral equation (BIE) in the Sobolev-Slobodečkii space on a semi-infinite axes $\mathbb{W}^{s-1/p}_p(\mathbb{R}^+)$, which is of Mellin convolution type. By applying the recent results on Mellin convolution equations in the Bessel potential spaces obtained by V. Didenko & R. Duduchava in [1], explicit conditions of the unique solvability of this BIE in the Sobolev-Slobodečkii $\mathbb{W}^r_p(\mathbb{R}^+)$ and Bessel potential $\mathbb{H}^r_p(\mathbb{R}^+)$ spaces for arbitrary r are found and used to write explicit conditions for the Fredholm property and unique solvability of the initial model BVPs for the Helmholtz equation in the above mentioned non-classical setting.

REFERENCES

1. *Didenko V. , Duduchava R.* Mellin convolution operators in the Bessel potential spaces. *Journal of Analysis and Applications* **443** (2016) 707-731.

A. El-shenawy (Kazan, Russia), P. N. Ivanshin (Kazan, Russia)
Atallahtm@yahoo.com, pivanshi@yandex.ru

LINEAR SPLINE INTERPOLATION SOLUTION FOR 3D DIRICHLET PROBLEM IN A SIMPLY CONNECTED SOLID WITH SMOOTH BOUNDARY

The linear spline interpolation solution of 3D Dirichlet problem for Laplace equation is based on the division of the solid into N layers. The method reduces the 3D problem to a solution of a 2D Dirichlet problem at each layer. The final solution is continuous in the whole domain up to the boundary.

Let M be a bounded three-dimensional simply connected solid, ∂M be the boundary smooth surface of M. Then the corresponding Dirichlet problem for the Laplace equation is as follows: find the doubly differentiable in M function $u(x, y, h)$, which is continuous in $M \cup \partial M$ and satisfies the three dimensional Laplace equation

$$\nabla^2 u(x, y, h) = 0, \qquad (x, y, h) \in M, \tag{1}$$

according to the Dirichlet boundary conditions $u|_{\partial M} = f(x, y, h)$.
Assume that the solid is divided into N layers. The spline solution at each layer is a polynomial function in h as follows [1]:

$$u(x, y, h) = \sum_{k=0}^{p} u_k(x, y) h^k.$$

By taking $p = 1$ we get the linear spline $u(x, y, h) = u_0(x, y) + hu_1(x, y)$. If we put this solution into equation (1), we get $\Delta_2 u_k(x, y) = 0$, $k = 0, 1$, where $\Delta_2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$.

The coefficients $u_k(x, y), k = 0, 1$ are 2D harmonic functions of x and y. These harmonic functions are restored via their boundary values using the Cauchy integral method which was discussed in details in our previous work [2]. The spline interpolation method with the Cauchy integral scheme, applied to several examples, gave highly accurate results for 3D simply connected solids.

REFERENCES

1. *Ivanshin P. N., Shirokova E. A.* Spline-interpolation solution of 3d dirichlet problem for a certain class of solids. IMA Journal of Applied Mathematics. 2013. Vol. 78, pp. 1109-1129.

2. *Elshenawy A., Shirokova E. A.* Dirichlet problem solution for simply and doubly connected domains with smooth boundaries. Тр. Матем. центра им. Лобачевского Казань. 2017. Vol. 54, pp. 12-15.

A. V. Faminskii (Moscow, Russia)
afaminskii@sci.pfu.edu.ru

ON CONTROLLABILITY OF KORTEWEG–DE VRIES EQUATION

In a rectangle $Q = (0, T) \times (0, R)$ consider an initial-boundary value problem for Korteweg–de Vries equation

$$u_t + bu_x + u_{xxx} + uu_x = f(t, x) \tag{1}$$

with initial and boundary conditions

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad u\big|_{x=0} = \mu(t), \quad u\big|_{x=R} = \nu(t), \quad u_x\big|_{x=R} = h(t). \tag{2}$$

Solutions are understood in a weak sense and are considered in a space

$$X(Q) = C([0,T]; L_2(0,R)) \cap L_2(0,T; H^1(0,R)).$$

Then it is known that under appropriate assumptions on input data the problem is well-posed.

Introduce an additional condition of integral overdetermination

$$\int_0^R u(t,x)\omega(x)\,dx = \varphi(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

where the functions ω and φ are given. In this connection certain input function is considered as a control, is not given and must be found to fulfill this condition. Such a problem is regarded as a controllability problem. For example, consider the function h as the control. Then it is shown that the corresponding controllability problem is uniquely solvable in the cases of small input data or small time interval.

Theorem. *Let $u_0 \in L_2(0,R)$, $f \in L_2(Q)$, $\mu, \nu \in H^{1/3}(0,T)$, $\varphi \in H^1(0,T)$, $\omega \in H^3(0,R)$, $\omega(0) = \omega'(0) = \omega(R) = 0$, $\omega'(R) \neq 0$,*

$$\varphi(0) = \int_0^R u_0(x)\omega(x)\,dx.$$

Let

$$r = \|u_0\|_{L_2(0,R)} + \|\mu\|_{H^{1/3}(0,T)} + \|\nu\|_{H^{1/3}(0,T)} + \|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi'\|_{L_2(0,T)}.$$

Then there exists $r_0 > 0$, such that if $r \le r_0$ there exists a unique pair $\{h \in L_2(0,T), u \in X(Q)\}$, satisfying (1)–(3). Moreover, for an arbitrary value of r there exists $T_0 > 0$ such that if $T \le T_0$ the same result holds.

T. N. Harutyunyan (Yerevan, Armenia)
hartigr@yahoo.co.uk

ON A NEW APPROACH IN THE SPECTRAL THEORY OF THE FAMILY OF STURM-LIOUVILLE OPERATORS

We study the direct and inverse problems for the family of Sturm-Liouville operators, generated by a fixed potential q and the family of separated boundary conditions. We prove that the union of the spectra of all these operators can be represented as a smooth surface (as real analytic function of two variables), which has specific properties. From these properties we select those, which are sufficient for a function of two variables to be the union of the spectra of a family of Sturm-Liouville operators.

Katica R. (Stevanovic) Hedrih (Department of Mechanics, Mathematical Institute of Serbian Academy of Science and Arts, Belgrade, Serbia; Faculty of Mechanical Engineering, University of Nis, Nis, Serbia)
katicah@mi.sanu.ac.rs; khedrih@eunet.rs; khedrih@sbb.rs

ANALYTICAL DYNAMICS OF FRACTIONAL TYPE DISCRETE SYSTEM

First, a fractional order type, standard light visco-elastic element is described by constitutive relation containing a fractional order differential operator. For like that element a generalized function of fractional order dissipation of mechanical energy is defined. A number of fractional order type, standard light visco-elastic elements are used for coupling between a number of mass particles for modeling a fractional order discrete system with finite number of degrees of freedom of motion. Second, a model of fractional order oscillator with one degree of freedom is presented and analyzed kinetic parameters in free and forced regimes. Third, for a class of the discrete system dynamic with finite number of degrees of freedom, and fractional order dissipation of energy of the system in matrix form are presented. For like that system independent eigen main coordinates, and as well as corresponding independent eigen main modes in free and also in forced oscillatory regimes, are defined. Fourth, starting from matrix fractional order differential equation of defined class of the system dynamic with finite number of degrees of freedom, and fractional order energy dissipation, relation between total mechanical energy (sum of kinetic and potential energies) and generalized function of fractional order energy dissipation is derived. Also, using formulas of transformation of a system of independent generalized coordinates and eigen main coordinates of considered class of fractional order system dynamics relation between total mechanical energy (sum of kinetic and potential energies) and generalized function of fractional order energy dissipation on one eigen main fractional order mode is derived. On the basis of these relations, two theorems of energy fractional order dissipation of this class of the fractional order system with finite number of degrees of system are defined and proofed. Nect, a constitutive relation and generalized function of fractional order dissipation of energy of a standard fractional order electrical element are presented with corresponding analysis

Key words: Generalized function of fractional order dissipation of energy, theorem of mechanical energy change, analogies, eigen main fractional order mode energy dissipation.

REFERENCES

1. *Hedrih (Stevanovic) K.*The fractional order hybrid system vibrations, Monograph, Chap in Monograph. Advances in Nonlinear Sciences, ANN, 2008, Vol. 2, pp. 226-326.

2. *Hedrih (Stevanovic) K.* Analytical mechanics of fractional order discrete system vibrations. Chap in Monograph. Advances in nonlinear sciences, Voл. 3, JANN, Belgrade, pp. 101-148, 2011. ISSN: 978-86-905633-3-3.

3. *Hedrih (Stevanovic) K., Filipovski A.* Longitudinal Creep Vibrations of a Fractional Derivative Order Rheological Rod with Variable Cross Section, Facta Universitatis, Series Mechanics, Automatics Control and Robotics, Vo. 3, No. 12, 2002, pp. 327-350. YU ISSN 0354-2009.

4. *Hedrih (Stevanovic) K., Tenreiro Machado J.* Discrete fractional order system vibrations, International Journal Non-Linear Mechanics (January 6, 2014), Volume 73, July 2015, Pages 2–11, DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.009 ; ISSN 0020-7462. http://authors.elsevier.com/authorforms/NLM2407/7c32b6b4f19f2471fb24556142da3cd1

G. A. Karapetyan (Yerevan, Armenia)
garnik_karapetyan@yahoo.com

BOUNDARY EMBEDDING THEOREMS FOR MULTIANISOTROPIC SPACES

Introduction. In the proof of all embedding theorems (in particular, see [1]), two cases are distinguished. The first case, when the embedding index is less than one; the second case when the exponent is one, that is the boundary case holds. In previous papers, when embedding theorem proving for functions from multianisotropic spaces (see [2] - [3]), we studied the case when the embedding index is less than unity. In this paper we prove embedding theorems for multianisotropic function spaces in the boundary case.

For any parameter $\nu > 0$ and a natural number k denote

$$P(\nu,\xi) = \left(\nu\xi^{\alpha^1}\right)^{2k} + \cdots + \left(\nu\xi^{\alpha^n}\right)^{2k} + \left(\nu\xi^{\alpha^{n+1}}\right)^{2k}.$$

$$G_0(\nu;\xi) = e^{-P(\nu,\xi)}.$$

$$G_{1,j}(\nu,\xi) = 2k\left(\nu\xi^{\alpha^j}\right)^{2k-1} e^{-P(\nu,\xi)}, (j = 1,\ldots,n+1).$$

For any function f consider the regularization with the kernel $\hat{G}_0(t,\nu)$:

$$f_\nu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{R^n} f(t)\hat{G}_0(t-x,\nu)dt.$$

The following integral representation holds:

Theorem 1. *Let the function f have the Sobolev weak derivatives $D^{\alpha^i}f$, $(i = 1,\ldots,n+1)$, where α^i are the vertices of the completely regular polyhedron $\mathfrak{N}$ and $D^{\alpha^i}f\in L_p(R^n)$, $1 \le p < \infty$, $(i = 1,\ldots,n+1)$. Then for almost all $x\in R^n$ it has the representation*

$$f(x) = f_h(x) + \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\varepsilon}^{h} d\nu \int\limits_{R^n} D^{\alpha^i}f(t)\hat{G}_{1,i}(t-x,\nu)dt.$$

Let $\mathfrak{N}$ be a completely regular polyhedron, then
$W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n) = \{f : f\in L_p(\mathbb{R}^n), D^{\alpha^i}f\in L_p(\mathbb{R}^n), i = 1,\ldots,M\}$.

The main result of this paper is the following boundary embedding theorem for functions from a multianisotropic space $W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$ $(p > 1)$:

Theorem 2. *Let the numbers p and q satisfy the relations $1 < p \le q < \infty$ and a multi-index $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ such that*

$$\chi = \max_{i=1,\ldots,I_{n-1}} \left(\left(\beta, \mu^i\right) + \left|\mu^i\right| \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \right) = 1.$$

Then $D^\beta W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_q(\mathbb{R}^n)$, i.e. any function $f \in W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$ has weak derivatives $D^\beta f$, belonging to the class $L_q(\mathbb{R}^n)$, and for some constants $C_1, C_2 > 0$ inequality holds

$$\left\| D^\beta f \right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \le C_1 \sum_{i=1}^{M} \left\| D^{\alpha^i} f \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

R E F E R E N C E S

1. *Besov O. V., Il'in V. P., Nikloskii S. M.* Integral representations of functions and embedding theorems // Nauka, Moscow, 1975 (in Russian), p. 480.

2. *Karapetyan G. A.* Integral representation of functions and embedding theorems for multianisotropic spaces on a plane // Journal of Contemporary Mathematical Analysis, 2016 (in press).

3. *Karapetyan G. A., Arakelian M. K.* Embedding theorems for general multianisotropic spaces // Mathematical notes (in press).

S. A. Khoury (Sharjah, UAE)
skhoury@aus.edu

BIORTHOGONALITY CONDITIONS FOR A CLASS OF BVPS AND ITS APPLICATIONS TO FLOW PROBLEMS

We derive a biorthogonality property that is satisfied by the eigenfunctions and adjoint eigenfunctions of the fourth-order BVP

$$\left(P_0(r) y''(r)\right)'' + \left(P_1(r;\alpha) y'(r)\right)' + P_2(r;\alpha) y(r) = 0, \tag{1}$$

where $r \in [r_1, r_2]$ and the boundary conditions are given by

$$y(r_1) = y(r_2) = y'(r_1) = y'(r_2) = 0. \tag{2}$$

Theorem 1. (Biorthogonality Condition) Consider the BVP (1)-(2), where $P_0(r)$, $P_1''(r;\alpha)$, $P_2(r;\alpha)$ are continuous and $P_0(r) \ne 0$ on $r_1 \le r \le r_2$. P_i in (1) is a polynomial of degree at most i in the parameter α, in particular, let $P_1(r;\alpha) = p_{11}(r)\alpha + p_{12}(r)$, and we require

$$P_1^2(r;\alpha) - 4P_0(r)P_2(r;\alpha) = p_{31}(r)\alpha + p_{32}(r); \qquad p_{11}^2(r) + p_{31}^2(r) \not\equiv 0.$$

Then, we have the following biorthogonality condition:

$$\int_{r_1}^{r_2} \left[\phi_2^{(m)}(r), \phi_1^{(m)}(r)\right] B(r) \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)}(r) \\ \\ \phi_2^{(n)}(r) \end{bmatrix} dr = P_n^* \delta_{mn},$$

where δ_{mn} is the Kronecker's delta,

$$B(r) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\frac{p_{11}(r)}{P_0(r)} & 0 \\ \\ \frac{1}{2}p_{11}^{''}(r) + \frac{1}{4}\frac{p_{31}(r)}{P_0(r)} & -\frac{1}{2}\frac{p_{11}(r)}{P_0(r)} \end{pmatrix},$$

with

$$\phi_1^{(n)}(r) = y_n(r); \qquad \phi_2^{(n)}(r) = P_0(r)y_n^{''}(r) + \frac{1}{2}P_1(r;\alpha_n)y_n(r).$$

Here y_i is an eigenfunction of equation (1) corresponding to the eigenvalue α_i. Assume the eigenvalues α_i are simple.

This biorthogonality condition will be manipulated for the solution of the biharmonic equation that models creeping viscous incompressible flow problems.

A. A. Kovalevsky (Yekaterinburg, Russia)
alexkvl71@mail.ru

VARIATIONAL PROBLEMS WITH IMPLICIT CONSTRAINTS IN VARIABLE DOMAINS

We give some results on the convergence of minimizers and minimum values of integral and more general functionals $J_s : W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ on the sets $U_s(h_s) = \{v \in W^{1,p}(\Omega_s) : h_s(v) \leqslant 0$ a.e. in $\Omega_s\}$, where $p > 1$, $\{\Omega_s\}$ is a sequence of domains contained in a bounded domain Ω of $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$), and $\{h_s\}$ is a sequence of functions on $\mathbb{R}$. We assume that the functionals J_s have the following structure: $J_s = F_s + G_s$, where $\{F_s\}$ is a sequence of integral functionals whose integrands satisfy certain convexity, growth, and coercivity conditions and $\{G_s\}$ is a sequence of weakly continuous functionals.

To justify our convergence results, we require the compactness of the embedding of $W^{1,p}(\Omega)$ into $L^p(\Omega)$, the strong connectedness of the sequence of spaces $W^{1,p}(\Omega_s)$ with the space $W^{1,p}(\Omega)$, the Γ-convergence of the sequence $\{F_s\}$ to a functional $F : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, and a certain convergence of the sequence $\{G_s\}$ to a functional $G : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$. Moreover, we assume certain conditions on the relation of functions h_s to a function $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Actually, these conditions relate the sets $\Phi(h_s) = \{t \in \mathbb{R} : h_s(t) \leqslant 0\}$ to the set $\Phi(h) = \{t \in \mathbb{R} : h(t) \leqslant 0\}$. The convexity of these sets is not required.

Under the mentioned conditions, we establish that the minimizers and minimum values of the functionals J_s on the sets $U_s(h_s)$ converge to a minimizer and the minimum value of the functional $F+G$ on the set $U(h)=\{v\in W^{1,p}(\Omega): h(v)\leqslant 0 \text{ a.e. in } \Omega\}$.

A more detailed description of the results is given in [1]. Concerning the notions of strong connectedness of the spaces $W^{1,p}(\Omega_s)$ and Γ-conver-gence of functionals defined on these spaces, see, for instance, [2].

REFERENCES

1. *Kovalevsky A. A.* On the convergence of solutions of variational problems with implicit pointwise constraints in variable domains. Funct. Anal. Appl. (accepted).
2. *Kovalevsky A. A.* On the convergence of solutions to bilateral problems with the zero lower constraint and an arbitrary upper constraint in variable domains. Nonlinear Anal. 2016. Vol. 147, pp. 63–79.

Vladislav V. Kravchenko (Queretaro, Mexico)
vkravchenko@math.cinvestav.edu.mx

ON A METHOD FOR SOLVING INVERSE STURM-LIOUVILLE AND SCATTERING PROBLEMS

A new method for solving the classical inverse Sturm-Liouville problem on a finite interval and the inverse scattering problem on the line is proposed. It is based on the Gel'fand-Levitan-Marchenko integral equations and recent results on the functional series representations for the transmutation operator kernels [1,2]. Solution of the inverse problem reduces directly to a system of linear algebraic equations.

REFERENCES

1. *V. V. Kravchenko, L. J. Navarro and S. M. Torba,* Representation of solutions to the one-dimensional Schrödinger equation in terms of Neumann series of Bessel functions. Applied Mathematics and Computation, v. 314 (2017) 173-192.
2. *V. V. Kravchenko,* Construction of a transmutation for the one-dimensional Schrödinger operator and a representation for solutions. Applied Mathematics and Computation, v. 328 (2018) 75-81.

M. V. Kukushkin (Geleznovodsk, Russia)
kukushkinmv@rambler.ru

ASYMPTOTIC OF EIGENVALUES FOR THE DIFFERENTIAL OPERATORS OF FRACTIONAL ORDER

In this paper we will deal with operators of fractional differentiation such as Marchaud, Riemann-Liouville, Caputo, Weil. To investigate these operators in the case of compact domain, we will use some technique applied to the Kipriyanov operator [1], which can be reduced to the previous operators. The cases corresponding to the operators Riemann-Liouville and Weil on the axis considered separately. As a main results the asymptotic formula for the eigenvalues of operator second order with fractional derivative in lower terms was obtained and the completeness property of root vectors of its resolvent was established. Finally we conduct a classification of considering operators by belonging resolvent to the Shetten class [2]. Consider an uniformly elliptic operator with real-valued, sufficient smooth coefficients and fractional derivative in the sense of Kipriyanov in the lower terms (see [1])

$$Lu := -D_j(a^{ij}D_i u) + \rho\,\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+}u, \ \ i,j = 1,2,...,n;$$
$$\mathrm{D}(L) = H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega),\ \Omega\subset\mathbb{E}^n,$$

where Ω is convex domain with sufficient smooth boundary. The following theorem establishes the completeness property of root vectors of resolvent $R_{\tilde{L}}$. Moreover, remarkable that the obtained sufficient conditions give us the opportunity to approve that in the dimensions: 1,2 the set of root vectors is complete in the absence of any additional assumptions relatively the coefficients of operator.

Theorem 1. *The condition $\theta < \pi/n$ is sufficient for completeness root vectors of operator $R_{\tilde{L}}$, where θ is half angle of sector containing the numerical range of value of operator $R_{\tilde{L}}$.*

Theorem 2. *The condition $p > n$ is a sufficient for inclusion*

$$R_{\tilde{L}} \in \mathfrak{S}_p, 1 \le p < \infty.$$

REFERENCES

1. *Kukushkin M. V.* Spectral properties of fractional differentiation operators. Electronic Journal of Differential Equations. 2018. Vol. 2018, No. 29, pp. 1–24.
2.*Aleroev T. S.* Spectral analysis of one class of non-selfadjoint operators. Differential Equations. 2018. Vol. 20, No. 1, pp. 171–172.

L. N. Lyakhov (Voronezh, Russia), S. A. Roshchupkin (Yelets, Russia), K. C. Yeletskikh (Yelets, Russia)
levnlya@mail.ru, roshupkinsa@mail.ru, kostan.yeletsky@gmail.com

APPLICATION OF THE BESSEL-KIPRIANOV-KATRAKHOV INTEGRAL TRANSFORM FOR THE RESEARCH OF D_B -HYPERBOLIC EQUATIONS

We consider the model equation

$$B_{\beta,t}E(x,t) - L(D_B)E(x,t) = \delta_\beta(t)\,\delta_\gamma(x),$$

in which the following notations are adopted:

$x\in\mathbb{R}_n,\ t\in\mathbb{R}^+_1 = \{t:\ t>0\}$, $\delta_\beta(t)$ and $\delta_\gamma(x)$ — weighted δ -functions.

$L(D_B)=\sum\limits_{\alpha\le 2m} a_\alpha\, D^\alpha_B$, where $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $D^\alpha_B=\partial^{\alpha_1}_{B_{\gamma_1}},\ldots,\partial^{\alpha_n}_{B_{\gamma_n}}$,

$$\partial_{x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i},\quad \partial^{\alpha_i}_{B_{\gamma_i}} = \begin{cases} B^{\alpha_i/2}_{\gamma_i}, & \alpha_i = 2k,\\ \partial_{x_i}B^{(\alpha_i)/2}_{\gamma_i}, & \alpha_i = 2k+1.\end{cases}$$

$B_{\gamma_i}{=}\partial^2_{x_i^2}{+}\frac{\gamma_i}{x_i}\,\partial x_i \;=\; x_i^{-\gamma_i}\partial_{x_i}\,x_i^{\gamma_i}\,\partial_{x_i}$ — the Bessel operators, which are applied to variables $t \in \mathbb{R}_1^+, x \in \mathbb{R}_n$. The operator $L(D_B)$ is assumed to be B-elliptic. The kernel of the Bessel-Kipriyanov-Katrakhov transform ($\mathcal{F}_B$-transform) [1] has the form

$\Lambda^{\pm}_{\gamma}(x', \xi') = \prod_{j=1}^{n}\left[j_{\frac{\gamma_j-1}{2}}(x_j\xi_j) \mp i\,\frac{x_j\xi_j}{\gamma+1}\,j_{\frac{\gamma_j+1}{2}}(x_j\xi_j)\right].$

A mixed direct and inverse complete Bessel-Kipriyanov-Katrakhov transform ($\mathcal{F}_B$-*transform*) [1] of the function u is called

$\mathcal{F}_B[u](\xi){=}\int\limits_{R_N}\Lambda^{+}_{\gamma}(x', \xi')\,e^{-i(x'',\xi'')}u(x)\,(x')^{\gamma}\,dx, \mathcal{F}_B^{-1}[u](x){=}C\mathcal{F}_B[u](-x).$

The fundamental solution of the singular differential operator $\square_{\beta,\gamma}$ is the function $E(x,t) = \mathcal{F}_B^{-1}[\mathbb{N}_{\gamma-\frac{1}{2}}](x,t)$, where $\mathbb{N}_\nu(t) = \frac{\cos(\nu\pi)\ j_\nu(t)-\widetilde{\mathbb{J}_\nu}(t)}{\sin\nu\pi}$, $\nu = \left(\gamma_{1-\frac{1}{2}}, \dots \gamma_{n-\frac{1}{2}}\right)$. j_ν — Bessel-Clifford function, $\widetilde{\mathbb{J}_\nu}(t)$ — Bessel-Clifford function of negative order. The inverse transform of the radial Bessel function was considered in [2]

R E F E R E N C E S

1. *Катрахов В. В., Ляхов Л. Н.* Полное преобразование Фурье-Бесселя и алгебра сингулярных псевдодифференциальных операторов. Дифференц. уравнен. 2014. Том. 57, №. 8, стр. 31–97.

2. *Lyakhov L. N., Yeletskikh K. S.* The Mixed Fourier–Bessel Transform of a Radial Bessel j-Function, Jor. Of Math. Sciences. 2017 **226**, P. 388-401.

Helmuth R. Malonek (Aveiro, Portugal)
hrmalon@ua.pt

HARMONIC ANALYSIS AND COMBINATORICS - A HYPERCOMPLEX FUNCTION THEORETIC APPROACH

Hypercomplex Function Theory (HFT) started in the beginning of the 1930s, mainly initiated by R. Fueter, as generalization of the classical *Function Theory of one Complex Variable* (FTCV) to the case of one quaternionic variable. However, research in multivariate analysis by using general Clifford algebras (CA) (suggesting the name *Clifford Analysis* in analogy to *Complex Analysis*) only started to grow significantly in the 1970s. Since then it has been treated by many authors almost exclusively as some type of refinement of *Harmonic Analysis* exploiting its deep relation to *Representation Theory*.

In the talk we use our alternative and less standard approach to HFT as a function theory in co-dimension 1. Considering hypercomplex holomorphic functions as functions of several hypercomplex variables we stress the function theoretic origins of Clifford Analysis and at the same time a dual relation to functions of several complex variables. Besides other advantages, this approach allows to represent homogeneous polynomials by symmetric ones in several hypercomplex variables. This is obtained by embedding the binary non-commutative CA-multiplication into a $k - nary$ symmetric operation. Thereby it is possible to exploit a generalized polynomial formula and resolve an old open problem in HFT, namely the construction of hypercomplex Appell polynomial sequences as adequate generalization of the ordinary complex power functions. Moreover, it was recently noticed that positivity of trigonometric sums (cf.[3]), subordination of analytic functions (cf.[2]), and the construction of hypercomplex Appell polynomials are subjects connected by one and the same sequence of rational numbers (cf.[1]). The talk shows that a non-standard application of CA-tools is able to reveal new insights into objects of combinatorial nature obtained by methods of HFT.

REFERENCES

1.*Cação, I., Falcão, M. I., and Malonek,H. R.* Hypercomplex polynomials, Vietoris' Rational Numbers and a Related Integer Numbers Sequence. Complex Analysis and Operator Theory, 2017. Vol. 11, pp. 1059–1076.

2.*Ruscheweyh,St., Salinas,L.* Stable functions and Vietoris' theorem. J. Math. Anal. Appl., 2004. Vol. 291, pp. 596–604.

3.*Vietoris, L.* Über das Vorzeichen gewisser trigonometrischer Summen. Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. 1958. Vol. 167, pp. 125-135.

A. B. Morgulis (Vladikavkaz – Rostov-na-Donu, Russia)
morgulisandrey@gmail.com

HOMOGENIZATION OF PDES AND DESORIENTATION OF SPECIES DUE TO INHOMOGENEITY OF THE ENVIRONMENT

We study a system of PDE's which is written as follows

$$p_t + (pv)_x = \delta_1 \Delta p;\ q_t = q(1 - q - p) + \delta_2 \Delta q;\ u_t = \kappa q_x + f_x - \nu u + \delta_3 \Delta u, \qquad (1)$$

where $(x, t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Eqs. (1) describes a living community consisting of active predator and non-active prey; p, u stands for the predator density and velocity, q stands for the prey density, and f stands for the additional variable, say, describing the state of the environment (like the salinity, temperature e.t.c). Herewith f and q are considered as the stimuli which the active species pursues (or avoids) and therefore it spreads itself not only via diffusion but via macroscopic directional moving as well. The latter is described by the eulerian velocity for which third equation in (1) is written. Note that a weighted sum of the stimuli gradients is considered as a driver for the local accelerations of the active species. Such way of the describing of active migrations has been proposed in articles [1-2] which also deliver a detailed study of the case of $f \equiv \text{const}$. It turns out that the increase of the total number of predators makes the uniform distribution of the species unstable, and this instability is accompanied with excitation of nonlinear wave due to which the community survives. Moreover, both the total number of preys and the consumption of them by predators on average are greater than in the uniform case.

In the proposed talk, we make focus upon the case of $f = f(\alpha x, \omega t)$, $\alpha, \omega >> 1$. We derive the short wavelength-high frequency limit with the use of a technique of homogenization. It turns out that the increasing of the amplitude of the environment fluctuations induces exponential damping of the effective velocity of the predators. This, in turn, crucially stabilizes the uniform distribution. Such effect can be treated as a kind of desorientation of active species due to the fluctuating environment.

REFERENCES

1.*Govorukhin V. N., Morgulis A. B., Tyutyunov Yu. V.* Slow Taxis in a Predator–Prey Model. Doklady Mathematics. 2000. V. 61, no. 3, pp. 420–422 (translated from Doklady Akademii Nauk. 2000. Vol. 372, No. 6, pp. 730–732.)

2.*Arditi R., Tyutyunov Yu., Morgulis A., Govorukhin V., Senina I.* Directed movement of predators and the emergence of density-dependence in predator-prey models. Theoretical Population Biology. 2001. V. 59(3), pp. 207-221.

E. Yu. Panov (Veliky Novgorod, Russia)
Eugeny.Panov@novsu.ru

ON DECAY OF PERIODIC ENTROPY SOLUTIONS TO A DEGENERATE NONLINEAR PARABOLIC EQUATION

In the half-plane $\Pi=\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ we consider a nonlinear second order parabolic equation

$$u_t+\varphi(u)_x=g(u)_{xx}, \quad u=u(t,x),\ (t,x)\in\Pi, \tag{1}$$

where the functions $\varphi(u),g(u)\in C(\mathbb{R})$, and $g(u)$ is non-strictly increasing. We study the long time behavior of x-periodic entropy solutions of (1) (in the sense of Kruzhkov-Carrillo) $u(t,x)\in L^\infty(\Pi)$, $u(t,x+1)=u(t,x)$. Let $\mathbb{T}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ be a circle, $I=\int_{\mathbb{T}}u(t,x)dx=\int_0^1 u(t,x)dx$ (this value does not depend on t). The main our result is the following property of asymptotic convergence to a traveling wave.

Theorem 1. *There is a periodic function $v(y)\in L^\infty(\mathbb{T})$ (a profile), an a constant $c\in\mathbb{R}$ (a speed) such that*

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to+\infty}(u(t,x)-v(x-ct))=0 \quad \text{in } L^1(\mathbb{T}).$$

Moreover, $\int_{\mathbb{T}}v(y)dy=I$ *and the functions $\varphi(u)-cu$, $g(u)$ are constant on the segment* $[\operatorname{ess\,inf} v(y),\operatorname{ess\,sup} v(y)]$.

Corollary. *If for every $c\in\mathbb{R}$ the functions $\varphi(u)-cu,g(u)$ are not constant simultaneously in any vicinity of I, then*

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to+\infty}u(t,x)=I \quad \text{in } L^1(\mathbb{T})$$

(decay property).

For the proof of Theorem 1 we use a variant of compensated compactness developed in [1] and comparison principles. In the case of conservation laws $g(u)=0$ Theorem 1 was established in [2].

The research was carried out under support of the Russian Foundation for Basic Research (grant no. 18-01-00258-a) and the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 1.445.2016/1.4).

REFERENCES

1. *Panov E. Yu.* Ultra-parabolic H-measures and compensated compactness. Ann. I. H. Poincare – AN. 2011. Vol. 28, pp. 47–62.

2. *Panov E. Yu.* Long time asymptotics of periodic generalized entropy solutions of scalar conservation laws. Mathematical Notes. 2016. Vol. 100, No. 1, pp. 113–122.

D. K. Plotnikov (Rostov-on-Don, Russia)
dplotnikov@sfedu.ru

ON THE INTEGRAL EQUATION IN THE CONTACT PROBLEM FOR AN INHOMOGENEOUS STRIP

Nowadays, indentation methods are one of the most frequently used methods for determining the near-surface properties of functional gradient structures, various components of coals, biological tissues.

This study presents an approximate model of the deformation of an inhomogeneous elastic strip rigidly coupled to an undeformable base. The contact problem of the equilibrium of a strip under the action of a parabolic indentor is considered. It is believed that the stamp is pressed into the upper boundary of the strip without friction. An auxiliary problem on the loading of a strip by a normal load localized on a certain segment of the upper face of the strip is solved. The expression for the potential energy is simplified by introducing hypotheses about the nature of the displacement fields. On the basis of the Lagrange variational principle, a system of two second-order differential equations with variable coefficients is constructed for the components of the displacement vector of the upper bound of the strip. Using the Fourier transform, the transfer functions connecting the Fourier transforms of displacements and loads are constructed. Transfer functions are fractional-rational functions of the transformation parameter. The integral equation of the contact problem for the strip is constructed. The properties of the kernel of the integral equation are investigated. The solution of the integral equation is reduced to the investigation of the fourth-order operator equation. The solution of the contact problem is obtained, the displacement of the free surface of the strip is found, the contact stress distribution is constructed, the force-introduction correlation is determined. The influence of the heterogeneity of the elastic moduli along a thickness coordinate on these relations is analyzed.

This approach allows to construct approximate solutions and basic dependencies for arbitrary laws of strip inhomogeneity.

V. Rabinovich (Instituto Politécnico Nacional, ESIME Zacatenco, México)
vladimir.rabinovich@gmail.com

ESSENTIAL SPECTRA OF QUANTUM GRAPHS WITH GENERAL VERTEX CONDITIONS

Let Γ be a graph periodic with respect to a group $\mathbb{G}$ isomorphic to $\mathbb{Z}^n$. We give a description of the essential spectra of unbounded operators $\mathcal{H}_q$ in $L^2(\Gamma)$ generated by Schrödinger operators $-\frac{d^2}{dx^2}+q, q\in L^\infty(\Gamma)$ on the edges of Γ and general vertex conditions. We introduce a set of limit operators of $\mathcal{H}_q$ such that the essential spectrum of $\mathcal{H}_q$ is the union of spectra of the limit operators. We give an application of this result to the description of essential spectra of operators $\mathcal{H}_q$ with periodic potentials q perturbed by slowly oscillating at infinity terms.

As example we consider the essential spectra of periodic quantum graphs with delta-interactions at the vertices.

REFERENCES

1. *Rabinovich V.* On the essential spectrum of Quantum Graphs, Integr. Equ. Oper. Theory 88 (2017), 339–362.

2. *Barrera-Figueroa V., Rabinovich V. S.* Effective numerical method of spectral analysis of quantum graphs, Rabinovich, J. Phys. A: Math. Theor. 50 (2017) 215207 (33pp).

3. *Barrera-Figueroa V., Rabinovich V. S.* Numerical estimates of the essential spectra of quantum graphs with delta-interactions at vertices, To appear in Applicable Analysis, 2018.

M. Reissig (Freiberg, Germany)
reissig@math.tu-freiberg.de

FUJITA VERSUS STRAUSS - A NEVER ENDING STORY

A lot of papers are devoted to the critical exponent $p_{crit}(n)$ in Cauchy problems for the semilinear wave model with power-nonlinearity. The model we have in mind is $((t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$

$$u_{tt}-\Delta u+bu_t+m^2u=|u|^p,\ \ u(0,x)=\varphi(x),\ \ u_t(0,x)=\psi(x).$$

Here b and m^2 are nonnegative constants. Critical exponent means, that for some range of $p\geq p_{crit}(n)$ we have the global (in time) existence of small data Sobolev solutions. On the contrary, for $1<p\leq p_{crit}(n)$ we have blow-up for Sobolev solutions under special assumptions for the data.
If $b=m^2=0$, then $p_{crit}(n)=p_0(n)$ is the well-known *Strauss exponent*. If $b=1$ and $m^2=0$, then $p_{crit}(n)=p_{Fuj}(n)$ is the well-known *Fujita exponent*. In the talk we discuss a special semilinear wave model with scale-invariant time-dependent mass and dissipation and power-nonlinearity. We show how a competition between the Fujita exponent and Strauss exponent comes into play. For a family of models we propose a new critical exponent.

REFERENCES

1. *Nunes W., Palmieri A., Reissig M.* Semi-linear wave models with power non-linearity and scale-invariant time-dependent mass and dissipation. Mathematische Nachrichten. 2017. Vol. 290, pp. 1779–1805.

2. *Palmieri A., Reissig M.* Semi-linear wave models with power non-linearity and scale-invariant time-dependent mass and dissipation, II. Mathematische Nachrichten, 33 pp., accepted for publication.
3. *Palmieri A., Reissig M.* Fujita versus Strauss - a never ending story. 39 pp., submitted for publication.

J. E. Restrepo (Medellin, Colombia)
cocojoel89@yahoo.es

OMEGA-WEIGHTED GENERALIZATIONS OF THE FRACTIONAL FORCED OSCILLATOR AND THE FRACTIONAL LOGISTIC EQUATIONS

We introduce the following ω-weighted fractional integro-differentiation operators for $m-1<\mu<m$ and $x>0$, see [1]:

$$D_{x,C}^{\mu_m,\omega} f(z) := \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} \int_0^x (x-t)^{m-\mu-1} \omega_{\beta_1,\dots,\beta_n}(x-t) f^{(m)}(t)dt,$$

$$I_0^{\mu_m,\omega} f(x) := \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} \int_0^x (x-t)^{m-\mu-1} \omega_{\beta_1,\dots,\beta_n}(x-t) f(t)dt, \text{ even } \mu=m,$$

while for $m=\mu$, $D_{x,C}^{\mu_m,\omega} f(x) = f^{(m)}(x)$, where $m\in\mathbb{N}$, $\beta_1,\dots,\beta_n$ are real or complex parameters and ω is an integrable function. Now, a weighted fractional forced oscillator is presented:

$$mx(t) = y_0 + \nu y_0 t + \nu I_0^{\mu_1,\tau}\big(x(t)\big) - kI_0^{\lambda_2,\varphi}(x(t)) + I_0^{\gamma_2,\vartheta}(f(t)). \tag{1}$$

from the equilibrium position, subject to Hooke's Law, $-kx(t)$, a damping force $-\nu x'(t)$ and to an external force $f(t)$, where ν and k are nonnegative constants, $0<\mu\le 1$, $1<\lambda\le 2$, $1<\gamma\le 2$, $x(0)=y_0$ ($y_0\in\mathbb{R}$) and $x'(0)=0$. An approximation of the solution of equation (1) is given and some explicit solutions are established in particular cases.

Besides, it was recently presented and solved a fractional version of the logistic equation (see [2]). Here, we present a weighted fractional logistic equation as follows:

$$D_{t,C}^{\mu_m,\omega} v(t) = k(1-v(t)), \quad m-1<\mu\le m, \tag{2}$$

where $v(t)=1/N(t)$, $N(t)$ is the number of individuals in time t, k is the intrinsic growth rate. Of course, in a very particular case becomes to the classical logistic equation. To solve equation (2), we apply the Laplace transform and solve the transformed equation.

R E F E R E N C E S

1. *Restrepo J. E., Kilicman A., Praveen A., Altun O.* Weighted hypergeometric functions and fractional derivative, Adv. Difference Equ., (2017).
2. *Varalta N., Gomes A. V., Camargo R. F.* A Prelude to the Fractional Calculus Applied to Tumor Dynamic, TEMA, 15, N. 2 (2014).

I. G. Stratis (Athens, Greece)
istratis@math.uoa.gr

THE EXTERIOR CALDERÓN OPERATOR FOR NON-SPHERICAL OBJECTS

The exterior Calderón operator (or, Poincaré-Steklov operator) maps the tangential scattered electric surface field to the corresponding magnetic surface field. It is analogous to the Dirichlet - to - Neumann map for the scalar Helmholtz equation. The norm of the exterior Calderón operator quantifies the largest amplification factor of the surface fields. Explicit values of the norm of the exterior Calderón operator have only been obtained so far for the sphere case and the planar case.

We present a new, constructive, approach of finding the norm of the exterior Calderón operator for Lipschitz surfaces in $\mathbb{R}^3$; more precisely, of computing its norm in the space $H^{-1/2}(\mathrm{div}, \Gamma)$.

The key ingredient in the analysis is the set of eigenfunctions to the Laplace-Beltrami operator of the surface. These eigenfunctions and the corresponding eigenvalues are intrinsic to the surface and constitute an excellent tool for further analysis.

We introduce the generalized harmonics (both scalar valued and vector valued); the spherical surface case yields the well known vector spherical harmonics. These functions constitute the natural orthonormal set for a matrix representation of the operator. They are well suited for expansion of the traces of solutions to the Maxwell equations. The norm of the operator is explicitly given as the largest eigenvalue of a quadratic form that contains the matrix representation of the exterior Calderón operator. A new way for the calculation of the Calderón matrix is also presented.

Finally, the connection between the exterior Calderón operator and the transition matrix of the corresponding perfectly conducting obstacle is also analyzed.

My talk is based on joint work with Gerhard Kristensson (Lund University, Sweden), Niklas Wellander (FOI, Swedish Defense Research Agency, Linköping) and Athanasios Yannacopoulos (Athens University of Economics and Business, Greece), that has been submitted for publication.

N. Tokmagambetov (Almaty, Kazakhstan)
tokmagambetov@math.kz

NONHARMONIC ANALYSIS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS

(Joint work with Professor Michael Ruzhansky)

We consider the development of pseudo–differential operators generated by boundary value problems. In particular, we derive an explicit formula for the quantization of pseudo–differential operators induced by the derivative operator on a segment. Starts an interesting direction of discrete analysis based on elliptic boundary value problems, continuing, in a sense, the analysis on the torus started by M. Ruzhansky and V. Turunen, in which case one may think of a problem having periodic boundary conditions.

K. S. Yeletskikh (Yelets, Russia)
kostan.yeletsky@gmail.com

ON A PARTICULAR CLASS OF SINGULAR EQUATIONS

Assume $(D_B)_{ij} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial y_j}, & i \neq j, \\ \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{\gamma_i}{y_i}\frac{\partial}{\partial y_i}, & i = j, \end{cases}$ where $\gamma_i \geq 0$. Let us consider the Cauchy problem:

$u_{tt} = u_{xx} + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{i,j}(x-t)\ (D_B)_{ij}u.$

$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = f(x,y).$

The coefficients $a_{ij} = a_{ji}$ are infinitely differentiable. If all $\gamma_i = 0$, then this is the Ibraimov-Mamontov equation [1].

The function $f(x,y)$ is assumed to be even for each coordinate of the vector y=$(y_1.\ldots,y_{n-1})$, finite and infinitely differentiable. We seek a solution in the class of y-even functions. The Fourier-Bessel-Kipriyanov-Katrakhov integral transform [2] is used, its action is denoted by $\mathcal{F}_B[u] = \widehat{u}$. It is known that $\mathcal{F}_B[D_B u] = (i\xi)^\alpha \widehat{u}$. We apply $\mathcal{F}_B$ to the original problem, a transform with respect to variables y. We obtain the following Cauchy problem

$$\widehat{u}_{tt} = \widehat{u}_{xx} + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{i,j}(x-t)\ \lambda_i\lambda_j\,\widehat{u}, \quad \widehat{u}|_{t=0} = 0,\ \widehat{u}_t|_{t=0} = f(x,\lambda), \tag{1}$$

which does not differ from the Cauchy problem in [1], obtained by applying the Fourier transform to the Ibragimov-Mamontov equation. Using the Riemann function, we define the following solution of the obtained problem (1).

$$\widehat{u}(t,x,\lambda) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} j_0\left(k\sqrt{Q(\lambda)}\right)\ \mathcal{F}_B[f](\xi,\lambda)\,d\xi. \tag{2}$$

We apply the inverse Fourier-Bessel transform to the equality (2). Within the framework of weighted generalized functions, we have

$u(t,x,y) = \frac{1}{2c_\gamma}\int\limits_{x-t}^{x+t} \left(F_B[j_0(k|\mu|)](\eta)\,,\ T_\eta^y f(\xi,\eta)\right)_\gamma d\xi\,.$

Using the formulas of F_B-transform of the radial Bessel function $j_p(k\,|x|)$, for the index

$p = 0$ in case of even and odd numbers $n + |\gamma|$, the solution of the original problem is obtained.

REFERENCES

1. *Ибрагимов Н. Х., Мамонтов Е. В.* О задаче Коши для уравнения $u_{tt} - u_{xx} - \sum_{i,j=1}^{n-1} u_{y_i y_j} = 0$. Математ. сб. 1977. Том. 102(144) №. 3. стр. 391–409.

2. *Катрахов В. В., Ляхов Л. Н.* Полное преобразование Фурье-Бесселя и алгебра сингулярных псевдодифференциальных операторов. Дифференц. Уравнен. 2011. Том. 47. №. 5. стр. 681–695.

А. В. Болтачев (Москва, Россия)
boltachevandrew@gmail.com

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ДАННЫМИ НА ВСЕЙ ГРАНИЦЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

Исследуется краевая задача для уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{1}$$

с условием периодичности по x и y

$$u(x, y, t) = u(x + 1, y, t) = u(x, y + 1, t) \tag{2}$$

и условиями

$$u|_{t=0} = g_1(x, y); \tag{3}$$

$$\left(a_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial t} \right)\Bigg|_{t=\tau} = g_2(x, y), \tag{4}$$

где a_1, a_2, b, g_1, g_2 — заданные периодические функции с периодом 1 по x, y, а τ — заданное число (ср.[1] и [2]).

В работе исследуется разрешимость задачи (1)-(4). Даются условия однозначной и фредгольмовой разрешимости.

Более точно, задача сводится к некоторому уравнению на границе области. Полученное уравнение на границе оказывается ассоциированным с квантованными каноническими преобразованиями (см. [3]). Мы применяем результаты цитированной работы, чтобы дать условия разрешимости уравнения на границе и, следовательно, условия разрешимости задачи (1)-(4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Антоневич А. Б.* „Линейные функциональные уравнения. Операторный подход“— Минск: Университетское, 1988. — С. 195-201.

2. *Соболев С. Л.* „Пример корректной краевой задачи для уравнения колебаний струны с данными на всей границе“// Докл. АН СССР. — 1956. — Т. 109, № 4. — С. 707-709.

3. *A. Savin, E. Schrohe, B. Sternin* Elliptic operators associated with groups of quantized canonical transformations. arXiv:1612.02981. 2016.

Н. П. Бондаренко (Самара, Саратов, Россия)
bondarenkonp@info.sgu.ru

НЕПОЛНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА ГРАФЕ С ЦИКЛОМ [1]

Рассмотрим граф-лассо G, состоящий из вершин v_1 и v_2, граничного ребра $e_1 = (v_1, v_2)$ целочисленной длины l_1 и петли $e_2 = (v_2, v_2)$ длины $l_2 = 1$. Введем на каждом ребре e_j параметр $x_j \in [0, l_j]$. Значение $x_1 = 0$ соответствует граничной вершине v_1, $x_1 = l_1$ — внутренней вершине v_2. Для ребра e_2 оба значения $x_2 = 0$ и $x_2 = 1$ соответствуют вершине v_2.

Рассмотрим на графе G краевую задачу L для уравнения Штурма-Лиувилля

$$-y_j'' + q_j(x_j) y_j = \lambda y_j, \quad x_j \in (0, l_j), \quad j = 1, 2,$$

со стандартными условиями склейки во внутренней вершине

$$y_1(l_1) = y_2(0) = y_2(l_2), \quad y_1^{[1]}(l_1) - y_2^{[1]}(0) + y_2^{[1]}(l_2) = 0,$$

и условием Дирихле $y_1(0) = 0$ в граничной вершине. Здесь q_j — вещественные функции из $W_2^{-1}(0, l_j)$, т.е. $q_j = \sigma_j'$, $\sigma_j \in L_2(0, l_j)$, $y_j^{[1]} := y_j' - \sigma_j y_j$ — квазипроизводные.

Получены асимптототические формулы для собственных значений краевой задачи L. Исследована *неполная обратная задача*, которая состоит в восстановлении потенциала σ_2 на цикле по части спектра и последовательности знаков, связанных с периодической задачей на цикле (см. подробности в [1]), при известном потенциале σ_1 на граничном ребре. Доказана теорема единственности и получен конструктивный алгоритм решения данной обратной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yang C.-F., Bondarenko N. P.* A partial inverse problem for the Sturm-Liouville operator on the graph with a loop. Preprint: Cornell University Library, 2017. URL: https://arxiv.org/abs/1711.05660.

А. О. Ватульян, С. А. Нестеров(Владикавказ, Россия)
1079@list.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АЛГЕБРАИЗАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Количественные расчеты процессов распределения тепла основываются на знании теплофизических характеристик материалов. Однако в случае неоднородных тел идентификация может опираться только на аппарат коэффициентных обратных задач теплопроводности (КОЗТ). В данной работе предложен новый способ решения КОЗТ, который доступен исследователям с инженерным образованием.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (проект МК-686.2017.1), Минобрнауки РФ (проект 1.1660.2017/4.6) и РФФИ (проекты 16-01-00015, 17-51-53180).

Требуется определить теплофизические характеристики стержня (коэффициент теплопроводности, удельную теплоемкость) по дополнительной информации о температуре, измеренной на торце стержня на некотором временном интервале. Для решения поставленной обратной задачи сначала была получена слабая постановка прямой задачи теплопроводности для стержня в трансформантах по Лапласу. Трансформанта температуры и функции, характеризующие теплофизические характеристики, представлены в виде разложения по системе базисных функций. В работе ограничились тремя членами разложения. Подставив эти разложения в выражение для слабой постановки, была получена СЛАУ для нахождения коэффициентов разложения трансформанты температуры. Далее находим выражение для трансформанты температуры на торце стержня. Для нахождения коэффициентов разложения функций, характеризующие теплофизические характеристики, приравниваем к нулю полученное выражение, а в качестве значений для параметра преобразования Лапласа используем значения первых трех полюсов трансформанты дополнительной информации. В результате получаем систему трех алгебраических уравнений третьего порядка, численное решение которой дает 9 наборов чисел. Подходящая тройка коэффициентов находится из условия минимума функционала невязки. Для нахождения полюсов торцевая температура аппроксимировалась в виде линейной комбинации экспоненциальных функций. Показатели экспонент находились по методу Прони.

В ходе вычислительных экспериментов выяснено, что проекционный метод решения обратной задачи теплопроводности доказал свою эффективность.

А. О. Ватульян, В. О. Юров (Ростов-на-Дону, Россия)
vatulyan@math.rsu.ru

АНАЛИЗ ВЫНУЖДЕННЫХ ВОЛНОВЫХ КОЛЕБАНИЙ В ВОЛНОВОДАХ С ПЕРЕМЕННЫМИ СВОЙСТВАМИ

Рассмотрена задача о распространении волн в неоднородном по радиальной координате упругом цилиндрическом волноводе. Колебания волновода вызываются распределенной в кольцевой области периодической во времени нагрузкой. Решение строится в рамках принципа предельного поглощения. К краевой задаче применяется обобщенное интегральное преобразование Фурье по осевой координате, которое позволяет в рамках осесимметричной постановки свести задачу к краевой задаче для векторного дифференциального уравнения первого порядка с переменными коэффициентами. Краевая задача в трансформантах, зависящая от двух параметров, решается численно с помощью метода пристрелки, при этом сформулированные при реализации метода пристрелки задачи Коши решаются методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

Обращение трансформант решения производится с помощью контурного интегрирования и теории вычетов. Установлено, что для любой частоты колебаний у трансформант имеется конечное число вещественных и счетное число комплексных полюсов первого порядка. Сформулирована вспомогательная краевая задача, позволяющая находить вычет без вычисления производной. Найдены продольные и радиальные перемещения на внешней границе волновода в зависимости от продольной координаты в ближней и дальней зоне. Решение было найдено на различных частотах. Проанализированы перемещения для различных законов радиальной неоднородности (непрерывные монотонные и кусочно- постоянные), произведена оценка влияния комплексных и вещественных полюсов на решение, определены границы области дальней зоны, для которой решение формируется только бегущими волнами, определяемыми вещественными полюсами.

Работа выполнена при поддержке Южного математического института.

Т. Ф. Долгих (Ростов-на-Дону, Ростов)
dolgikh@sfedu.ru

ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЗОНАЛЬНОГО ЭЛЕКТРОФОРЕЗА

Процесс зонального электрофореза, как правило, описывается системой квазилинейных гиперболических уравнений. Однако в случаях, когда проводимость смеси уменьшается при увеличении концентраций компонентов, тип уравнений становится эллиптическим.

В работе представлен простейший случай разделения на отдельные составляющие двухкомпонентной смеси. Рассматривается система двух эллиптических уравнений, для которых были поставлены пространственно-периодические начальные данные, соответствующие возмущению постоянного решения. Результаты вычислений показали, что с течением времени начальное пространственно-периодическое возмущение исчезает и возникает структура, состоящая из кноидальных неподвижных волн с растущей во времени амплитудой.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Жуков М. Ю.*, *Ширяева Е. В.*, *Долгих Т. Ф.* Метод годографа для решения гиперболических и эллиптических квазилинейных уравнений. Ростов н/Д: Изд. ЮФУ, 2015.

2. *Долгих Т.Ф.* Уравнения эллиптического типа для зонального электрофореза. Труды XVIII Международной конференции «Современные проблемы МСС». 2016. Том 1, стр. 179–183.

3. *Долгих Т.Ф.* Решение задачи о переносе массы под действием электрического поля в двухкомпонентной смеси. Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2017. № 3-1 (195-1), стр. 28–35.

4. *Долгих Т. Ф.*, *Жуков М. Ю.*, *Ширяева Е. В.* Решение эллиптических уравнений с периодическими данными для задачи зонального электрофореза. Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2017. № 2, стр. 85–96.

В. В. Дударев, Р. М. Мнухин, (Ростов-на-Дону, Россия)
romamnuhin@yandex.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА

В настоящее время конструктивные элементы, выполненные из неоднородных материалов, широко распространены во многих областях техники, таких как автомобилестроение, аэрокосмическая отрасль и медицина. Создание материалов с заданными переменными механическими свойствами является сложной технологической процедурой, состоящей из ряда этапов, таких как спекание, плавление, послойное прессование, напыление и т. д. Объекты, изготовленные из таких материалов, обладают высокой прочностью и имеют целый ряд преимуществ по сравнению с объектами, изготовленными из однородных материалов. Элементы цилиндрической формы являются составными частями различных конструкций (датчики, преобразователи, соединительные детали, подпорки и т. д.). Используя современные модели механики деформируемого твердого тела, можно формулировать и исследовать различные задачи для объектов с неоднородной структурой. Одним из наиболее экономичных и простых в реализации подходов для анализа свойств тела является акустический метод.

На основе общих соотношений линейной теории упругости сформулирована осесимметричная задача об установившихся колебаниях неоднородного упругого цилиндра. Параметры Ламе $\lambda(r)$, $\mu(r)$ считаются переменными по радиусу. Периодическая нагрузка приложена к внешней части границы цилиндра. Неизвестными функциями являются радиальная $u_r(r,z)$ и продольная $u_z(r,z)$ компоненты поля перемещений. Решение задачи построено с помощью метода однородных решений в виде рядов и сведено к численному исследованию n систем четырех дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Оценка точности составленных численных схем проведена для частных случаев путем сравнения с известными решениями. На основе полученного решения построены поля перемещения, амплитудно-частотные характеристики и получены значения резонансных частот для различных законов изменения параметров $\lambda(r)$, $\mu(r)$.

Авторы благодарят профессора А. О. Ватульяна за предложенную задачу и подходы к ее решению.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект № МК-3179.2017.1).

А. В. Епифанов, В. Г. Цибулин (Ростов-на-Дону, Россия)
epifanov-av@yandex.ru, vgcibulin@sfedu.ru

МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ РЕЖИМОВ В ПОПУЛЯЦИОННЫХ МОДЕЛЯХ

Доклад посвящен развитию метода исследования нелинейных пространственных моделей экологии на основе выделения косимметрий рассматриваемых систем (Юдович В. И., Мат. заметки, 1991). С помощью этого подхода анализируются сценарии сосуществования популяций для системы из m жертв и $n-m$ хищников:

$$\begin{gathered}\dot{u}_i=[k_i u_i'-u_i\varphi_i']'+u_i f_i,\quad \varphi_i=\alpha_i R\,(p)+\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}u_j,\\ f_i=\mu_i\bar{u}\,(1-\bar{u}/p)-\sum_{j=m+1}^{n}l_{ij}u_j,\ i=1,\dots,m, \qquad (1)\\ f_i=\sum_{j=1}^{m}\mu_{ij}u_j-l_i,\ i=m+1,\dots,n,\quad \bar{u}=\sum_{j=1}^{m}u_j.\end{gathered}$$

Здесь $u_i\,(x,t)$ — плотность i-й популяции, k_i — коэффициенты диффузии, α_i, β_{ij} — коэффициенты направленной миграции, вызванной неоднородностью распределения ресурса и видов по ареалу ($\alpha_i=0,\ i=m+1,\dots,n$), $\mu_i,\ \mu_{ij}$ — коэффициенты роста, $l_i,\ l_{ij}$ — коэффициенты смертности. Результаты исследования модели (1) при $R\,(p)=p$ представлены в (Епифанов А. В., Цибулин В. Г., Биофизика, 2016; КиМ, 2017).

При условиях периодичности

$$\begin{aligned}&\frac{k_i}{k_j}=\frac{\alpha_i}{\alpha_j}=\frac{\beta_{ir}}{\beta_{jr}}=\frac{\mu_i}{\mu_j}=\frac{l_{is}}{l_{js}}=\nu_{ij},\quad 1\le i<j\le m,\quad m+1\le s\le n,\\ &\frac{k_i}{k_j}=\frac{\beta_{ir}}{\beta_{jr}}=\frac{\mu_{is}}{\mu_{js}}=\frac{l_i}{l_j}=\gamma_{ij},\quad m+1\le i<j\le n,\ 1\le s\le m,\ 1\le r\le n.\end{aligned}$$

система (1) имеет косимметрию $L=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m,\zeta_{m+1},\zeta_{m+2},\dots,\zeta_n)$,

$$\xi_i=e^{-\varphi_i/k_i}\sum_{j=1}^{m}sign\,(i-j)\,k_j u_j,\quad \zeta_i=e^{-\varphi_i/k_i}\sum_{j=m+1}^{n}sign\,(i-j)\,k_j u_j.$$

В случае $m=n$, $R\,(p)=\ln p$, $\alpha_i=k_i$, $\beta_{ij}=0$, $i,j=1,\dots,m$ косимметрия действует на подпространстве $u_i=c_i p$, при этом существует семейство идеальных свободных распределений, в которых плотности всех популяций пропорциональны функции ресурса.

К. Н. Жуйков (Москва, Россия)
zhuykovcon@gmail.com

ОБ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ НЕКОММУТАТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ДЕЙСТВИЕМ МЕТАПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

Рассматривается класс некоммутативных операторов вида

$$D = \sum_k D_k\left(x, -i\frac{d}{dx}\right)T^k : \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{H}^{s-k}(\mathbb{R}^n), \tag{1}$$

где $D_k\left(x, -i\frac{d}{dx}\right)$ — дифференциальный оператор порядка k, $\mathcal{H}^s$ — пространство Соболева (см., напр.,[2]), T — квадратичное преобразование Фурье

$$\begin{gathered} Tf(x) = i^{m-n/2}\sqrt{|\det B|}\int e^{2\pi\, iW(x,x')}f(x')dx', \\ \arg\det B \equiv m\pi \quad mod \quad 2\pi, \end{gathered} \tag{2}$$

ассоциированное с симплектической матрицей

$$S_W = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \det B \neq 0,$$

где $W(x,x') = \frac{1}{2}DB^{-1}x^2 - B^{-1}xx' + B^{-1}Ax'^2$.

Операторы (2) порождают метаплектическую группу $Mp(n)$ [1], являющуюся подгруппой группы унитарных оперторов на $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Данная теория является обобщением эллиптической теории на некоммутативном торе [2,3].

Траекторный символ оператора (1) есть оператор-функция, действующая в весовых пространствах последовательностей:

$$\sigma\big(D\big)(x,\xi) : l^2(\mathbb{Z}, \mu_{x,\xi,s}) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z}, \mu_{x,\xi,s-m}). \tag{3}$$

В работе предъявляются условия эллиптичности некоммутативного оператора (1) в терминах траекторного символа (3) в зависимости от показателя гладкости s соответствующих пространств Соболева.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *de Gosson M.* Symplectic geometry and quantum mechanics. Birkhauser Basel, 2006.
2. *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Некоммутативная эллиптическая теория. Примеры. Тр. МИАН. 2010. Том. 271. Стр. 204-223
3. *Connes A.* Noncommutative geometry. Academic Press, Inc., San Diego, CA. 1994.

М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева (Ростов-на-Дону, Россия)
myuzhukov@gmail.com, evshiryaeva@mail.ru

АНАЛОГИЯ МЕЖДУ УРАВНЕНИЯМИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И КОНЕЧНЫМИ РАЗНОСТЯМИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОФОРЕЗА

Система квазилинейных гиперболических уравнений, описывающая электрофорез — метод разделения многокомпонентной смеси на индивидульные компоненты при помощи электрического поля [1], исследуется обобщенным методом годографа, который позволяет записать решение задачи Коши в неявной аналитической форме в виде системы алгебраических уравнений [2]. При применении обобщенного метода годографа для вычисления коммутирующих потоков, требуется решать систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. Для решения указанной системы используется аппарат конечных разностей — систему удается записать в виде разделенных разностей, построить полином Ньютона и получить решение, определяемое инвариантами полинома, которые в свою очередь полностью идентифицируется начальными данными задачи Коши. Обнаруженная аналогия между системой уравнений в частных производных и конечными разностями позволяет использовать указанный алгоритм решения и для других систем квазилинейных гиперболических уравнений, к которым примени обобщенный метод годографа. Предложен также алгоритм построения явной формы решения при помощи введения лагранжевых переменных, позволяющих свести задачу к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены примеры решения задачи Коши для различных начальных данных, в частности, кусочно-постоянных и гауссовых распределений концентрации компонент смеси.

Работа выполнено при финансовой поддержке базовой части государственного задания № 1.5169.2017/БЧ Министерства образования и науки РФ, ЮФУ.

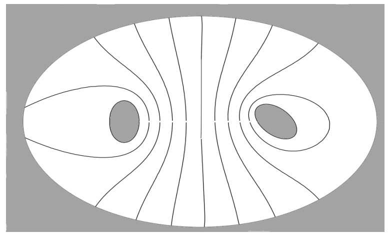
Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Жуков М. Ю.* Массоперенос электрическим полем. Ростов-на-Дону: Изд-во Рост- ун-та. 2005.
2. *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В., Долгих Т. Ф.* Метод годографа для решения гиперболических и эллиптических квазилинейных уравнений. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ. 2015.

П. Н. Иваньшин (Казань, Россия)
pivanshi@yandex.ru

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

В работе приведен метод приближенного решения смешанной краевой задачи для неодносвязных плоских областей. Метод основан на приближенном решении интегральных уравнений [1]. Решение сводится к решению системы линейных уравнений относительно коэффициентов Фурье граничных значений сопряжённых функций. Результаты могут быть использованы, например, для решения пространственных задач [2].



ЛИТЕРАТУРА

1. *Ivanshin P. N., Shirokova E. A.* Approximate Conformal Mappings and Elasticity Theory. J. of Complex Analysis. 2016 ID 4367205
2. *Ivanshin P. N., Shirokova E. A.* Spline-interpolation solution of 3D Dirichlet problem for a certain class of solids. IMA Journal of Applied Mathematics. 2013. V. 78, No 6, pp. 1109-1129.

В. В. Казак (ЮФУ, Россия), Н. Н. Солохин (ДГТУ, Россия)
vkazak136@gmail.com, nik2007.72@mail.ru

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ ПАРАБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ СМЕШАННОГО ТИПА

Для поверхностей вида $z = f(x, y)$ в работе [1] была решена краевая задача

$$\begin{cases} w_{\bar{z}} + q_1 w_z + q_2 \bar{w}_{\bar{z}} = 0, & z \in D, \\ \mathrm{Re}\left\{\overline{a(t)} w_t + \varepsilon \overline{b(t)} w\right\} = \sigma, & t \in \partial D, \end{cases}$$

При этом использованы результаты работы [2].

В настоящей работе реализация общего результата рассматривается для частного вида таких поверхностей - параболоида вращения. В этом случае приходим к следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} w_{\bar{z}} = 0, & z \in D, \\ \mathrm{Re}\left\{t^{-k} w_t - a\varepsilon t^{-(n+1)} w\right\} = 0, & t \in \partial D, \end{cases}$$

Доказана следующая

Теорема. *Для параболоида вращения, подчинённого на краю краевому условию* $a(\overline{U}, \bar{\ell}_\varepsilon) + b(\overline{V}, \bar{n}) = 0$, *где* a *и* b *- действительные константы, данное краевое условие является квазикорректным с* $2n+3$ *степенями свободы для любого* $\varepsilon \neq 0$.

При этом рассмотрены случаи как нулевого, так и ненулевого значения индекса краевого условия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Казак В. В., Солохин Н. Н.* О квазикорректности смешанного краевого ус-ловия для одного класса поверхностей// Современные проблемы мате-матики и механики, том VI, выпуск 2. Издательство Московского уни-верситета, 2011. – С. 212 – 216.

2. *Фоменко В. Т.* О квазикорректности внешних связей в теории бесконечно малых изгибаний // СМЖ. — 1974. — Т. XV, № 1. — С. 152–161.

Козлова М. Г., Белозуб В. А. (Симферополь, РФ)
art-inf@mail.ru

ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ВЫБОРА РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Разработка устойчивых, регуляризирующих алгоритмов связана с адекватным использованием априорной и другой информации о решении, модели, способах получения данных косвенных измерений. В работе рассматриваются модели в виде разностных аналогов нелинейных интегральных уравнений типа свертки первого рода. Разнообразие регуляризирующих алгоритмов определяется доступной информацией и ее использованием. Тем самым, формируется интеллектуальная система, базовыми элементами которой являются ультрасистемы (по терминологии А. В. Чечкина), преобразователи семантической информации и ультраоператоры. На первом этапе решается задача восстановления экстремальных точек поверхности.

Системы уравнений моделируют процесс сканирования поверхности антенными устройствами, характер сигнала и его отражение от сканируемой поверхности. Такие нелинейные системы алгебраических уравнений являются аналогами нелинейных уравнений типа Урысона 1 рода [1].

Синтез дискретных моделей – аналогов непрерывных – выявил ряд проблем. Процесс дискретизации (и квантования) существенно зависит от зондирующего сигнала, его дельта-образности и искомого решения (поверхности и характера отражения от поверхности). Решение состоит в применении асимптотических формул для интеграла с большими параметрами и учета известной информации о решении (априорной, прецедентной и др.). Таким образом, это может быть композиция дискретных адаптивных моделей, допускающих реоптимизацию по прецедентам. Дискретная модель должна обеспечивать проведение вычислительных экспериментов по решению прямой задачи, а также обратной, которая является некорректной. При выборе дискретных моделей предпочтение отдается простейшим и уже регуляризованным парам, соответствующим прямой и обратной задачам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lukyanenko V. A.* Some Tasks for Integral Equations of Urison's Type / V. A. Lukianenko, M. G. Kozlova, U. A. Hazova // Proceedings of the Internati-onal Conference «Integral Equations – 2010», 25-27 August 2010. – Lviv, Ukraine: PAIS, 2010. – P. 80-84.

И. В. Коноплева (Ульяновск, Россия)
irinakonopleva2014@yandex.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗВЕТВЛЯЮЩИХСЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О БИФУРКАЦИИ ПУАНКАРЕ–АНДРОНОВА–ХОПФА

В работе [1] в банаховых пространствах E_1 и E_2 рассмотрена задача о бифуркации Пуанкаре–Андронова–Хопфа:

$$\begin{array}{l} F(p,x,\varepsilon)=0,\ p=\frac{dx}{dt},\ F(0,x_0,\varepsilon)\equiv 0,\ F'_p(0,x_0,0)=A_{x_0}=A_0, \\ F'_x(0,x_0,0)=-B_{x_0}=-B_0,\ F'_p(0,x_0,\varepsilon)=A_0+A_{x_0}(\varepsilon)=A(\varepsilon), \\ F'_x(0,x_0,\varepsilon)=-B_0+B_{x_0}(\varepsilon),\ \overline{D}_{B_0}=E_1,\ D_{B_0}\subset D(A(\varepsilon)). \end{array} \tag{1}$$

Пусть A_0-спектр $\sigma_{A_0}(B_0)$ фредгольмова оператора B_0 распадается на две части: $\sigma^-_{A_0}(B_0)$ лежит строго в левой полуплоскости и $\sigma^0_{A_0}(B_0)$ состоит из собственных значений $\pm i\alpha$ кратности n с $u_j=u_{1j}\pm iu_{2j}$, $v_j=v_{1j}\pm iv_{2j}$–собственными элементами сопряженного оператора с обобщенными жордановыми цепочками длин p_j. Доказана теорема о неявных операторах в условиях групповой симметрии

Теорема. *В задаче (1) в точке бифуркации x_0 A_0-жорданов набор оператор-функции $B_{x_0}(x-x_0)-B_{x_0}(\varepsilon)(x-x_0)$ всегда можно выбрать три-каноническим. Пусть $\dim ker(B_{x_0})=n, v=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\varphi_i\in ker(B_{x_0})$ и при некоторых условиях гладкости непрерывной группы Ли $G_l(a)$ со стационарной подгруппой $G_s(a), s<l$ точки x_0 выполняется равенство $\kappa=l-s=n$, а $G_s(a)$ является нормальным делителем $G_l(a)$ с соответствующим идеалом $T^s_{g(a)}$ инфинитезимальных операторов. Тогда существует непрерывная функция $v(x_0,\xi,\varepsilon)=v(x_0,\xi,\overline{\xi})+u(x_0,v(x_0,\xi,\overline{\xi}),\mu,\varepsilon):T^{2n}_{g(a)}\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathcal{E}_1$, инвариантная относительно фактор-группы $G_{2^\kappa}=G_{2n}=G_r/G_s$ на $T^{2n}_{g(a)}$, такая, что $F(x_0+v(x_0,\xi,\overline{\xi},\varepsilon),\varepsilon))=0$ при $v(x_0,\xi,\overline{\xi})\in T^{2n}_{g(a)},\ |t|<\varepsilon$*

На основе этой теоремы и результатов [2] получены критерии устойчивости семейств разветвляющихся решения в условиях групповой симметрии.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Логинов Б. В., Коноплева И. В., Русак Ю. Б.* Теоремы о неявных операторах в условиях групповой симметрии. Доклады РАН. Математика. 2011. Том. 440, №. 1, стр. 15–20.

2. *Треногин В. А.* Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению как следствие теоремы о неявных операторах. Доклады РАН. Математика. 2006. Том. 407, №. 6, стр. 742–746.

Л. Г. Куракин (Ростов-на-Дону, Владикавказ, Россия), И. А. Лысенко (Ростов-на-Дону, Россия), И. В. Островская (Ростов-на-Дону, Россия), М. А. Соколовский (Москва, Россия)
kurakin@math.rsu.ru, irlys@sfedu.ru, ivostrovskaya@sfedu.ru, sokolovskiy@iwp.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРАВИЛЬНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ В ДВУХСЛОЙНОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Проведен анализ устойчивости стационарного вращения системы N точечных вихрей одинаковой интенсивности, расположенных в вершинах правильного N-угольника на окружности радиуса R в одном слое двухслойной вращающейся жидкости.

Пространство параметров (N, R, α), где α разность между толщинами слоев, делится на (A) область устойчивости в точной нелинейной постановке, (B) область линейной устойчивости, в которой требуется дополнительный нелинейный анализ, и (C) область экспоненциальной неустойчивости.

Случай (A) имеет место при $N = 2, 3, 4$ для всех значений R и α. При $N = 5$ встречаются множества (A) и (B), а при $N = 6$ – множества (A) и (C). В случае $N = 7$ возможны все ситуации (A), (B) и (C). В случае четных $N = 2n \geqslant 8$ всегда имеет место экспоненциальная неустойчивость, а в при нечетных $N = 2\ell + 1 \geqslant 9$ возможны два случая: (B) и (C).

Исследование использует результаты работы [1] об устойчивости конфигураций бесселевых вихрей. Результаты об устойчивости вихревого триполя и квадруполя ($N = 3,\ 4$) опубликованы [2].

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Министерства образования и науки РФ (№ 1.5169.2017/8.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kurakin L. G., Ostrovskaya I. V.* On Stability of Thomson's Vortex N-gon in the Geostrophic Model of the Point Bessel Vortices. Regul. Chaotic Dyn. 2017, Vol. 22, No. 7, pp. 865–879.

2. *Kurakin L. G., Ostrovskaya I. V., Sokolovskiy M. A.* On the Stability of Discrete Tripole, Quadrupole, Thomson' Vortex Triangle and Square in a Two-layer/Homogeneous Rotating Fluid. Regul. Chaotic Dyn. 2016. Vol. 21, No. 3, pp. 291–334.

К. С. Лапин (Саранск, Россия)
klapin@mail.ru

ВЫСШИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА И РАВНОМЕРНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ПО ПУАССОНУ [1]

Пусть задана любая система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n)^T, \tag{1}$$

правая часть которой задана в $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ и непрерывно дифференцируема до порядка $(l-1)$ включительно, где $l \geqslant 1$ – фиксированное число.

[1] Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации, проект № МК-139.2017.1

Любую неотрицательную возрастающую числовую последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i\geqslant 1}$, $\lim\limits_{i\to\infty} \tau_i = +\infty$, будем называть $\mathcal{P}$-последовательностью. Для каждой $\mathcal{P}$-последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i\geqslant 1}$ через $M(\tau)$ обозначается множество $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}[\tau_{2i-1};\tau_{2i}]$.

О решениях системы (1) говорят, что они равномерно ограничены по Пуассону, если для системы (1) найдется такая $\mathcal{P}$-последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i\geqslant 1}$, и для каждого $\alpha \geqslant 0$ существует такое число $\beta > 0$, что для любого решения $x(t, t_0, x_0)$ системы (1), где $t_0 \in M(\tau)$ и $\|x_0\| \leqslant \alpha$, выполнено условие $\|x(t, t_0, x_0)\| < \beta$ при всех $t \in R^+(t_0) \bigcap M(\tau)$. В случае, когда требуется точно указать соответствующую $\mathcal{P}$-последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i\geqslant 1}$, говорят, что решения системы (1) равномерно ограничены по Пуассону относительно $\mathcal{P}$-последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i\geqslant 1}$.

Пусть $a(r) > 0$ – возрастающая функция, $b(r) \geqslant 0$ – неубывающая функция и $b(r) \to \infty$ при $r \to \infty$.

Теорема 1. *Пусть для системы* (1) *существуют такие $\mathcal{P}$-последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i\geqslant 1}$ и функция Ляпунова $V(t, x)$, заданная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, с производными l-го порядка в силу системы* (1)*, что выполнены следующие условия:*

1) $V^{(i)}(t, x) \geqslant 0$ для каждого $0 \leqslant i \leqslant l-1$;

2) $b(\|x\|) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{l} V^{(i-1)}(t, x) \leqslant a(\|x\|)$

для всех $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$. Кроме того, пусть решения уравнения сравнения l-го порядка для системы (1) *равномерно ограничены по Пуассону относительно $\mathcal{P}$-последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i\geqslant 1}$. Тогда решения системы* (1) *равномерно ограничены по Пуассону.*

В. А. Лукьяненко (Симферополь, РФ)
art-inf@yandex.ru

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА ДЛЯ ПОЛОСЫ

Теория задачи Карлемана для полосы, ее обобщения и приложений изложены в монографиях Ф. Д. Гахова и Ю. И. Черского [1], Г. С. Литвинчука. Обобщенная многоэлементная задача Карлемана рассматривается в работах В. А. Лукьяненко [2]. Обобщения на интегральные уравнения и краевые задачи для функций от двух переменных приводятся в работе [3]. В работе рассмотрены обобщения задачи Карлемана для полосы, содержащие интегральный оператор вида

$$(A\Phi)(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(x + iy)dy = U(x) \in L_2(\mathbb{R}) \qquad (1)$$

с функцией $\Phi(x) \in \{\{\alpha, \beta\}\}$ [1, стр. 221]. Так как обратное преобразование Фурье от подинтегральной функции (1) равно $e^{-yt}\varphi(t)$, для (1) получаем

$$\varphi(t) = \frac{tu(t)}{e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}},\ e^{-yt}\varphi(t) = \frac{e^{-yt}tu(t)}{e^{\beta t} - e^{-\alpha t}},\ \alpha \le y \le \beta. \qquad (2)$$

Откуда находим $\Phi(z)$, $\Phi(x+i\alpha)$ и $\Phi(x+i\beta)$.

Рассмотрены более общие уравнения

$$K(x)\Phi(x+i\gamma) + \int_\alpha^\beta \Phi(x+iy)dy = G(x),\ x \in \mathbb{R}$$

и экстремальные задачи, содержащие оператор A для функций из $\{\{\alpha, \beta\}\}$ с функциональными ограничениями, которые сводятся к системам двух задач типа Карлемана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. – М.: Наука. – 1978. – 296 с.
2. *Лукъяненко В. А.* Обобщенная краевая задача Карлемана // Динамические системы, вып. 19, 2005. – С. 129–144.
3. *Лукъяненко В. А.* Интегральные уравнения и краевые задачи для функций от двух переменных // Динамические системы, 2014, том 4(32), № 1–2, С. 143–152.

И. А. Лысенко (Ростов-на-Дону, Россия)
irlys@sfedu.ru

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВИХРЕВОГО N-УГОЛЬНИКА В АЛЬВЕНОВСКОЙ МОДЕЛИ ДВУХЖИДКОСТНОЙ ПЛАЗМЫ

Рассматривается движение системы N вихрей одинаковой интенсивности Γ в альвеновской модели в двухжидкостной плазме, заданное гамильтонианом [1]

$$\mathcal{H} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \sum_{1\le j<k\le N} W\left(|z_j - z_k|\right), \quad W(\xi) = \ln\xi + c\mathrm{K}_0(\xi).$$

Здесь $z_k = q_k + ip_k$, (q_k, p_k) – декартовы координаты k-го вихря, K_0 – модифицированная функция Бесселя, параметр $c > 0$.

Исследуется устойчивость стационарного вращения системы N завихренностей, расположенных в вершинах правильного N-угольника, вписанного в окружность радиуса R. Устойчивость понимается как орбитальная устойчивость, а неустойчивость – как неустойчивость равновесия редуцированной системы. Проведён аналитический анализ собственных значений матрицы линеаризации и квадратичной формы гамильтониана.

В результате пространство параметров (N, R, c) разделяется на 3 области: область устойчивости в точной нелинейной постановке; область линейной устойчивости, в которой требуется дополнительный нелинейный анализ с привлечением методов КАМ-теории и область экспоненциальной неустойчивости. Получены результаты для всех $R > 0$, $c > 0$ и $N = 2, \ldots, 11$. Для всех исследованных значений $N = 2, \ldots, 11$ встречаются оба случая устойчивости. Экспоненциальная неустойчивость имеет место при $N = 4, ..., 11$.

Исследование использует результаты работ [2,3].

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Министерства образования и науки РФ (№ 1.5169.2017/8.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bergmans J., Kuvshinov B. N., Lakhin V. P.* Spectral stability of Alfven filament configurations. Physics of plasmas. 2000. Vol. 7, No. 6, pp. 2388–2403.

2. *Kurakin L. G., Ostrovskaya I. V.* On Stability of Thomson's Vortex N-gon in the Geostrophic Model of the Point Bessel Vortices. Regul. Chaotic Dyn. 2017. Vol. 22, No. 7, pp. 865–879.

3. *Kurakin L. G., Yudovich V. I.* The stability of stationary rotation of a regular vortex polygon. Chaos. 2002. Vol. 12, No. 3, pp. 574–595.

И. В. Моршнева (Ростов-на-Дону, Россия)
ivmorshneva@sfedu.ru

БИФУРКАЦИИ КОРАЗМЕРНОСТИ 2 В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ДВОЙНОЙ КРУГОВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Изучаются бифуркации коразмерности 2 в динамических системах, инвариантных относительно группы $O(2) \times O(2)$. Задачи с такой симметрией возникают, например, при исследовании конвекции в горизонтальном или вертикальном слое жидкости. Для исследования используется метод сведения на центральное многообразие. Построены амплитудные системы в окрестности значений параметров, при которых нейтральный спектр линейного оператора состоит из двух пар чисто мнимых собственных значений.

Проведено исследование амплитудных систем на инвариантных подпространствах. Показано, что в условиях общего положения возможно возникновение периодических решений типа бегущих волн, косых бегущих волн и их нелинейных смесей, а также возникновение многочастотных решений. Получены явные выражения для асимптотик возникающих решений и для величин, определяющих характер их ветвления и устойчивость.

Д. О. Непряхин, М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева (Ростов-на-Дону, Россия)
nervoidaz@yandex.ru

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ О СЕДИМЕНТАЦИИ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

Седиментация примеси в потоке жидкости исследуется для упрощенной асимптотической модели [1] при помощи метода конечных элементов с использованием бездиссипативной схемы Кранка–Никольсона [2]. Задача сводится к решению уравнения переноса с диффузией для примеси в потоке жидкости с известным профилем скорости (профиль Пуазейля, варианты турбулентного профиля) [3]. Показано, что для некоторых профилей скорости существует замена переменных, позволяющая исключить скорость переноса из уравнения диффузии, что позволяет существенно повысить точность решения. Представлены результаты расчетов профиля распределения концентрации примеси.

Работа выполнено при финансовой поддержке базовой части государственного задания № 1.5169.2017/БЧ Министерства образования и науки РФ, ЮФУ.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Бочев М. А., Надолин К. А., Николаев И. А.* Моделирование распространения вещества в двумерном стационарном открытом русловом потоке // Матем. моделирование. 1996. Т. 8, № 1. С. 11–24.

2. *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.* Решение задач математической физики при помощи пакета конечных элементов FreeFem++. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ. 2014.

3. *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.* Математическое моделирование процесса седиментации примеси в потоке жидкости. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ. 2016.

В. Г. Николаев (Великий Новгород, Россия)
vg14@inbox.ru

О РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ШВАРЦА В ОДНОМ СЛУЧАЕ

Пусть матрица $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\det J \neq 0$ имеет только комплексные собственные числа. Назовем n-вектор-функцию $\phi = \phi(z) \in C^1(D)$, определенную в области $D \subset \mathbb{R}^2$, аналитической по Дуглису в D [1], если выполнено равенство $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} - J\cdot\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 0$, $z \in D$.

Обозначим через Γ границу односвязной области D. Рассмотрим следующую граничную *задачу Шварца* [1].

Пусть $\psi(t) \in C(\Gamma)$, $t \in \Gamma$ — вещественная n-вектор-функция. Требуется найти аналитическую по Дуглису в области D функцию $\phi(z)$, удовлетворяющую граничному условию $\operatorname{Re}\phi(z)\big|_\Gamma = \psi(t)$.

Введем следующие обозначения: векторы $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k \in \mathbb{C}^n$, причем через $\overline{\mathbf{x}}_k$ обозначим комплексное сопряжение вектора $\mathbf{x}_k$. Определим $n\times n$-матрицы Q, J_1 и J по следующему правилу:

$$\begin{gathered} Q = \big(\mathbf{x}_1,\,\ldots,\,\mathbf{x}_m,\,\overline{\mathbf{x}}_1 + l_1\mathbf{x}_1,\,\ldots,\,\overline{\mathbf{x}}_m + l_m\mathbf{x}_m,\,\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_{m_1}\big), \\ l_k \in \mathbb{C}, \quad k = 1,\ldots,m, \quad 2m + m_1 = n, \quad \det Q \neq 0, \\ J_1 = \operatorname{diag}\big(\lambda_1,\ldots,\lambda_m,\mu_1,\ldots,\mu_m,\underbrace{\eta,\ldots,\eta}_{m_1}\big), \quad J = QJ_1Q^{-1}. \end{gathered} \tag{1}$$

При этом $\operatorname{Im}\lambda_k \neq 0$, $\operatorname{Im}\mu_k \neq 0$, $k = 1,\ldots,m$; $\operatorname{Im}\eta \neq 0$. Предположим, что $\Gamma = \partial D$ — контур Ляпунова. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть матрица* $J = QJ_1Q^{-1}$, *где* Q, J_1 *имеют вид* (1). *При этом если* $\lambda_k \neq \mu_k$, *то либо* $l_k = 0$, *либо* $|l_k| = 1$. *Если* $\lambda_k = \mu_k$, *то число* $l_k \in \mathbb{C}$ *— произвольное. Тогда:*

1) *если* $(\operatorname{Im}\lambda_k)\cdot(\operatorname{Im}\mu_k) > 0,\ k = 1,\dots,m$, *то для любой граничной функции* $\psi(t) \in H^\sigma(\Gamma),\ \ 0 < \sigma < 1$ *задача Шварца имеет единственное (с точностью до вектор-постоянной) решение* $\phi(z) \in H^\sigma(\overline{D})$;

2) *если функция* $\psi(t) \in C^{1,\sigma}(\Gamma)$, *а также* $|l_k| = 1$ *при* $\lambda_k \neq \mu_k$, *то задача Шварца имеет единственное решение* $\phi(z) \in C^{1,\sigma}(\overline{D})$;

3) *если* $\Gamma = \partial D$ *— жорданова кривая и* $|l_k| = 1$ *при* $\lambda_k \neq \mu_k$, *то однородная* $(\psi \equiv 0)$ *задача Шварца имеет только тривиальные решения в классе функций* $\phi(z) \in C(\overline{D})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев В. Б., Николаев В. Г.* О задаче Шварца для эллиптических систем первого порядка на плоскости. Дифференциальные уравнения. 2017. Том. 53, №. 10, стр. 1351–1361.

Л. В. Новикова (Ростов-на-Дону, Россия)
lvnovikova@sfedu.ru

ВЕТВЛЕНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим в банаховом пространстве U k раз $(k \geqslant 3)$ непрерывно дифференцируемый по Фреше оператор $N_\delta\colon U \to U$, зависящий от вещественного параметра δ, считая отображение $\delta \to N_\delta x$ непрерывно дифференцируемым по δ для любого $x \in U$.

Пусть K — гладкое класса C_1 инвариантное многообразие оператора N_δ. Касательное пространство T_x многообразия K переходит под действием производной Фреше $N'_\delta(x)$ оператора N_δ в точке x в касательное пространство $T_{N_\delta x}$ многообразия K в точке $N_\delta x$.

Предположим, что существует трансверсальное слоение $R_\delta x$ $(x \in K)$ к касательному слоению T_x $(x \in K)$, $(T_x \oplus R_\delta x = U)$, инвариантное относительно действия производной Фреше $N'_\delta(x)$ оператора $N_\delta\colon U \to U$ (так что $N'_\delta(x)R_\delta x \leqslant R_{N_\delta x}$).

Известно, что если

$$\left\| N'_\delta(x)\big|_{R_\delta x \to R_{N_\delta x}} \right\| < 1 \tag{1}$$

и

$$\left\| N_\delta(x)\big|_{T_x \to T_{N_\delta x}} \right\| < \left\| N_\delta(x)\big|_{R_\delta x \to R_{N_\delta x}} \right\| < 1, \tag{2}$$

то, в случае компактности инвариантного многообразия K оператора N_δ, оно обладает свойством асимптотической устойчивости.

Утверждение. *Если выполнены условия*

$$\lambda_x(0) \equiv 1, \quad \lambda'_x(0) > 0, \quad a_x(0) < 0, \quad \frac{\lambda'_x(0)}{a_x(0)} \equiv \text{const},$$

$$\left\| P_{2,0} N'_\delta(x) \big|_{R_{2,0}x \to R_{2,0 N_\delta x}} \right\| < 1, \quad x \in K,$$

то при малых $\delta > 0$ инвариантное многообразие K неустойчиво и от него ответвляется инвариантное, асимптотически устойчивое многообразие K_δ, гомеоморфное K.

М. В. Норкин (Ростов-на-Дону, Россия)
norkinmi@mail.ru

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СВОБОДНОМ КАВИТАЦИОННОМ ТОРМОЖЕНИИ ЦИЛИНДРА В ЖИДКОСТИ ПОСЛЕ УДАРА

Рассматривается задача о безотрывном ударе и последующем свободном кавитационном торможении кругового цилиндра, плавающего на поверхности жидкости. Особенностью этой задачи является то, что при определенных условиях, возникают области низкого давления вблизи тела и образуются присоединенные каверны. Зоны отрыва и закон движения цилиндра заранее неизвестны и подлежат определению в ходе решения задачи. Поставленная задача, при малых временах, сводится к связанной нелинейной задаче, включающей в себя уравнение, определяющее закон движения цилиндра, и смешанную краевую задачу теории потенциала с односторонними ограничениями на поверхности тела:

$$\Delta\Phi_1 = 0, \quad R \in \Omega, \qquad \Phi_1 = -f(\Phi_0), \quad R \in S_2$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \omega n_y, \quad p_0 - \Phi_1 - f(\Phi_0) - Fr^{-2} y \geqslant 0, \quad R \in S_{11}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \geqslant \omega n_y, \quad p_0 - \Phi_1 - f(\Phi_0) - Fr^{-2} y = 0, \quad R \in S_{12}$$

$$f(\Phi_0) = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi_0)^2$$

Здесь ω – неизвестное ускорение цилиндра (на малых временах, в рассматриваемом асимптотическом приближении, скорость тела уменьшается по линейному закону); S_{11} и S_{12} – неизвестные начальные зоны контакта и отрыва; S_2 – невозмущенная внешняя свободная граница жидкости; Φ_0 – потенциал скоростей, приобретенных частицами жидкости в результате удара; p_0 – безразмерное давление на внешней свободной поверхности; Fr – число Фруда.

В частном случае $p_0 = 0$ строится аналитическое решение задачи. Для определения точки отрыва и ускорения цилиндра получена система трансцендентных уравнений, содержащих элементарные функции. Данная работа является развитием результатов статьи [1].

ЛИТЕРАТУРА
1. *Норкин М. В.* Кавитационное торможение кругового цилиндра в жидкости после удара. ПМТФ. 2017. Том. 58, №. 1(341), стр. 102–107.

И. В. Островская (Ростов-на-Дону, Россия)
ivostrovskaya@sfedu.ru

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТОМСОНОВСКОГО ВИХРЕВОГО МНОГОУГОЛЬНИКА ВНЕ КРУГА В СЛУЧАЕ НЕНУЛЕВОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ ОБТЕКАНИЯ ГРАНИЦЫ

Рассматривается система n точечных вихрей одинаковой интенсивности $\varkappa$, расположенных равномерно на окружности радиуса R_0 вне круговой области радиуса R. Предполагается обтекание круговой границы с ненулевой циркуляцией Γ. Движение такой вихревой конфигурации описывается гамильтонианом:

$$H = -\frac{\varkappa^2}{4\pi}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\ln\left|z_j - z_k\right|^2 + \frac{\varkappa^2}{8\pi}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left|R^2 - z_j\bar{z}_k\right|^2$$
$$-\frac{\varkappa^2 n}{4\pi}\sum_{k=1}^{n}\ln\left|z_k\right|^2 - \frac{\varkappa\Gamma}{4\pi}\sum_{k=1}^{n}\ln\left|z_k\right|^2.$$

Здесь $z_k = x_k + iy_k$, x_k, y_k – координаты k-го вихря, $\widehat{z}_k = \dfrac{R^2}{\bar{z}_k}$ – отражение k-го вихря границей круга.

Задача имеет решение, являющееся стационарным вращением

$$z_k = e^{i\omega t}u_k, \quad u_k = R_0 e^{2\pi i(k-1)/n}, \quad k = 1, \ldots, n,$$
$$\omega = \omega_n = \frac{\varkappa}{4\pi R_0^2}\left(3n - 1 - \frac{2n}{1-q^n}\right) + \frac{\varkappa\Gamma}{2\pi R_0^2}, \quad q = \frac{R^2}{R_0^2} < 1.$$

Проведен анализ устойчивости этого режима в рамках подхода, развитого В. И. Юдовичем для задачи устойчивости стационарных движений динамических систем, обладающих группой симметрии. Устойчивость здесь понимается как устойчивость по Раусу (орбитальная устойчивость стационарного движения).

В работе исследована квадратичная часть приведенного гамильтониана и собственные значения матрицы линеаризации. Показано, что все пространство параметров задачи (q, Γ) разбивается на три части: область устойчивости по Раусу в точной нелинейной постановке, область экспоненциальной неустойчивости и область в которой требуется нелинейный анализ. Для случаев $n = 3$, 5 найдены все резонансы до четвертого порядка включительно.

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Министерства образования и науки РФ (Задание № 1.5169.2017/БЧ).

С. П. Плышевская (Симферополь, Россия)
splyshevskaya@mail.ru

МЕТАУСТОЙЧИВЫЕ СТРУКТУРЫ УРАВНЕНИЯ КАНА-ХИЛЛАРДА

Рассматривается уравнение Кана-Хилларда

$$\begin{array}{l} u_t = (-\varepsilon^2 u_{xx} - u + u^3)_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0, \quad u_{xxx}(0,t) = 0, \quad u_{xxx}(\pi,t) = 0, \end{array} \tag{1}$$

где $\varepsilon^2 > 0$ - постоянная.

Уравнению Кана-Хилларда посвящено значительное число работ. В частности, согласно [1] уравнение (1) при малых ε^2 имеет медленно меняющиеся со временем решения – метаустойчивые структуры.

Рассмотрим галёркинскую аппроксимацию уравнения (1) в виде

$$u = z_0 + \sum_{k=1}^{N} z_k \cos kx. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1) и приравнивая затем коэффициенты при $\cos kx$, $k = 0, ..., N$, приходим к градиентной системе уравнений:

$$\dot{z}_0 = 0, \quad \dot{z}_k = -\frac{\partial G_N(z,\varepsilon)}{\partial z_k}, \quad k = 1, \dots, N, \tag{3}$$

где $z = (z_0, ..., z_N)$, а $G_N(z,\varepsilon)$ – потенциальная функция, представление которой опустим.

В градиентной системе (3) седло-узловые бифуркации порождают приближённые решения краевой задачи типа внутреннего переходного слоя. В свою очередь, приближённые решения типа внутреннего переходного слоя с двумя точками перехода приводят к метаустойчивым структурам. Экспериментально показан один из сценариев возникновения метаустойчивых структур. Для этого строился и проводился анализ иерархии упрощенных моделей уравнения (1) — галёркинских аппроксимаций (1) средних размерностей.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Alikakos N., Bates P., Fusco G.* Slow motion for the Cahn-Hilliard equation in one space dimension. Journal of Differential Equations. 1991. V. 90, p. 81–135.

Н. М. Полякова (Ростов-на-Дону, Россия)
zhuk_nata@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СЕДИМЕНТАЦИИ ПРИМЕСИ В ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ КАПЛЕ ЖИДКОСТИ

Построена и исследована математическая модель для испаряющейся капли биологической жидкости, содержащей взвешенную примесь. В качестве базовой модели выбрана модель седиментации примеси в двухслойной сплошной среде [1]. Рассмотрены асимптотические модели различного уровня сложности. Показано, что использование бездиссипативного приближения позволяет описать образование структур в испаряющейся капле [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части государственного задания № 1.5169.2017/БЧ Министерства образования и науки РФ, ЮФУ.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.* Математическое моделирование процесса седиментации примеси в потоке жидкости. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ. 2016.

2. *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В., Полякова Н. М.* Моделирование испаряющейся капли жидкости. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ. 2015.

С. С. Постнов (Москва, Россия)
postnov.sergey@inbox.ru

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ: ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА МОМЕНТОВ

В работе рассматривается система следующего вида:

$$ {}_0^C D_t^{\alpha} Q(x,t) = K \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t), \ \ (x,t) \in \Omega = [0,\infty) \times [0,L]. $$

Здесь $Q(x,t)$ – состояние, $u(x,t) \in L_p(\Omega)$ – распределённое управление, $1 < p < \infty$, ${}_0^C D_t^{\alpha}$ – оператор дробного дифференцирования в смысле Капуто [1], $\alpha \in (0,2]$, K – коэффициент. Начальное и граничные условия задаются в виде:

$$ Q(x,0+) = Q_0(x), x \in [0,L], $$

$$ \left[b_{1,2} \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + a_{1,2} Q(x,t) \right]_{x=0,L} = h_{1,2}(t) + u_{1,2}(t), t \geq 0, $$

где a_i и b_i, $i = 1,2$ – коэффициенты, $b_1 \leq 0$, $b_2 \geq 0$; $u_{1,2}(t) \in L_p[0,T]$ – граничные управления. Конечное состояние определяется условием:

$$ Q(x,T) = Q^*(x), \quad T > 0, x \in [0,L]. $$

В работе исследованы две постановки задачи оптимального управления: поиск управления с минимальной нормой при заданном времени управления и поиск управления, оптимального по быстродействию, при заданном ограничении (в виде неравенства) на норму управления [2-4]. Задача сведена к бесконечномерной l-проблеме моментов, для которой строится конечномерная аппроксимация.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, 2006.
2. *Кубышкин В. А., Постнов С. С.* Задача оптимального управления для линейных распределённых систем дробного порядка. Вестник РУДН, Сер. Математика, физика, информатика. 2014. №. 2, стр. 381–385.
3. *Kubyshkin V. A., Postnov S. S.* The optimal control problem for linear systems of non-integer order with lumped and distributed parameters. Discontinuity, Nonlinearity and Complexity. 2015. Vol. 4, № 4, p. 429–443.
4. *Кубышкин В. А., Постнов С. С.* Оптимальное по быстродействию граничное управление для систем, описываемых уравнением диффузии дробного порядка. Автоматика и телемеханика. 2018 (в печати).

Е. А. Постнова (Москва, Россия)
postnova@ipu.ru

О НОВЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВОЙНЫМ ИНТЕГРАТОРОМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

В работе проведено исследование поведения двойного интегратора дробного порядка, когда начальные и конечные условия имеют параметрический вид, т.е. задаются некоторыми функциями, зависящими от временного параметра T. Физически подобные задачи, если проводить аналогию с системами целого порядка, соответствуют задачам об управлении движения системы или смене типов движения. При этом формулируется задача оптимального управления как отыскания функции управления с минимальной нормой. Дополнительно исследовались зависимости нормы управления от значений показателей дробного дифференцирования и времени управления.

В работе рассматривалась система следующего вида:

$$\begin{cases} {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} q_1(t) = q_2(t) \\ {}_{t_0}^{C}D_t^{\beta} q_2(t) = u(t), \end{cases}$$

где $q_1(t)$ и $q_2(t)$ – фазовые координаты системы, зависящие от времени $t \in [t_0, T]$; $u(t)$ – искомая функция управления, заданная в пространстве $L_\infty[t_0, T]$; α и β – показатели дробного дифференцирования, принимают значения на интервале $(0, 1]$; оператор дробного дифференцирования D_t^{α} и D_t^{β} понимается в смысле Капуто. Случай, когда $u(t) \in L_2[t_0, T]$ был рассмотрен в более ранних работах.

При решении поставленной задачи на этапе отыскания минимального значения функции, когда $u(t) \in L_\infty[t_0, T]$, возникает трансцендентное уравнение, корни которого находятся графическим способом. В результате исследования в работе были получены аналитические решения поставленной задачи оптимального управления и проанализировано поведение нормы управления в зависимости от значений показателей дробного дифференцирования и времени управления. Показано, что в ряде случаев эти зависимости имеют немонотонный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, 2006.

2. *Кубышкин В. А., Постнов С. С.* Задача оптимального управления линейной стационарной системой дробного порядка: постановка и исследование. Автоматика и телемеханика. 2014. № 5, p. 3–17.

А. Р. Рустанов (Москва, Россия), С. В. Харитонова (Оренбург, Россия)
aligadzhi@yandex.ru, hcb@yandex.ru

КОНФОРМНО-ПЛОСКИЕ C_{10}-МНОГООБРАЗИЯ

Определение 1 [1]. *Почти контактная метрическая структура, характеризуемая тождеством* $\nabla_X(\Phi)Y = \xi\nabla_Y(\eta)\Phi X + \eta(Y)\nabla_{\Phi X}\xi$; $X, Y \in X(M)$. *называется* C_{10}*-структурой. Почти контактное метрическое многообразие, снабженное* C_{10}*-структурой называется* C_{10}*-многообразием.*

Теорема 1. *Ненулевые существенные компоненты тензора Вейля конформной кривизны* C_{10}*-многообразия на пространстве присоединенной* G*-структуры имеют вид:*

$$1) C_{0a0\hat{b}} = -F_{ac}F^{cb} - \tfrac{1}{2n-1}(A^{bc}_{ac} - F_{ac}F^{cb} - 2\delta^b_a F_{cd}F^{dc}) +$$
$$+\tfrac{1}{n(2n-1)}(A^{cd}_{cd} - F_{cd}F^{cd})\delta^b_a; \qquad 2) C_{abcd} = R_{abcd} = -F_{ab}F_{cd};$$
$$3) C_{ab\hat{c}\hat{d}} = \tfrac{1}{2n-1}\{(A^{dh}_{ah} - F_{ah}F^{hd})\delta^c_b + (A^{ch}_{bh} - F_{bh}F^{hc})\delta^d_a - (A^{ch}_{ah} -$$
$$F_{ah}F^{hc})\delta^d_b - (A^{dh}_{bh} - F_{bh}F^{hd})\delta^c_a\} + \tfrac{1}{n(2n-1)}(A^{hg}_{hg} - F_{hg}F^{gh})\delta^{cd}_{ab};$$
$$4) C_{\hat{a}bc\hat{d}} = -A^{bd}_{ac} + \tfrac{1}{2n-1}((A^{dh}_{ah} - F_{ah}F^{hd})\delta^b_c +$$
$$+(A^{bh}_{ch} - F_{ch}F^{hb})\delta^d_a) - \tfrac{1}{n(2n-1)}(A^{hg}_{hg} - F_{hg}F^{gh})\delta^d_a\delta^b_c.$$

Теорема 2. *Конформно-плоское* C_{10}*-многообразие является плоским косимплектическим многообразием.*

Теорема 3. *Конформно-плоское* C_{10}*-многообразие локально эквивалентно произведению плоского келерова многообразия на вещественную прямую.*

Теорема 4. *Конформно-плоское* C_{10}*-многообразие локально эквивалентно произведению комплексного евклидова пространства* C^n*, снабженного стандартной эрмитовой метрикой* $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle = ds^2$*, в каноническом атласе задаваемой соотношением* $ds^2 = \Sigma^n_{a=1} dz^a d\bar{z}^a$*, на вещественную прямую.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рустанов А. Р.* Тождества кривизны почти контактных метрических многообразий класса C_{10}. Преподаватель XXI век. 2010. №. 4, стр. 199-207.

2. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Издание второе дополненное. Одесса: «Печатный дом», 2013.

А. Ю. Савин (РУДН, Москва, РФ)
antonsavin@mail.ru

О ГОМОТОПИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Важную роль в решении проблемы индекса эллиптических операторов (И.М. Гельфанд) играет получение гомотопической классификации, т.е. вычисление группы стабильных гомотопических классов эллиптических операторов. Гомотопическая классификация была впервые получена на гладком замкнутом многообразии М.Атьёй и И.Зингером в терминах топологической K-группы кокасательного расслоения многообразия. Затем гомотопическая классификация была получена во многих других интересных ситуациях (на многообразиях с краем, на стратифицированных многообразиях, на многообразиях с углами и т.д.) многими авторами (см., напр., работы М. Атьи и Р. Ботта; Л. Буте де Монвеля; Р. Мельроуза; В.Е. Назайкинского, А.Ю. Савина и Б.Ю. Стернина).

Рассмотрим класс эллиптических задач, ассоциированных с действиями групп на многообразиях (см. работы А.Конна, А.Б. Антоневича, А.В. Лебедева и др.). В докладе будет рассказано, как получить гомотопическую классификацию эллиптических краевых задач, ассоциированных с действием дискретной группы на многообразии с краем. Мы показываем, что имеет место изоморфизм абелевых групп

$$\mathrm{Ell}(M, G) \simeq K_0(C_0(T^*M^\circ) \rtimes G),$$

где в левой части стоит группа стабильных гомотопических классов рассматриваемых эллиптических краевых задач, а в правой части — K-группа C^*-скрещенного произведения алгебры непрерывных функций на кокасательном расслоении внутренности M° многообразия с краем и группы G, действующей на этой алгебре автоморфизмами. Отметим, что последняя K-группа может быть вычислена в топологических терминах для многих групп G.

Результаты, которые будут представлены в докладе, получены в совместной работе с проф. Б.Ю. Стерниным. Работа поддержана Немецким научно-исследовательским обществом (DFG) и РФФИ, проекты №16-01-00373, 15-01-08392.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Савин А.Ю., Стернин Б.Ю.* Гомотопическая классификация эллиптических задач, ассоциированных с действиями дискретных групп на многообразиях с краем, Уфимск. матем. журн., 8:3 (2016), 126–134.

Л. И. Сербина (Ставрополь, Росссия)
lserbina@mail.com

ЗАДАЧА КОШИ СО СМЕШЕННЫМ НОСИТЕЛЕМ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

Важный класс краевых задач, к которым приводят проблемы наиболее полного описания общих закономерностей и особенностей нелинейных динамических процессов, составляют качественно новые, так называемые неклассические задачи математической физики. Особый интерес среди задач такого типа представляют локальные и нелокальные задачи для нагруженных уравнений,которые позволяют описывать явления и процессы в более широком диапазоне изменения физических параметров и потому обладают значительно большой емкостью информации об их нелинейных особенностях. В данной работе исследуются вопросы существования и единственности решения нелокальной краевой задачи для обобщенного нагруженного уравнения Буссинеска,моделирующего нелинейный процесс распространения однородной жидкости в пористых средах. Установлен критерий единственности ее решения.Доказано, что при выполнении этого критерия исследование вопроса однозначной разрешимости исследуемой краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения параболического типа эквивалентно сводится к вопросу исследования разрешимости задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сербина Л. И.* . Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук. 2014. Том. 16, №. 1, стр. 77–83.
2. *Нахушев А. М.* Нагруженные дифференциальные уравнения и их применение.М: Наука. 2012.

П. А. Сипайло (Москва, Россия)
sipaylo@gmail.com

О СЛЕДАХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ФУРЬЕ НА ПОДМНОГООБРАЗИЯХ

В данной работе изучаются следы на подмногообразиях интегральных операторов Фурье (ИОФ). Пусть $i\colon X \hookrightarrow M$ — гладкое вложение многообразий, и пусть Φ — оператор на M. *Следом* $i^!(\Phi)$ оператора Φ на X (см. [1,2]) называется оператор, определённый как композиция $i^!(\Phi) = i^*\,\Phi\,i_*$, где i^* и i_* — операторы ограничения и коограничения, отвечающие вложению i, соответственно. Оператор i^* функции на M сопоставляет её сужение на X, а оператор i_* функции на X сопоставляет распределение на M, сосредоточенное на X.

Мы изучаем условия, при которых операторы Φ и $i^!(\Phi)$ оба являются интегральными операторами Фурье.

Теорема 1. *Пусть ИОФ* $\Phi = \Phi(\Lambda)\colon H^s(M) \to H^{s-d}(M)$, $s - \nu/2 < 0$, $s - d > \nu/2$, $\nu = \operatorname{codim} X$, *ассоциирован с лагранжевым подмногообразием* $\Lambda \subset T^*(M \times M) \setminus \{0\}$, *и пусть выполнены условия*

1) *пересечение* $\Lambda|_{X\times X} = \Lambda \cap T(M \times M)|_{X\times X}$ *является чистым.*
2) *выполнено* $\Lambda \cap N^*(X \times X) = \emptyset$, *где* $N^*(X \times X)$ *— конормальное расслоение к подмногообразию* $X \times X \subset M \times M$.

Тогда $i^!(\Phi)$ *— ИОФ, ассоциированный с подмногообразием* $\pi(\Lambda|_{X\times X})$, *где* $\pi\colon T(M\times M)|_{X\times X} \to T(X \times X)$ *— проекция, индуцированная вложением* $i \times i\colon X \times X \hookrightarrow M \times M$.

Требование $\Lambda \cap N^*(X \times X) = \emptyset$ можно опустить в случае, если Λ имеет вид конормального расслоения к некоторому подмногообразию $S \hookrightarrow M \times M$.

Теорема 2. *Пусть ИОФ* $\Phi = \Phi(\Lambda)\colon H^s(M) \to H^{s-d}(M)$, $s - \nu/2 < 0$, $s - d > \nu/2$, $\nu = \operatorname{codim} X$, *порядка* $\operatorname{ord} \Phi < -\nu$ *ассоциирован с расслоением* $N^*S\setminus\{0\}$, $S \subset M \times M$, *и пусть пересечение* $S|_{X\times X} = S \cap X \times X$ *является чистым. Тогда* $i^!(\Phi)$ *есть ИОФ, ассоциированный с расслоением* $N^*(S|_{X\times X}) \setminus \{0\}$, $S|_{X\times X} \subset X \times X$.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-01-00373 А.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Новиков С. П., Стернин Б. Ю.* Следы эллиптических операторов на подмногообразиях и K-теория. Докл. АН СССР. 1966. Том 170, № 6, стр. 1265–1268.
2. *Новиков С. П., Стернин Б. Ю.* Эллиптические операторы и подмногообразия. Докл. АН СССР. 1966. Том 171, № 3, стр. 525–528.

С. М. Ситник (Белгород, Россия)
sitnik@bsu.edu.ru

ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДА ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ К ИНТЕГРАЛЬНЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЯМ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ В КОЭФФИЦИЕНТАХ

В докладе излагается метод операторов преобразования и приложения этого метода к интегральным представлениям решений дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах. Также рассматриваются многочисленные приложения операторов преобразования к дифференциальным уравнениям, теории функций и функциональном анализе, дробном исчислении, в задачах, связанных со специальными функциями и интегральными преобразованиями, приложениями к теории рассеяния и обратным задачам, томографии и преобразованию Радона, а также ряду других приложений.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Sitnik S. M.* Buschman–Erdélyi transmutations, classification and applications. Analytic Methods Of Analysis And Differential Equations: AMADE 2012 (Edited by M.V.Dubatovskaya, S.V.Rogosin). 2013. Cambridge Scientific Publishers, Cottenham, p. 171–201. (arXiv version http://arxiv.org/abs/1304.2114v1).

2. *Sitnik S. M.* Transmutations and Applications: a Survey. 2012. arXiv:1012.3741, 141 P.

3. *Sitnik S. M.* A short survey of recent results on Buschman–Erdelyi transmutations. Journal of Inequalities and Special Functions. (Special issue To honor Prof. Ivan Dimovski's contributions). 2017, Vol. 8, Issue 1, P. 140–157.

4. *Ситник С. М.* Обзор основных свойств операторов преобразования Бушмана–Эрдейи. Челябинский физико–математический журнал. 2016. Том 1, вып. 4. стр. 63–93.

5. *Катрахов В. В., Ситник С. М.* Композиционный метод построения B–эллиптических, B–гиперболических и B–параболических операторов преобразования. ДАН СССР. 1994. Том 337, № 3. стр. 307–311.

6. *Ситник С. М.* Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана–Эрдейи. ДАН СССР. 1991. Том 320, № 6. стр. 1326–1330.

7. *Sitnik S. M.* Buschman–Erdelyi Transmutations and applications. Abstracts of the 8th international conference "Transform Methods and Special Functions Bulgaria, Sofia, Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, 2017, P. 59.

М. А. Сумбатян, В. В. Абрамов
(ЮФУ, Ростов-на-Дону, Россия)
sumbat@math.sfedu.ru

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, СВЯЗЫВАЮЩЕЕ ФУНКЦИЮ ТОКА И ФУНКЦИЮ ЗАВИХРЕННОСТИ В ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ

Двумерное течение вязкой жидкости в бесконечном канале $-\infty < x < \infty,\ 0 \le y \le b$ сводится к нелинейной системе

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \nu\Delta\zeta, \qquad \zeta = \Delta\psi \tag{1}$$

относительно функции тока $\psi(x, y, t)$ и функции завихренности $\zeta(x, y, t)$. При $t = 0$ задаются начальные условия, а граничные условия

$$\psi|_{y=0} = 0, \quad \psi|_{y=b} = Q, \quad \left.\frac{\partial \psi}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial \psi}{\partial y}\right|_{y=b} = 0\,, \tag{2}$$

где $Q = \psi(x, b, t) - \psi(x, 0, t) \equiv \mathrm{const}$ – заданный расход.

Задача (1) содержит дифференциальные операторы второго порядка для ψ и ζ, однако все четыре граничных условия (2) заданы для функции ψ. Для преодоления этого препятствия применялись различные приемы, которые сложно назвать удовлетворительными.

В данной работе к уравнениям (1) применяются итерации по времени. На каждом шаге итераций получаются некоторые линейные неоднородные эллиптические задачи в прямоугольнике $(0, L) \times (0, b)$, $(L/b \gg 1)$, с периодическими условиями при $x = 0$ и $x = L$ для функций ψ и ζ, которые решаются в явном виде с использованием функций Грина. При этом граничные значения для функции ζ находятся из пары интегральных уравнений, $(x \in (0, L))$:

$$\int_0^L \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_{2m}^{2m+1} J_{2m}^{2m+1}(x-\tau)}{b\lambda_{2m}^{2m+1}} \left[\zeta_n(\tau, 0) \pm \zeta_n(\tau, b)\right] d\tau = f_{2m}^{2m+1}(x) \tag{3}$$

где $b_m = \pi m/b$, $\lambda_m = \sqrt{b_m^2 + 1/(\nu\theta)}$, θ – шаг по времени, верхние индексы относятся к нечетным компонентам, нижние - к четным, J_m – известные коэффициенты с достаточным для сходимости рядов убыванием.

Работа выполнена в рамках Госзадания Минобрнауки РФ, проект 9.5794.2017/БЧ.

Ю. А. Хазова (Симферополь, Россия)
hazova.yuliya@hotmail.com

ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ НА КРУГЕ

На круге рассматривается смешанная краевая задача для нелинейного параболического уравнения

$$u_t + u = D\triangle u + K(1 + \gamma \cos Qu), 0 < r < r_1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ t > 0,$$

с преобразованием отражение пространственной переменной

$$Qu(r, \varphi, t) = u(r, \pi - \varphi, t)$$

с условиями Неймана

$$\frac{\partial u(r_1, \varphi, t)}{\partial r} = 0,$$

периодичности

$$u(r, \varphi + 2\pi, t) = u(r, \varphi, t),$$

ограниченности по r в нуле

$$|u(0, \varphi, t)| \le c < \infty,$$

и начальным условием

$$u(r, \varphi, 0) = q_0(r, \varphi),$$

где $\triangle u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}$ — оператор Лапласа в полярной системе координат. Данная задача моделирует динамику фазовой модуляции $u(r, \varphi, t)$, $0 < r < r_1$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, $t > 0$ световой волны, прошедшей тонкий слой нелинейной среды керровского типа с преобразованием отражения координат в обратной связи. Здесь D — коэффициент диффузии нелинейной среды, положительный коэффициент K пропорционален интенсивности светового потока, γ — видность (контрастность) интерференционной картины, $0 < \gamma < 1$.

Используя метод Фурье была сформулирована и доказана лемма о собственных значениях и собственных функциях поставленной задачи. При помощи интегральных методов найдено асимптотическое представление решения параболического уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука. 1979.
2. *Шен И. Р.* Принципы нелинейной оптики. М.: Наука. 1989.

А. П. Чеголин (Ростов-на-Дону)
apchegolin@mail.ru

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ АНАЛОГОВ БЕССЕЛЕВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

В работе рассмотрен класс многомерных интегральных операторов, зависящих от параметра, с лоренцевой метрикой в ядрах. Эти ядра в случае положительного параметра, не превосходящего единицы, локально ведут себя так же, как ядра гиперболического потенциала Рисса, а на бесконечности экспоненциально убывают. Показано, что рассматриваемые операторы являются гиперболическими аналогами Бесселевых потенциалов. В некоторых ситуациях построено обращение рассматриваемых интегральных операторов как в классе «достаточно хороших» функций из класса Лизоркина, так и в пространстве p-суммируемых функций. Рассмотрены различные предельные случаи в классе рассматриваемых операторов.

Е. В. Ширяева, М. Ю. Жуков (Ростов-на-Дону, Россия)
evshiryaeva@mail.ru, myuzhukov@gmail.com

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В МОДЕЛИ СЕДИМЕНТАЦИИ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

На основе приближения кинематических волн для пространственно одномерных уравнений, описывающих седиментацию примеси в потоке жидкости, построена простейшая модель, позволяющая исследовать морфологию дна водоема. Основная идея кинематического приближения заключается в пренебрежении в уравнениях движения инерционными членами, что позволяет определить скорость течения при помощи алгебраических соотношений. В результате асимптотических упрощений, тиках как тонкий слой осадочный примеси, пренебрежимо малая скорость седиментации и т.д., удается построить простейшую модель, представляющую собой гиперболический закон сохранения. Оказалось, что даже такое грубое приближение позволяет описывать тонкие эффекты поведения дна водоема, в частности, возникновение в результате седиментации ударных волн на указанной границе, момент их возникновения и пространственно временную эволюцию волн. Анализ исходных уравнений, представляющих собой двухслойную модель жидкости, показал, что в зависимости от предположений о поведении границ слоев возможно построение различных асимптотических моделей [1]. Приведены результаты о поведении ударных волн и результаты сравнительного анализа асимптотических моделей.

Работа выполнено при финансовой поддержке базовой части государственного задания № 1.5169.2017/БЧ Министерства образования и науки РФ, ЮФУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.* Математическое моделирование процесса седиментации примеси в потоке жидкости. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ. 2016.

Session IV

Hausdorff Operators and Related Topics

R. A. Bandaliyev (Baku, Azerbaijan)
bandalievr@rambler.ru

HAUSDORFF OPERATOR IN VARIABLE LEBESGUE SPACES

In this talk, we will discuss the boundedness of the Hausdorff operator in variable Lebesgue spaces. In particular, we found some criteria on the kernel of Hausdorff operator for the boundedness of the Hausdorff operator in variable Lebesgue spaces.

This is joint work with Przemysław Górka.

The research of R. A. Bandaliyev was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (Agreement number: 02.a03.21.0008).

E. Liflyand (Ramat-Gan, Israel)
liflyand@gmail.com

HAUSDORFF OPERATORS IN H^p SPACES, $0 < p < 1$

For the theory of Hardy spaces H^p, $0 < p < 1$, the Hausdorff operators turn out to be a very effective testing area, in dimension one and especially in several dimensions. After publication of [4], Hausdorff operators have attracted much attention. A general idea can be had of the subject from the surveys [3] and [1]. In contrast to the study of the Hausdorff operators in L^p, $1 \leq p \leq \infty$, and in the Hardy space H^1, the study of these operators in the Hardy spaces H^p with $p < 1$ holds a specific place and there are very few results on this topic. For the case of one dimension, after [2] and [7], more or less final results were given in [5]. The results differ from those for L^p, $1 \leq p \leq \infty$, and H^1, since they involve smoothness conditions on the averaging function, which seem unusual but unavoidable. To explain them will be the main purpose of the talk. This leads to better understanding even more specific difficulties in our multidimensional joint work with Akihiko Miyachi [6].

REFERENCES

1. *Chen J., Fan D. and Wang S.* Hausdorff Operators on Euclidean Spaces. Appl. Math. J. Chinese Univ. (Ser. B) (4). 2014. Vol. 28, pp. 548–564.
2. *Kanjin Y.* The Hausdorff operators on the real Hardy spaces $H^p(\mathbb{R})$. Studia Math. 2001. Vol. 148, pp. 37–45.
3. *Liflyand E.* Hausdorff Operators on Hardy Spaces. Eurasian Math. J. 2013. Vol. 4, No. 4, pp. 101–141.
4. *Liflyand E. and Móricz F.* The Hausdorff operator is bounded on the real Hardy space $H^1(\mathbb{R})$. Proc. Amer. Math. Soc. 2000. Vol. 128, pp. 1391–1396.
5. *Liflyand E. and Miyachi A.* Boundedness of the Hausdorff operators in H^p spaces, $0 < p < 1$. Studia Math. 2009. Vol. 194, pp. 279–292.
6. *Liflyand E. and Miyachi A.* Boundedness of the multidimensional Hausdorff operators in H^p spaces, $0 < p < 1$. To appear in Trans. Amer. Math. Soc.
7. *Miyachi A.* Boundedness of the Cesàro operator in Hardy spaces. J. Fourier Anal. Appl. 2004. Vol. 10, pp. 83–92.

С. С. Волосивец (Саратов, Россия)
VolosivetsSS@mail.ru

ВЕСОВЫЕ ОПЕРАТОРЫ ХАРДИ И ЧЕЗАРО В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть $\varphi : [0,1) \to [0,\infty)$ измерима и $\kappa_p(\varphi) = \int_0^1 t^{-1/p}\varphi(t)\,dt$, $p \in [1,\infty]$. Для измеримой комплекснозначной функции f на $\mathbb{R}$ определим весовые операторы операторы Харди и Чезаро $\mathcal{H}_\varphi(f)(x) = \int_0^1 t^{-1}f(t^{-1}x)\varphi(t)\,dt$, $\mathcal{B}_\varphi(f)(x) = \int_0^1 f(xt)\varphi(t)\,dt$, $x \neq 0$.

Если $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, т.е. $f \in L(I)$ для любого $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, то по определению $f_I = |I|^{-1}\int_I f(t)\,dt$ и $\|f\|_{*\delta} = \sup\limits_{|I|\le\delta} |f - f_I|_I$. Рассмотрим два подпространства $BMO(\mathbb{R})$: $VMO(\mathbb{R}) = \{f \in BMO(\mathbb{R}) : \lim_{\delta\to 0}\|f\|_{*,\delta} = 0\}$ и $bmo(\mathbb{R}) = \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) : \|f\|_{bmo} := \sup\limits_{|I|\le 1}|f - f_I|_I + \sup\limits_{|I|\ge 1}|f|_I < \infty\}$. Для пространств $X(\mathbb{R})$, где $X = L^p$, $1 \le p < \infty$, VMO, можно ввести модуль гладкости порядка $k \in \mathbb{N}$: $\omega_k(f,\delta)_X = \sup\limits_{0<h\le\delta} \|\sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}f(\cdot + ih)\|_X$. По определению, $H^{\omega,k}_X(\mathbb{R}) = \{f \in X(\mathbb{R}) : \omega_k(f,\delta)_X \le C\omega(\delta), \delta \in [0,1]\}$, $\omega \uparrow$, $\omega(0) = 0$, $\omega \in C[0,1]$. Пусть также $H^1(\mathbb{R})$ — пространство Харди (см. [1, гл. 2]. Там же в главе 6 можно узнать про $BMO(\mathbb{R})$ и $VMO(\mathbb{R})$.

Теорема 1. 1) *Пусть $\kappa_\infty(\varphi) < \infty$. Тогда $\mathcal{B}_\varphi$ ограничен в $VMO(\mathbb{R})$.*

2) *Пусть $\kappa_1(\varphi) < \infty$. Тогда $\mathcal{B}_\varphi$ ограничен в $bmo(\mathbb{R})$.*

Теорема 2. 1) *Пусть $X(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, и $\kappa_p(\varphi) < \infty$. Если $f \in H^{\omega,k}_X(\mathbb{R})$ и $\omega \in B_k$, то $\mathcal{B}_\varphi(f) \in H^{\omega,k}_X(\mathbb{R})$.*

2) *Пусть $X(\mathbb{R}) = VMO(\mathbb{R})$ и $\kappa_\infty(\varphi) < \infty$. Если $f \in H^{\omega,k}_X(\mathbb{R})$ и $\omega \in B_k$, то $\mathcal{B}_\varphi(f) \in H^{\omega,k}_X(\mathbb{R})$.*

Здесь B_k — класс Бари-Стечкина (см. [1]). Далее пусть $X_e(\mathbb{R})$ — подпространство четных функций из $X(\mathbb{R})$.

Теорема 3. 1) *Пусть $\kappa_1(\varphi) < \infty$. Тогда $\mathcal{B}_\varphi$ ограничен из $H^1_e(\mathbb{R})$ в $L^1_e(\mathbb{R})$.*

2) *Пусть $\kappa_1(\varphi) < \infty$. Тогда оператор $\mathcal{H}_\varphi$ is ограничен из $BMO_e(\mathbb{R})$ в $L^\infty_e(\mathbb{R})$.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. "Мир". 1984.

2. *Бари Н. К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. Тр. Моск. мат. об-ва. 1956. Том. 5, стр. 483–522.

А. Ф. Чувенков
(Ростов-на-Дону, Россия)
chuvenkovaf@mail.ru

О НОВОМ ГРАНД–ПРОСТРАНСТВЕ ОРЛИЧА, ПОРОЖДЕННОМ СТЕПЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Вводимые гранд-пространства (в частности, $L^a_{M),s}(\Omega,\omega)$) строятся на основе весовых пространств Орлича $L_M(\Omega,\omega)$, порожденных N-функциями $M(u)$, имеющих различные скорости убывания в нуле (p_1) и роста в бесконечности (p_2).

Предполагаем, что выполняются ограничения $1 < p_1 < \infty$, $1 < p_2 < \infty$, $p = \min\{p_1, p_2\}$. Для любого положительного веса $a(x)$ из пространства $L_M(\Omega,\omega)$ определяем новый (дополнительный) вес формулой

$$\omega_\delta(x) \equiv \omega_\delta(a, M) = (p\delta)^{\frac{1}{p}} M^\delta(a(x)) \cdot \omega(x), \quad 0 < \delta < 1 - 1/p.$$

Через $L^a_{M),s}(\Omega,\omega)$ обозначаем гранд-пространство Орлича с весом $\omega_\delta(x)$:

$$\left\{ f : \ \rho_{a,s}(f, M, \omega) = \left(\int\limits_0^{\delta_0} \left[\int\limits_\Omega M^{1-\delta}(|f(x)|)\omega_\delta(a, M)dx \right]^{\frac{s}{1-\delta}} d\delta \right)^{\frac{1}{\delta}} < \infty \right\},$$

где $f \in L_M(\Omega,\omega)$, $s \in [1,\infty]$, $\delta_0 \in (0, 1-1/p)$. В случае, когда $M(u) = \frac{u^p}{p}$, $1 < p < \infty$, $s = \infty$, имеем гранд-пространство Лебега $L_{p)}(\Omega)$ функций, заданных на ограниченных множествах Ω ([2]), и на неограниченных – $L^a_{p)}(\Omega)$ ([3]).

Теорема. *Пусть функция f принадлежит пространству Орлича $L_M(\Omega,\omega)$, $1 < p = \min\{p_0, p_\infty\} < \infty$, a – положительный вес. Для верной оценки*

$$\rho_{a,s}(f, M, \omega) \le C_{p,a}\rho(f, M, \omega),$$

с точной константой $C_{p,a}$, необходимо и достаточно, чтобы $a \in L_M(\Omega,\omega)$.

Сообщаются первоначальные основные свойства введенного гранд-пространства.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Iwaniec T., Sbordone C.* On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses. // Arch. Rational Mech. Anal., 1992. № 119. C. 129–143.

2. *Умархаджиев С. М.* Обобщение понятия гранд–пространства Лебега. Известия вузов. Математика, 2014,№ 4, с. 42-51.

Session V

Probability-Analytical Models and Methods

Ya. I. Belopolskaya (St.Petersburg, Country)
yana@yb1569.spb.edu

STOCHASTIC MODELS FOR SYSTEMS OF NONLINEAR PARABOLIC EQUATIONS

We consider two types of the Cauchy problem for systems of nonlinear second order parabolic equations which admit probabilistic interpretation, namely, the forward Cauchy problem and the backward Cauchy problem. We are interested in generalized solutions of the forward Cauchy problem for systems with fully nondiagonal second order terms (systems with cross-diffusion) as well as classical, generalized and viscosity solutions of the backward Cauchy problem for systems with diagonal second order terms with different coefficients and nondiagonal first and/or zero order terms. We construct stochastic representations for generalised solutions of the forward Cauchy problem solutions in terms of diffusion processes and their multiplicative functionals [1],[2].

On the other hand we consider backward Cauchy problem for systems with diagonal principal part with equal coefficients of the second order terms and nondiagonal first and zero order terms. We reduce the construction of a generalised solution of the backward Cauchy problem for a PDE system of this type to the correspondent stochastic problem. Namely, without appealing to the correspondent nonlinear PDE solution we derive a closed stochastic problem solve it and finally state conditions on the stochastic problem data that allow to verify that solving the stochastic problem we construct a required generalised solution to the original PDE problem [3].

Financial support of the RNF Grant 17-11-01136 is greatfully acknowledged.

R E F E R E N C E S

1. *Belopolskaya Ya. I.* Probabilistic models of the dynamics of the growth of cells under contact inhibition. Mathematical Notes. 2017. Vol. 101, No. 3, pp. 346–358.

2. *Belopolskaaya Ya. I.* Probabilistic representation of the Cauchy problem solutions for systems of nonlinear parabolic equations Global and Stochastic Analysis. 2016. Vol. 3, No. 1, pp. 25–32.

3. *Belopolskaaya Ya., Woyczynski W.* Generalized solution of the Cauchy problem for systems of nonlinear parabolic equations and diffusion processes. Stochastics and dynamics. 2012. Vol. 11, No. 1 pp. 1–31.

A. D. Bendikov (Poland, Russia)
Alexander.Bendikov@math.uni.wroc.pl

HEAT KERNELS ON ULTRAMETRIC SPACES

Let (X, d) be a locally compact separable ultrametric space. Given a measure m and a symmetric measurable function $J(x, y)$ we study the heat kernel (the fundamental solution of the heat equation) associated with the operator

$$L^J f(x) = \int \left(f(x) - f(y)\right) J(x, y) dm(y).$$

We provide a number of examples illustrating our exposition.

The research was supported by the National Center of Sciences, POLAND, 2015/17/ST 1/00062

O. E. Kudryavtsev (Rostov-on-Don, Russia)
koer@donrta.ru

NUMERICAL METHODS FOR PRICING OPTIONS UNDER REGIME SWITCHING LÉVY MODELS

In recent years, increasing attention has been given to stochastic models of financial markets which depart from the traditional Black-Scholes model. Regime switching Lévy models have already enjoyed much success in interpreting the behavior of financial series. A Lévy process is used as the instrument that models the financial market, where the parameters of the Lévy process are allowed to depend on a continuous time Markov chain. The state space may represent general financial market trends and/or other economic factors which are usually called as "regimes".

The papers [1,2] generalized the framework of numerical Wiener-Hopf factorization (WHF) method [3] and extended it to pricing barrier and American options under regime switching Lévy models. In the present paper, we introduce an enhanced WHF-method for pricing lookback options in regime switching Lèvy models. The method developed is based on the numerical Laplace transform inversion and enhanced approximate Wiener-Hopf factorization formulas derived in [4].

The idea behind our approach is to transform the problem to a space where the solution can be obtained by using the Fast Wiener-Hopf factorization method at real positive values of the transform parameter specified by the Gaver-Stehfest algorithm. Then the lookback option prices are recovered via the numerical inversion formula. The reported study was funded by RFBR according to the project No. 18-01-00910 A.

R E F E R E N C E S

1. *Кудрявцев О. Е.* Быстрый и эффективный метод оценивания барьерных опционов в моделях Леви с переключением режимов по параметрам процесса. Научно-технические ведомости СПбГПУ. Серия "Информатика. Телекоммуникации. Управление". 2010. Т. 93, № 1, С. 136-–141.

2.*Кудрявцев О. Е.* Эффективный численный метод оценивания американских опционов в моделях Леви с переключением режимов по параметрам процесса. Вестник РГУПС. 2010. Т. 39, № 3, С. 158–167.

3. *Kudryavtsev O., Levendorskiǐ S.* Fast and accurate pricing of barrier options under Lévy processes. Finance and Stochastics. 2009. Vol. 13, No. 4, pp. 531–562.

4. *Kudryavtsev O.* Advantages of the Laplace transform approach in pricing first touch digital options in Lévy-driven models. Boletin de la Sociedad Matema-tica Mexicana. 2016. Vol. 22, No. 2, pp. 711–731.

V. Rodochenko, O. Kudryavtsev (Rostov-on-Don, Russia)
vrodochenko@gmail.com, okudr@mail.ru

ON MODEL CALIBRATION TECHNIQUES FOR CRYPTOCURRENCY MARKETS

The analysis of cryptocurrencies was one of the most attractive topics for researchers in finance for the past year. Although the capitalization of this market has a tendency to grow, the market still experiences a shortage in methods of evaluating risks. Existence and development of such methods will likely lead to wider and more reliable options and futures trading, therefore stabilizing the price and offering better investment opportunities.

Using the market data we obtained from a number of most popular stock platforms and informational resources, and following the methods in [1, 2], we analyzed the most widely used cryptocurrencies, namely bitcoin and etherium. We've also included ripple as an example of a "low friction" currency with relatively fast transactions and relatively low price.

We calibrate gaussian, Merton [3], Heston [4] and Bates [5] model parameters to choose the one that adequately reflects assets behaviour and demonstrate that jumps models [3] are likely to be the most natural approximation for this class of assets.

The research was supported by RFBR grant (project 18-01-00910).

REFERENCES

1. *Кудрявцев О. Е., Гречко А. С., Родоченко В. В.,* Адекватное моделирование российского срочного рынка. Наука и образование: хозяйство и экономика; предпринимательство; право и управление. 2015. Том. 6, №. 61, стр. 63–67.

2. *Кудрявцев О. Е., Гречко А. С., Родоченко В. В.,* Математические методы анализа и управления рисками срочного рынка. LAP LAMBERT Academic Publishing. 2018.

3. *Cont R., Tankov P.* Financial modelling with jump processes. Chapman & Hall/CRC Press. 2004.

4. *Heston, S. L.* A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. Review of Financial Studies. 1993. Vol. 6. pp. 327–344.

5. *Bates, D. S.*. Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutshe Mark Options. Review of Financial Studies. 1996. Vol. 9. pp. 69–107.

D. B. Rokhlin (Southern Federal University, Russia)
rokhlin@math.rsu.ru

REINFORCEMENT LEARNING IN DISCOUNTED STOCHASTIC STACKELBERG GAME

We consider a game between a leader and a follower, whose actions affect the stochastic state dynamics. Let $\mathbb{X}$ be a finite state space. Denote by A and B the sets of admissible actions of the leader and the follower. Assume that the system evolution is described by the transition kernel $p(y|x,a,b)$:

$$\sum_{y\in\mathbb{X}} p(y|x,a,b)=1, \qquad p(y|x,a,b)\geq 0.$$

At each stage of the game

(i) observing the state $X_t \in \mathbb{X}$, the leader selects an action $a_t \in A$,

(ii) observing the state $X_t \in \mathbb{X}$ and the leader action $a_t \in A$, the follower selects an action $b_t \in A$,

(iii) the system moves to the state X_{t+1} with probability

$$p(X_{t+1}|X_t, a_t, b_t),$$

(iv) the leader and the follower get the rewards

$$r_1(X_t, a_t, b_t, X_{t+1}), \quad r_2(X_t, a_t, b_t, X_{t+1})$$

respectively.

Each player tries to maximize his discounted gain, and applies the Q-learning algorithm, where the actions are chosen according to the Boltzmann distribution. So, at each stage of the game the leader selects an action a' with probability

$$\frac{\exp(Q_1(x, a')/\tau_1)}{\sum_{a'' \in A} \exp(Q_1(x, a'')/\tau_1)}, \quad a' \in A,$$

and the follower selects an action b' with probability

$$\frac{\exp(Q_2(x, a, b')/\tau_2)}{\sum_{b'' \in B} \exp(Q_2(x, a, b'')/\tau_2)}, \quad b' \in B.$$

For $t \to \infty$ we describe the limiting distributions of the Q-functions Q_1, Q_2 and actions of the players in terms of fully observed Markov processes.

V. N. Rusev, A. V. Skorikov (Gubkin University, Moscow, Russia)
rusev.v@gubkin.ru, skorikov.a@gubkin.ru

ANALYTICAL AND DISCRETE APPROACHES TO RENEWAL FUNCTION ESTIMATIONS

Функция восстановления $H(t)$ определяется как среднее количество отказов системы (или элемента) на интервале времени $(0,\ t)$. Этот параметр используется для построения системы менеджмента надежности, определения оптимального плана профилактического обслуживания или замен. В качестве модели рассматривается рекуррентный поток отказов, для которого указанная связь выражается интегральным уравнением восстановления, связывающим функцию восстановления $H(t)$ и функцию распределения $F(t)$ времени между отказами:

$$H(t) = F(t) + \int_0^t H(\tau) f(t - \tau)\, d\tau.$$

Решение в замкнутой форме этого уравнения невозможно, кроме некоторых случаев, когда поток восстановлений управляется экспоненциальным или эрланговским распределениями. Используя методы работы [1], найдены аналитические и численные аппроксимации функции восстановления.

Для аналитической аппроксимации функции восстановления используется нахождения оригинала преобразования Лапласа $\tilde{H}(s)$ с помощью производящей функции моментов плотности распределения Вейбулла-Гнеденко.

Для нахождения численного решениия $H(t),\ t > 0$ рассматриваются три способа дискретизации уравнения восстановления.

1. Решение ищется в виде суммы кусочно-постоянных функций равных на каждом отрезке разбиения значению искомого решения в правой точке разбиения (метод правых узлов).

2. Полагается значение решения на каждом отрезке разбиения равное среднему значению (метод средних).

3. На каждом отрезке разбиения рассматривается приближение точного решения линейной функцией.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rusev V., Skorikov A.* On solution of renewal equation in the Weibull model. Reliability: Theory & Applications. - 2017.- Vol. 12, No. 4(47), p.60–67.

E. L. Shishkina (Voronezh, Russia)
your@email.com

SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR GENERALIZED EULER–POISSON–DARBOUX EQUATION

We apply Hankel transform method to solve the initial value problem

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]u=c^2u, \tag{1}$$

$$u(x,0;k)=f(x), \tag{2}$$

$$u_t(x,0;k)=0,\quad u=u(x,t;k),\ \gamma_i>0,\ x_i>0,\ i=1,...,n,\ t>0.$$

We will call (1) the **generalized Euler–Poisson–Darboux equation**. We obtain the distributional solution of (1)–(2) in convenient space. Besides, we give formulas for regular solution of (1)–(2) in particular case of k and of Cauchy the the singular Klein–Gordon equation.

Theorem 1. *The solution $u\in S'_{ev}(R^n_+)\times C^2(0,\infty)$ of the (1)–(2) for $k\geq 0$ is unique and defined by the formula*

$$u(x,t;k)=C(n,\gamma,k)\times$$

$$\times\left(t^{1-k}(t^2-|x|^2)_+^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}\, j_{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}\left((t^2-|x|^2)_+^{\frac{1}{2}}\cdot c\right)*f(x)\right)_\gamma,$$

where

$$C(n,\gamma,k)=\frac{2^n\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-n-|\gamma|+1}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}.$$

Definitions of the $S'_{ev}(R^n_+)$, j_ν, $(\cdot*\cdot)_\gamma$ can be found in [1].

REFERENCES

1. *Shishkina E. L.* Generalized Euler–Poisson–Darboux equation and singular Klein–Gordon equation. Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 973, pp. 1–21.

А. С. Асылгареев (Уфа, Россия)
asylgareevarthur@gmail.com

О ТЕОРЕМАХ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО МНОГОМЕРНОГО ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрим два стохастических дифференциальных уравнения (далее — СДУ) с интегралами Стратоновича относительно n-мерного винеровского процесса:

$$d\xi_i^{(n)}(t)=\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^{(n)}\left(t,\xi_i^{(n)}(t)\right)*dW_t^{(j)}+b_i^{(n)}\left(t,\xi_i^{(n)}(t)\right)dt, \tag{1}$$

с начальными условиями $\xi_i^{(n)}(t)|_{t=0}=\xi_i^{(n)}(0)$, $i=1,2$. Для непрерывных функций $\sigma_{ij}^{(n)}(t,v)$, $b_i^{(n)}(t,v)$ при всех $t\geqslant 0$, $v\in R$, $j=1,\ldots,n$, $i=1,2$, полагаются выполнеными достаточные условия существования и единственности решений уравнений (1).

Цель данного исследования заключается в распространении подхода к доказательству теорем сравнения, предложенного в работе [1], на СДУ вида (1). Применяемый в работе метод основан на том, что если для всех $t\geqslant 0$, $v\in R$, $j=1,\ldots,n$, $i=1,2$, функции $\sigma_{ij}^{(n)}(t,v)$ являются локально суммируемыми по v, то решения уравнений (1) можно представить в виде

$$\xi_i^{(n)}(t)=\widehat{D}_i^{(n)}\left(t,W_t^{(n)}+D_i^{(n-1)}(t,\overline{W}_t^{(n-1)})\right),$$

где функции $\widehat{D}_i^{(n)}(t,v)$ являются детерминированными, а функции $\xi_i^{(n-1)}(t)=D_i^{(n-1)}(t,\overline{W}_t^{(n-1)})$ есть решения СДУ с интегралами Стратоновича относительно $(n-1)$-мерного винеровского процесса, коэффициенты которых выражаются через коэффициенты СДУ (1).

Теорема 1. *Пусть для всех* $t \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, n$ *справедливы неравенства*
(a) $\sigma_{2j}^{(j)}(t, v) > 0$ *при всех* $v \in R$,
(b) $\widehat{D}_2^{(j)}(t, u) \geqslant \widehat{D}_1^{(j)}(t, u)$ *для всех* $u \in R$,
(c) $D_2^{(0)}(t) \geqslant D_1^{(0)}(t)$ *с вероятностью 1.*
Тогда $\xi_2^{(n)} \geqslant \xi_1^{(n)}$ *для всех* $t \geqslant 0$ *п.н.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асылгареев А. С., Насыров Ф. С.* О теоремах сравнения и устойчивости с вероятностью 1 одномерных стохастических дифференциальных уравнений. СМЖ. 2016. Том. 57, №. 5, стр. 969–977.

Т. А. Волосатова, А. Г. Данекянц (Ростов-на-Дону, Россия)
kulikta@mail.ru, dangegik@mail.ru

НАХОЖДЕНИЕ ЭКСТРЕМУМОВ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ С ЗАВИСИМЫМИ ПРИОРИТЕТАМИ. ЧАСТЬ I [1]

Данный доклад является продолжением работ [1-2], в которых были исследованы различные модели экономической системы с конечным числом приоритетов в том случае, когда целевая функция воспроизводит разнонаправленные требования. Основные обозначения, используемые в докладе, соответствуют обозначениям, предложенным Павловым И.В, и Угличем С.И. в тезисах данной конференции. В настоящей работе рассматривается оптимизационная задача с целевой функцией $F = E\left[F_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2}\right]$, где α_i – зависимые с.в., называемые приоритетами: $P(0 \leq \alpha_j \leq 1) = 1$, где $j = 1, 2$. будем считать, что всегда $F_j^0(x) = 1$. Тривиальная ситуация, когда $a_j(\omega) = 0, \forall \omega \in \Omega$, нами не рассматривается. Введем следующие обозначения:$A_{ij} = \{\alpha_1 = i\} \cap \{\alpha_2 = j\}$, $A_{2j} = \{0 < \alpha_1 < 1\} \cap \{\alpha_2 = j\}$, $A_{i2} = \{\alpha_1 = i\} \cap \{0 < \alpha_2 < 1\}$, где $i, j = 0, 1$; $P(A_{ij}) = p_{ij}, \forall i, j = 0, 1, 2$. В силу теоремы 1 естественно рассматривать только те модели, в которых множество стационарных точек непусто.

Теорема 1. *Для того, чтобы целевая функция F(x), имела стационарные точки в области своей положительности, необходимо выполнение условий: 1)* $\frac{a_2}{a_1} = -c_1$, *где* $c_1 > 0$; *2) существует точка x:* $\frac{E\left[\alpha_1 F_1^{\alpha_1 - 1} F_2^{\alpha_2}\right]}{E\left[\alpha_2 F_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2 - 1}\right]} = c_1$.

Для целевой функции, представленной (в соответствие с обозначениями работы [2]) в виде $F(u_1) = E\left[u_1^{\alpha_1}(-c_1 u_1 + c_2)^{\alpha_2}\right]$, получены критерии существования и единственности локального (глобального) максимума в различных случаях расстановки приоритетов α_i. Подробное изложение полученных критериев приведено авторами во второй части тезисов данной конференции.

ЛИТЕРАТУРА

1.*Волосатова Т. А., Данекянц А. Г.* Оптимизация квазилинейных сложных систем: случай трех детерминированных приоритетов. Междунар. науч.-исслед. журн., 2016, № 10 (52), стр. 127–132.

[1] Данная работа поддержана РФФИ (грант 16-01-00184).

2. *Павлов И. В., Углич С. И.* Оптимизация сложных систем квазилинейного типа с несколькими независимыми приоритетами. Вестник РГУПС. 2017. N 3(67), стр. 140–145.

Т. А. Волосатова, А. Г. Данекянц (Ростов-на-Дону, Россия)
kulikta@mail.ru, dangegik@mail.ru

НАХОЖДЕНИЕ ЭКСТРЕМУМОВ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ С ЗАВИСИМЫМИ ПРИОРИТЕТАМИ. ЧАСТЬ II [1]

Настоящий доклад является продожением исследований специальных целевых функций и их точек экстремумов, представленных авторами в первой части тезисов данной конференции. Пусть выполнены необходимые условия существования стационарных точек целевой функции F(x) (Т 1,часть I). В нижеприведенной таблице рассмотрены различные случаи расстановки зависимых приоритетов в целевой функции F(u) и сформулированы критерии существования и единственности максимума F(u).

Ω			
$p_{22} > 0$	$p_{22} = 0$		
Существует единственный локальный (глобальный) максимум функции $F(U_1)$	$p_{20} + p_{21} > 0$ и $p_{02} + p_{12} > 0$. Существует единственный локальный (глобальный) максимум функции $F(U_1)$	$p_{20} + p_{21} = 0$ и $p_{02} + p_{12} = 0$. $F(U_1)$ имеет единств. лок. (глоб.) максимум $u_1 \in \left(0; \frac{c_2}{c_1}\right) \Leftrightarrow$ $p_{11} > 0$ и $\lvert \frac{p_{10}}{p_{11}} - c_1 \frac{p_{01}}{p_{11}} \rvert < c_2$	$p_{20} + p_{21} = 0$ и $p_{02} + p_{12} > 0$. $F(U_1)$ имеет единств. лок. (глоб.) максимум $u_1 \in \left(0; \frac{c_2}{c_1}\right) \Leftrightarrow$ $p_{10} + p_{11}c_2 - c_1p_{01} - c_1E\left[\alpha_2 c_2^{\alpha_2 - 1} I_{A_{02}}\right] + E\left[c_2^{\alpha_2} I_{A_{12}}\right] > 0$

Отметим, что в случае, когда приоритеты независимы, условия критериев совпадают с условиями, полученными Красий Н.П. в работе [2]. Если $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, то результаты исследований полностью совпадают с результатами, опубликованными в работе [3].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1.*Волосатова Т. А., Данекянц А. Г.* Моделирование квазилинейных сложных систем: случай трех приоритетов вероятностного характера с единичной суммой. Теория вероят. и ее примен., 2017, № 4(62), стр. 807.

2.*Красий Н. П.* Оптимизация квазилинейных моделей системс двумя структурами и независимыми приоритетами. Междунар. науч.-исслед. журн., 2016, № 11 (53), стр. 161-165.

3.*Вагин В. С.,Павлов И. В.* Моделирование и оптимизация квазилинейных сложных систем с учетом вероятностного характера приоритетов. Вестник РГУПС. 2016. N 1(61), стр. 135-139.

Гликлих Ю. Е., Щичко Т. А (Воронеж, Россия)
yeg@math.vsu.ru

ПОЛНОТА СТОХАСТИЧЕСКИХ ПОТОКОВ, ПОРОЖДЕННЫХ УРАВНЕНИЕМ С ПРОИЗВОДНЫМИ В СРЕДНЕМ СПРАВА

Используеиые обозначения и определения основных объектов введены в [1,2]. Мы всюду используем соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющемся верхнему и нижнему индексу.

[1] Данная работа поддержана РФФИ (грант 16-01-00184).

Исследуются стохастические уравнения с производными в среднем справа вида

$$\begin{cases} D\xi(t) = a(t, \xi(t)) \\ D_2\xi(t) = \alpha(t, \xi(t)) \end{cases} \tag{1}$$

где D – производная в среднем справа, $D_2 l$ – квадратичная производная в среднем, $a(t,x)$ – векторное поле на $\mathbb{R}^n$, $\alpha(t,x)$ – симметрическое положительно определенное $(2,0)$-тензорное поле на $\mathbb{R}^n$. Обозначим координаты в $\mathbb{R}^n$ символами x^i, тогда $a(t,x) = a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ и $\alpha(t,x) = \alpha^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}$. Дифференциальный оператор $\mathcal{A} = a(t,x) = a^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \alpha^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}$ является генератором потока, заданного уравнением (1). Обозначим его $\xi(s)$, а через $\xi_{t,x}(s)$ – его орбиту, которая имеет начальное условие $\xi_{t,x}(t) = x$.

Определение 1. *Говорят, что поток $\xi(s)$ непрерывен на бесконечности, если на любом отрезке $[0,T] \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение*

$$\lim_{x\to\infty} P(\xi_{t,x}(T) \in K) = 0,$$

где K -произвольный компакт в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим на $\mathbb{R}^{n+1}$ дифференциальный оператор $\mathcal{A}^{n+1} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{A}$, где t считается координатой с номером 0.

Теорема 1. *Пусть поток $\xi(s)$ непрерывен на бесконечности. Он полон тогда и только тогда, когда на $\mathbb{R}^{n+1}$ имеется собственное отображение $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, принимающее положительные значения и такое, что при всех t и x выполняется неравенство $|\mathcal{A}^{n+1}\varphi| < C$, где $C > 0$ – константа, не зависящая от t и x.*

Исследование поддержано грантом РФФИ 18-01-00048.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gliklikh Yu.E.* Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics. Springer-Verlag London. 2011.
2. Гликлих Ю.Е. Производные в среднем случайных процессов и их применения. ЮМИ ВНЦ РАН Владикавказ. 2016.

А. С. Гречко, О. Е. Кудрявцев (Ростов-на-Дону, Россия)
alex@itparadigma.ru, koe@donrta.ru

АНАЛИЗ ИНДЕКСА СКАЧКОВ В ЦЕНАХ КРИПТОВАЛЮТЫ BITCOIN

В последние годы бурно развивается рынок криптовалют, капитализация которого уже превысила 398 млрд. долларов. Наиболее известная криптовалюта Bitcoin показала в 2017 году существенный рост, увеличившись в цене почти в 20 раз, а в 2018 году потеряла более половины своей стоимости. Похожее поведение демонстрируют и другие криптовалюты. Высокая волатильность криптовалют вызывает активный интерес инвесторов, поскольку дает возможность проводить высокодоходные спекуляции. На ведущих торговых площадках открываются секции торговли фьючерсами на Bitcoin. В ближайшей перспективе можно прогнозировать активную торговлю опционами на криптовалюты. Таким образом, актуальной задачей является построение адекватных моделей цены на Bitcoin для вычисления цен соответствующих опционов.

Поведение цены Bitcoin говорит о необходимости использовать модели со скачками. Для подтверждения данного вывода было проведено исследование логарифмов цены указанной криптовалюты за 455 дней (01.01.2017–21.03.2018) на активность скачков по методике, рассмотренной в [1]. Ниже приведены среднее значение точечной оценки индекса активности и доверительный интервал:

$$Mean = 1.31094162801, (1.27244, 1.34944).$$

Результаты подтвердили предположение о наличии скачков в динамике актива и показали отсутствие диффузионной составляющей. Таким образом, для моделирования цены Bitcoin при расчете безарбитражных цен опционов вместо диффузионных моделей следует использовать чисто негауссовые модели Леви с неограниченной вариацией, например известную модель CGMY [2].

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-01-00910 А.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Todorov V., Tauchen G.* Activity signature functions for high-frequency data analysis. Journal of Econometrics. 2010. V. 154, No. 1, pp. 136-–141.

2.*Carr P., Geman H., Madan D.B., Yor M.* The fine structure of asset returns: an empirical investigation. Journal of Business. 2002. V. 75, pp. 305—332.

А. А. Гущин (Москва, Россия)
gushchin@mi.ras.ru

МАРТИНГАЛЫ С ОДНИМ СКАЧКОМ И ВЛОЖЕНИЕ СКОРОХОДА

В приложениях стохастического анализа, особенно в финансовой математике, часто рассматривают задачи следующего вида. Даны два распределения μ_0 и μ_1 на $\mathbb{R}^d$. Задан также класс случайных процессов со значениями в $\mathbb{R}^d$ (например, класс всех мартингалов). Требуется найти условия, при которых в этом классе найдется процесс, имеющий распределения μ_0 и μ_1 в начальный и терминальный моменты соответственно, а если эти условия выполнены, то предъявить явную конструкцию такого процесса или найти конструкцию, обладающую некоторыми свойствами оптимальности. Например, к такого рода задачам относится задача вложения Скорохода.

В докладе рассматривается класс локальных мартингалов, имеющих траектории ограниченной вариации на конечных интервалах с единственным скачком во вполне недостижимый момент остановки. Этот класс активно исследован в литературе, однако в последнее время появились новые результаты: в [2] были указаны явные конструкции для процессов из этого класса вместе с критериями, будет ли данный процесс мартингалом или только локальным мартингалом и т.д. Интерес к рассматриваемому классу процессов с одним скачком вызван также тем обстоятельством, что они возникают как экстремальные в некоторых задачах из числа описанных в предыдущем абзаце. Например, известная конструкция Дубинса–Гилата мартингала, имеющего максимальный (в смысле стохастического порядка) максимум среди всех равномерно интегрируемых мартингалов с заданным терминальным распределением, представляет собой мартингал с одним скачком. Другим примером является задача построения неотрицательного субмартингала с заданным терминальным распределением самого субмартингала и его компенсатора [1], где процессы с одним скачком составляют основу построения. Идеи замены времени позволяют установить связь некоторых конструкций в задаче вложения Скорохода с мартингалами с одним скачком.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гущин А. А.* Совместное распределение терминальных значений неотрицательного субмартингала и его компенсатора. Теория вероятн. и ее примен. 2017. Том 62, вып. 2, стр. 267–291.

2. *Herdegen M., Herrmann S.* Single jump processes and strict local martingales. Stochastic Processes and their Applications. 2016. Том 126, № 2, стр. 337–359.

Д.С. Климентов (Ростов-на-Дону, Россия)
dklimentov75@gmail.com

О ВЫЧИСЛЕНИИ КРИВИЗНЫ ПОВЕРХНОСТИ ЧЕРЕЗ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА В ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Пусть S - регулярная поверхность класса C^3 в E^3 с первой и второй квадратичными формами $I = g_{ij}dx^idx^j$ и $II = b_{ij}dx^idx^j$. Обозначим диффузионный процесс, порождённый первой квадратичной формой X_t, второй формой - Y_t. Переходную функцию процесса X_t будем обозначать $P_t^1(x, y)$, процесса Y_t - $P_t^2 1(x, y)$, где x, y - точки поверхности S.

Имеет место следующая

Теорема. *Переходные функции процессов X_t и Y_t удовлетворяют уравнению*

$$\frac{|II|}{|I|} = K = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}(g_{11})_{22} + (g_{12})_{12} - \frac{1}{2}(g_{22})_{11} & \frac{1}{2}(g_{11})_1 & (g_{12})_1 - \frac{1}{2}(g_{11})_{22} \\ (g_{12})_2 - \frac{1}{2}(g_{11})_1 & g_{11} & g_{12} \\ \frac{1}{2}(g_{22})_2 & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}}{\left(\int P^1(t,x,dy)\,\frac{y_1^2}{2} \cdot \int P^1(t,x,dy)\,\frac{y_2^2}{2} - \left[\int P^1(t,x,dy)\,y_1y_2\right]^2\right)^{-2}} -$$

$$
-\frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}(g_{11})_2 & \frac{1}{2}(g_{22})_1 \\ \frac{1}{2}(g_{11})_2 & g_{11} & g_{12} \\ \frac{1}{2}(g_{22})_1 & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}}{\left(\int P^1(t,x,dy)\frac{y_1^2}{2}\cdot\int P^1(t,x,dy)\frac{y_2^2}{2}-\left[\int P^1(t,x,dy)\,y_1y_2\right]^2\right)^{-2}},
$$

где

$$
g_{11}=\frac{\int P^1(t,x,dy)\frac{y_2^2}{2}}{\int P^1(t,x,dy)\frac{y_1^2}{2}\cdot\int P^1(t,x,dy)\frac{y_2^2}{2}-\left[\int P^1(t,x,dy)\,y_1y_2\right]^2},
$$

$$
g_{22}=\frac{\int P^1(t,x,dy)\frac{y_1^2}{2}}{\int P^1(t,x,dy)\frac{y_1^2}{2}\cdot\int P^1(t,x,dy)\frac{y_2^2}{2}-\left[\int P^1(t,x,dy)\,y_1y_2\right]^2},
$$

$$
g_{12}=\frac{\int P^1(t,x,dy)\,y_1y_2}{\int P^1(t,x,dy)\frac{y_1^2}{2}\cdot\int P^1(t,x,dy)\frac{y_2^2}{2}-\left[\int P^1(t,x,dy)\,y_1y_2\right]^2},
$$

а индекс после скобки означает производную по соответствующей перменной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Климентов Д.С.* Стохастический аналог основной теоремы теории поверхностей для поверхностей положительной кривизны // Известия ВУЗов Северо-Кавказский регион. Естественные науки, 2013, 6, с. 24-27.
2. *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы М.: Физматлит. 1963.

Н. П. Красий (Ростов-на-Дону, Россия)
krasnad@yandex.ru

ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ОПТИМИЗАЦИИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИОРИТЕТАМИ [1]

В данном докладе используются обозначения, приведенные в работе [1] и докладе Павлова И.В. и Углича С.И. на настоящей конференции. Для существования единственной точки глобального максимума целевой функции F модели 1, описанной в работе [2], требуется, чтобы среди приоритетов $\alpha_j, j=1,2,3$ не было нулевых (см. теорему 1 из [1]). Рассмотрим ситуации, когда это условие нарушается.

Случай 1. Пусть $p_j=P(\alpha_j=1)>0$, $q_j=P(\alpha_j=0)>0$ и $p_j+q_j=1$ для всех $\alpha_j, j=1,2,3$. Тогда целевая функция

$$
F=(u_1p_1+q_1)(u_2p_2+q_2)((-c_1u_1-c_2u_2+c_3)p_3+q_3).
$$

Единственная точка глобального максимума F существует при одновременном выполнении условий

[1]Данная работа поддержана РФФИ (грант 16-01-00184).

$$p_1p_2\left(c_3p_3+q_3\right)+c_2p_1q_2p_3>2c_1q_1p_2p_3,$$
$$p_1p_2\left(c_3p_3+q_3\right)+c_1q_1p_2p_3>2c_2p_1q_2p_3.$$

В противном случае максимум F на области определения не достигается.

Случай 2. Пусть один из приоритетов $\alpha_1 : P\left(0<\alpha_1<1\right)>0$, $p_j=P\left(\alpha_j=1\right)>0$, $q_j=P\left(\alpha_j=0\right)>0$ и $p_j+q_j=1, j=1,2$. Тогда целевая функция $F=\left(u_1p_1+q_1+E\left(u_1^{\alpha_1}I_{\{0<\alpha_1<1\}}\right)\right)\left(u_2p_2+q_2\right)$ $\left(\left(-c_1u_1-c_2u_2+c_3\right)p_3+q_3\right)$. Исследования, проводимые на конкретных примерах, показали, что и здесь возможны как наличие единственной точки глобального максимума F, так и ее недостижимость.

Случай 3. Пусть два приоритета $\alpha_j : P\left(0<\alpha_j<1\right)>0, j=1,2$, а $p_3=P\left(\alpha_3=1\right)>0$, $q_3=P\left(\alpha_3=0\right)>0, p_3+q_3=1$. Тогда

$$F=\left(u_1p_1+q_1+E\left(u_1^{\alpha_1}I_{\{0<\alpha_1<1\}}\right)\right)\left(u_2p_2+q_2+E\left(u_2^{\alpha_2}I_{\{0<\alpha_2<1\}}\right)\right)$$

$\left(\left(-c_1u_1-c_2u_2+c_3\right)p_3+q_3\right)$. Условие существования максимума F, как и в предыдущем случае, аналитически получить не удалось, но результаты изучения конкретных примеров демонстрируют существование и единственность точки глобального максимума F.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Павлов И. В., Углич С. И.* Оптимизация сложных систем квазилинейного типа с несколькими независимыми приоритетами. Вестник РГУПС. 2017. N 3(67), стр. 140–145.

2. *Красий Н. П.* Оптимизация квазилинейных моделей с несколькими независимыми приоритетами. Теория вероятностей и ее применения. 2017. Том 62, № 4, стр. 812–813.

А. В. Макарова, В. А. Горлов (Воронеж)
allagm@mail.ru

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ С ТЕКУЩИМИ СКОРОСТЯМИ С ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА [2]

Понятия производных слева, производных справа, симметрических производных и антисимметрических производных были введены во второй половине XX века Э. Нельсоном см.[1]. В работах Ю.Е. Гликлиха, была построена дополнительно квадратичная производная в среднем. Также было показано, что если заданы текущая скорость и квадратичная производная в среднем, то при некоторых условиях можно построить процесс, имеющий заданную текущую скорость и квадратичную производную. Это позволило корректно поставить задачу о нахождении процесса по его производным в среднем. Если заданы многозначная текущая скорость и квадратичная производная, то уравнение превращается во включение.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-01-00048 А).

При исследовании дифференциальных включений с текущими скоростями, в отличие от включений с производными в среднем справа, не удается напрямую использовать стохастические интегралы, то есть для их исследования понадобились новые методы.

В докладе представлены основные результаты, полученные при исследовании дифференциальных включений с текущими скоростями. Доказана разрешимость стохастических дифференциальных включений с текущими скоростями в следующих случаях:

- при наличии гладких селекторов;
- в случае существования ε–аппроксимаций с равномерно ограниченными первыми частными производными;
- в случае полунепрерывных сверху правых частей с равномерно ограниченными выпуклыми замкнутыми образами;
- в случае когда правая часть соотношения с квадратичной производной принимает значения в симметрических матрицах с постоянным определителем;
- в случае полунепрерывных снизу правых частей с равномерно ограниченными выпуклыми замкнутыми образами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nelson E.* Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics // Phys. Reviews: 1966. T. 150, № 4. C. 1079-1085.

Мисюра В В., Богачева М. Н. (Ростов-на-Дону, Россия)
vvmisyura2011@gmail.com

ПРОЦЕДУРА MCS ДЛЯ ОТБОРА МОДЕЛЕЙ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ[1]

Из множества подходов к прогнозированию наибольшее распространение на практике получили методы экспертных оценок, методы обработки пространственных и временных совокупностей, методы ситуационного анализа и прогнозирования. Их существенно варьируют по сложности используемых алгоритмов. Наличие нескольких альтернативных спецификаций моделей, способных адекватно описывать процесс экстраполяции данных, открывает вопрос о выборе "наилучшей модели прогнозирования" в соответствии с заданным критерием оптимальности. Доклад посвящен процедуре MCS (model confidence set), которая позволяет из множества моделей отбросить "плохие"и состоит из последовательности статистических тестов, позволяющих построить набор моделей (SSM "Superior Set Model"), для которых нулевая гипотеза о их равной прогностической способности не отклоняется с определенным уровнем доверия [1]. Статистические тесты

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-01-00888 А.

рассчитываются для произвольной функции потерь $l_{it}\left(y_t^i, \hat{y}_t\right)$, обладающей стандартными свойствами функции потерь ($\hat{y}_t$ - прогноз модели).

Ниже приведем укрупненный алгоритм отбора моделей согласно процедуре MCS: 1) Для каждой модели рассчитывается её "степень несовершенства" , например отставание модели по качеству прогнозов от самого сильного конкурента или усреднённое отставание модели от остальных; 2) Проверяется гипотеза о том, что все модели имеют равную прогностическую способность; 3) Если гипотеза не отвергается, то процедура заканчивается. Если основная гипотеза отвергается, то самая плохая модель отбрасывается; 4) Переходим к шагу 1 с меньшим числом моделей.

Процедура MCS реализована в одноименном пакете программной среды статистических вычислений R [2]. Актуальность пакета показана на примере, который направлен на подробное описание использование функций, предоставляемых пакетом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hansen P. R., Lunde A., Nason J. M.* The model confidence set./ Econometrica, 79(2), 2011, 453-497.
2. *Bernardi M., Catania L.* The Model Confidence Set package for R/ CEIS Research Paper 362, Tor Vergata University, CEIS, revised 17 Nov 2015.

В. А. Нестеренко (Ростов-на-Дону, Россия)
neva09@mail.ru

КЛАССИФИКАЦИЯ ДАННЫХ НА ОСНОВЕ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В предлагаемой работе рассматривается новый метод классификации данных, основанный на использовании групповых свойств классифицируемых объектов. Классификация производится на основе сравнения экспериментальных функций распределения тестовой и обучающей выборок. Оценка степени близости функций распределения позволяет сделать вывод о принадлежности объектов тестовой выборки искомому классу.

В простейшем случае можно проверить тестовую и обучающую выборки на однородность. Если гипотеза об однородности принимается, то объекты проверяемой выборки принадлежат тому же классу, что и объекты обучающей выборки. Такой прямолинейный подход имеет существенный недостаток: если относительный размер класса C невелик $N_C/N \ll 1$, то вероятность того, что все объекты случайной тестовой выборки принадлежат классу C мала $\sim (N_C/N)^m$ (N - общее число объектов, N_C - число объектов искомого класса, m - размер тестовой выборки) и необходимо проверить много выборок для нахождения объектов принадлежащих классу C.

В данном случае предлагается использовать следующий подход: возьмём две случайные тестовые выборки, обозначим через $F^{(+)}$ ту, которая даёт лучшую оценку на однородность с обучающей выборкой и через $F^{(-)}$ другую. Выполнение критерия согласия не требуется, достаточно из двух тестовых выборок выбрать ту, которая «больше похожа» на обучающую. Ассоциируем с каждым объектом два счётчика $k_i^{(+)}$ и $k_i^{(-)}$, при каждом испытании будем увеличивать значение счётчиков $k_i^{(+)}$ на 1 для объектов выборки $F^{(+)}$ и увеличивать значения счётчиков $k_i^{(-)}$ для объектов выборки $F^{(-)}$. Можно показать, что для объектов класса C усреднённые по выборкам значения счётчиков удовлетворяют условию:

$$\overline{k}_i^{(+)}/(\overline{k}_i^{(+)}+\overline{k}_i^{(-)})>0.5-\alpha.$$

Параметр $\alpha \geq 0$ характеризует степень пересечения множества точек класса C и множества остальных точек: $\alpha = 0$ в случае непересекающихся множеств.

Это условие служат критерием в предлагаемом методе классификации данных.

Н. В. Неумержицкая (Ростов-на-Дону, Россия), О. П. Сидельникова (Волгоград, Россия)
neunata@yandex.ru

КОНЦЕПЦИЯ МНОГОФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ СТЕПЕНИ ПРОСКОКА ПЫЛИ В ВИХРЕВОМ ИНЕРЦИОННОМ АППАРАТЕ СО ВСТРЕЧНЫМИ ЗАКРУЧЕННЫМИ ПОТОКАМИ

В настоящей работе использовалась одна из самых важных идей теории планирования эксперимента: концепция многофакторного эксперимента. Смысл ее состоит в следующем. Одновременно варьируя факторы, вызывающие изменение состояния объекта, мы определяем общее состояние объекта (это касается каждого эксперимента). Оптимально используя факторное пространство, мы добиваемся снижения дисперсии коэффициентов математической модели [1]. В работе использованы планы экстремального эксперимента. Они разработаны для определения оптимальных условий развития процессов в объектах исследования. Оптимум определялся по математической модели объекта исследования, представляющей собой некоторое полиномиальное уравнение.

Метод планирования эксперимента был применен для определения степени проскока пыли ε в вихревом инерционном аппарате со встречными закрученными потоками. Варьируемые факторы: относительная скорость $\bar{V}$ потока в поперечном сечении аппарата, которая равна отношению расхода газа, поступающего на очистку, к площади поперечного сечения аппарата; доля расхода газа k, подаваемого в аппарат через нижний ввод; относительная концентрация $\bar{C}$ пыли в очищаемом потоке воздуха, равная концентрации пыли на входе в аппарат. В докладе будет представлена таблица уровней и интервалов варьирования факторов и матрица экспериментальных исследований по определению степени проскока пыли. Обработка результатов экспериментальных исследований позволила получить следующее уравнение регрессии:

$$\varepsilon = 0,25 - 21,03k + 42,43k^2 - 5,4\bar{V} + 0,33\bar{V}^2 - 0,2\bar{C}.$$

В работе доказана пригодность уравнения (1) для решения задачи поиска оптимума.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Адлер Ю. П, Маркова Е. В, Грановский Ю. В.* Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М.: Наука. 1976.

И. В. Павлов (Ростов-на-Дону, Россия)
pavloviv2005@mail.ru

К КОНЦЕПЦИИ ДЕФОРМИРОВАННЫХ МАРТИНГАЛОВ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ[1]

Пусть $(\Omega, \mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{\infty})$ — произвольная фильтрация с непрерывным временем, $\mathcal{F} := V_{t\geq 0}\mathcal{F}_t$. Если $\mathcal{G}$ есть σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{F}$, а P — вероятностная мера на $\mathcal{F}$, то обозначим $E^P_{\mathcal{G}} f := E^P[f|\mathcal{G}]$. Рассмотрим семейство $\mathbf{Q} = (\Omega, Q^t_s, \mathcal{F}_t)_{0\leq s<t<\infty}$ вероятностных мер Q^t_s на $\mathcal{F}_t$ и семейство операторов условного математического ожидания $(E^t_s)_{0\leq s<t<\infty}$: $E^t_s f := E^{Q^t_s}_{\mathcal{F}_s} f$, где f — $\mathcal{F}_t$-измеримая неотрицательная случайная величина (с.в.). Триплет $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{Q})$ будем называть деформированным стохастическим базисом 2-го рода (DSB-2), если 1) $\forall\, 0 \leq s < r < t < \infty$ $Q^r_s \ll Q^t_r|_{\mathcal{F}_r}$; 2) $\forall\, 0 \leq s < r < t < \infty$ и $\forall A \in \mathcal{F}_t$ выполняется равенство: $Q^t_s(A) = E^{Q^r_s} E^t_r(I_A)$. Если условие 2)выполнено, а вместо 1) выполняется условие 1') $Q^r_s \sim Q^t_r|_{\mathcal{F}_r}$, то триплет $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{Q})$ называется слабо деформированным стохастическим базисом (WDSB).

Доказывается, что данные определения равносильны соответствующим определениям в [1]. В докладе будут установлены связи деформированных стохастических базисов с непрерывным и дискретным временем.

Пример. Пусть P — вероятность на $\mathcal{F}$. Пусть $\forall t \geq 0$ $B_t \in \mathcal{F}_t$, $B_t \uparrow$, $P(B_t) > 0$ и P^{B_t} — условная вероятность относительно B_t. Для всех $0 \leq s < t < \infty$ и $A \in \mathcal{F}_t$ полагаем: $Q^t_s(A) = P^{B_s}(A)$. Тогда $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{Q})$ есть DSB -2.

Основным объектом обсуждения в докладе будут определяемые на DSB-2 деформированные мартингалы 2-го рода с непрерывным временем и их частный случай — определяемые на WDSB слабо деформированные мартингалы с непрерывным временем.

[1] Данная работа поддержана РФФИ (грант 16-01-00184).

ЛИТЕРАТУРА
1. *Павлов И. В., Назарько О. В.* Теоремы о деформированных мартингалах, разложение Рисса, характеризация локальных мартингалов, вычисление квадратичных характеристик. Известия Вузов. Северо-Кавказский регион. Серия "Естественные науки". 2015. N 1, стр. 36–42.

И. В. Павлов, С. И. Углич (Ростов-на-Дону, Россия)
pavloviv2005@mail.ru

ОПИСАНИЕ ТОЧЕК МАКСИМУМА ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИОРИТЕТАМИ

В настоящем докладе представлены основные результаты работы [1] и некоторые дополнения к ним. Данная работа поддержана РФФИ (грант 16-01-00184).

Рассмотрим функции $F_j(x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}x_i + b_j\right) I_{\{\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}x_i+b_j>0\}}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, где I_A есть индикатор множества A. Пусть $\alpha_j = \alpha_j(\omega)$ — произвольные с.в., определенные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и принимающие значения на отрезке [0;1]. Мы будем исследовать на экстремумы целевую функцию $F = E\left(\prod_{j=1}^{n} F_j^{\alpha_j}\right)$, где E — символ математического ожидания по вероятности P. Отметим, что несмотря на внешнюю простоту функции F, эта задача не столь проста и имеет различные ответвления. Мы предполагаем, что с.в. α_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, независимы. Введем в рассмотрение систему векторов (1): $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, a_{1j}, \ldots, a_{nj})$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Нетрудно доказывается, что если функция F имеет стационарную точку в области своей положительности, то система векторов (1) линейно зависима и при этом каждый вектор системы (1) может быть представлен в виде линейной комбинации с отрицательными коэффициентами через остальные. Будем предполагать, что эти условия выполнены. Предположим дополнительно, что среди векторов системы (1) существует $k-1$ линейно независимых векторов. Можно считать, что этими векторами являются $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}$. Запишем представление $\mathbf{a}_j = -\sum_{i=1}^{k-1} c_i\mathbf{a}_i$, где c_i, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, — однозначно определенные строго положительные числа. Пусть $c_k := \sum_{i=1}^{k-1} c_i b_i + b_k$.

Теорема. *Пусть $P(\alpha_j > 0) = 1$ для всех $j = 1, 2, \ldots, k$ и $c_k > 0$. Тогда функция $F(u_1, \ldots, u_k) = \prod_{j=1}^{k} E[u_j^{\alpha_j}]$ в области, определяемой неравенствами $u_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, и $\sum\limits_{i=1}^{k-1} c_i u_i < c_k$ имеет единственную стационарную точку, являющуюся локальной (а также глобальной) точкой максимума.*

ЛИТЕРАТУРА
1. *Павлов И. В., Углич С. И.* Оптимизация сложных систем квазилинейного типа с несколькими независимыми приоритетами. Вестник РГУПС. 2017. N 3(67), стр. 140–145.

Н. А. Сайфутдинова (Ростов-на-Дону, Россия)
saifut25@mail.ru

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

В работе рассмтривается модель, аналогичная рассмотренной в [1]. Пусть дана следующая целевая функция: $F = f_1 + f_2$, где $f_1 = {x_1}^{\alpha_1}{y_1}^{\alpha_2}$, $f_2 = {x_2}^{1-\alpha_1}{y_2}^{1-\alpha_2}$ рассматриваются на множестве $B = \{(x_1, y_1, x_2, y_2) : 0 \le x_i \le 1, 0 \le y_i \le 1, i = 1, 2\}$. При этом $0 \le \alpha_1 \le 1$ и $0 \le \alpha_2 \le 1$. Два слагаемых описывают два экономических объекта, между которыми происходит распределение ресурса I типа (переменные x_1 и x_2) и ресурса II типа (переменные y_1 и y_2). Считаем, что $x_1+x_2 = 1$, $y_1+y_2 = 1$. Тогда получаем следующую целевую функцию $F = f_1 + f_2$, где $f_1 = x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}$, $f_2 = (1-x)^{1-\alpha_1}(1-y)^{1-\alpha_2}$,$D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, i = 1, 2\}$. Случай нахождения оптимального распределения ресурсов в этом случае рассмотрен в [2].

Далее будем считать, что показатели α_1 и α_2 означают, что эти объекты связаны технологически, причём выбор технологии является результатом различных экспертных рекомендаций, что побуждает считать α_1 и α_2 случайными величинами. Рассмотрим случай, когда эти две с.в. зависимы, а точнее $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$. Обозначим $\alpha_1 = \alpha$.

Пусть $\alpha(\omega)$ - произвольная с.в., определённая на некотором вероятностном прстранстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и принимающая значения на $[0; 1]$. Тогда в качестве целевой функции арбитра будем расматривать $E(F)$, где E - математическое ожидание по вероятностной мере P.

В работе рассматривается случай когда α - с.в., имеющая равномерное распределение на $[0; 1]$. При этом условии проводится исследование поведения $E(F)$ на множестве D.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вагин В.С., Павлов И.В.* // Моделирование и оптимизация квазилинейных сложных систем с учётом вероятностного характера приоритетов. Вестник РГУПС, 2016, № 1(61), с.135-139.

2. *Сайфутдинова Н.А., Сумбатян М.А.* //Моделирование оптимального распределения ресурсов в сообществе экономических объектов. Научное обозрение, 2012, № 3(12), с. 71-77.

Н. В. Смородина (ПОМИ РАН, Санкт-Петербург, Россия)
smorodina@pdmi.ras.ru

ТЕОРЕМА О СХОДИМОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА[1]

Обозначим через P^t группу унитарных операторов $P^t = e^{-itH}$, где $H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}$.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01136).

Группа P^t переводит начальную функцию φ в решение $u(t,\cdot)$ уравнения Шрёдингера $-i\,\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ - последовательность н.о.р. неотрицательных случайных величин. Мы предположим, что случайная величина ξ_1 имеет конечный третий момент и $\mathbf{E}\xi_1^2 = 1$.

Далее, пусть $\eta(t)$, $t \geqslant 0$ — стандартный пуассоновский процесс, не зависящий от $\{\xi_j\}$. Обозначим $m_1 = \mathbf{E}\xi_1 > 0,\ \ m_3 = \mathbf{E}\xi_1^3 > 0$.

Для $n \in \mathbb{N}$ определим процесс $\zeta_n(t)$, $t \in [0,T]$, полагая

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} (\xi_j - m_1).$$

Определим полугруппу операторов P_n^t, полагая для $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$

$$P_n^t \varphi(x) = \mathbf{E}\Big((\varphi_+ * R_n^t)\big(x + e^{\frac{i\pi}{4}}\zeta_n(t)\big) + (\varphi_- * R_n^t)\big(x - e^{\frac{i\pi}{4}}\zeta_n(t)\big) \Big),$$

где функция R_n^t задается своим преобразованием Фурье, именно

$$\widehat{R_n^t}(p) = \exp\big(-\frac{i^3\sigma^3 t|p|^3}{6\sqrt{n}}\big),$$

а функции φ_+, φ_- определяются как

$$\varphi_+(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-ipx}\widehat{\varphi}(p)dp, \quad \varphi_-(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-ipx}\widehat{\varphi}(p)dp.$$

Функция φ_+ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, а φ_-, соответственно, в нижнюю.

Теорема 1. *Существует $C > 0$ такое, что для любой функции $\varphi \in W_2^4(\mathbb{R})$ и всех $t > 0$ справедливо*

$$\|P_n^t\varphi - P^t\varphi\|_{L_2} \leqslant \frac{C\,t}{n}\|\varphi\|_{W_2^4}.$$

И. В. Цветкова (Ростов-на-Дону)
pilipenkoIV@mail.ru

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МАРТИНГАЛЬНЫЕ МЕРЫ НА ФИНАНСОВЫХ РЫНКАХ СО СЧЁТНЫМ ЧИСЛОМ ИСХОДОВ И КОНЕЧНЫМ ГОРИЗОНТОМ [1]

Рассматривается $(1, Z)$-рынок, заданный на фильтрованном пространстве $(\Omega, \mathbf{F})$, $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_k)_{k=0}^{N}$, Ω — счётное пространство элементарных событий. Полагаем, что в

[1] Данная работа поддержана РФФИ (грант 16-01-00184).

начальный момент времени вся ситуация на рынке известна ($\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$). При переходе к моменту времени $k = 1$ на рынке возникает ряд новых (нетривиальных)событий: $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \ldots;\ A_i^{(1)} \cap A_j^{(1)} = \varnothing,\ \cup_{i=1}^{\infty} A_i^{(1)} = \Omega$. Получим σ-алгебру $\mathcal{F}_1 = \sigma\{A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \ldots\}$. Для того, чтобы определить σ-алгебру $\mathcal{F}_2$ выберем случайным образом натуральное число, обозначим его: $\delta_1^{(1)}$. Рассмотрим соответствующее ему событие: $A^{(1)}_{\delta_1^(1)}$. При переходе от момента $k = 1$ к $k = 2$ будем считать, что только этот атом дробится на счётное число атомов $A_1^{(2)}, A_2^{(2)}, \ldots$, а остальные атомы σ-алгебры $\mathcal{F}_1$ остаются без изменения, тогда $\mathcal{F}_2 = \sigma\{A_1^{(2)}, A_2^{(2)}, \ldots, \mathcal{F}_1\}$. Продолжая эту процедуру далее, получим фильтрацию $\mathbf{F}$. Пусть $Z = (Z_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^N$ — $\mathbf{F}$-адаптированный случайный процесс (дисконтированная стоимость акции), $\mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$ — множество вероятностных мер P, для которых случайный процесс $(Z_k, \mathcal{F}_k, P)_{k=0}^N$ является мартингалом. Предполагаем, что исходный рынок является безарбитражным и неполным. В докладе будет показано как с помощью мартингальных мер, удовлетворяющих ОСУХЕ [1], и специальной фильтрации $\mathbf{H}$ хааровского типа, интерполирующей исходную фильтрацию $\mathbf{F}$, можно построить процесс $Y = (Y_n, \mathcal{H}_n, P)_{n=0}^{\infty}$, который интерполирует исходный процесс Z. Этот метод позволяет перейти от исходного неполного рынка к расширенному полному и на нем вычислить компоненты совершенного хеджа, реплицирующего заданное финансовое обязательство.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Павлов И. В., Цветкова И. В., Шамраева В. В.* О существовании мартингальных мер, удовлетворяющих ослабленному условию несовпадения барицентров, в случае счётного вероятностного пространства // Теория вероятностей и её применения. 2016. Т.61, В.1, стр.173-181.

Е. Г. Чуб (Ростов-на-Дону, Россия)
elenachub111@ gmail.com

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ ВЫСОКОТОЧНОГО ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ ПУТЕИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ВАГОНА

Разработана марковская модель движения системы высокоточного позиционирования в углах Эйлера-Крылова в форме «объект-наблюдатель»[1]. Ее применение дает возможность определить оценку вектора состояния системы высокоточного позиционирования путеизмерительного вагонав инерциальном пространстве на длительном интервале времени в условиях действия помех без привлечения наземных систем ориентирования. Преимуществами полученной модели является малая по сравнению с другими параметрами размерность и то, что при ее построении использовались только показания акселерометров, расположенных на гиростабилизаторе, и приборный состав не расширялся [2,3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. – М.: Наука, 1976. – 672 с.

2. *Погорелов В.А., Чуб Е.Г.* Марковская модель движения некорректируемой гиростабилизированной платформ // Труды ФГУП "НПЦАП". Системы и приборы управления. —2012. —№ 1, с. 59-69 с.149-156.

3. *Клодина Т.В., Погорелов В.А., Чуб Е.* Инерциальные информационно-измерительные комплексы. Некорректируемая гиростабилизируемая платформа - Berlin. Изд-во LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH and Co. KG, 2012, 116 с.

В. В. Шамраева (Москва, Россия)
shamraeva@mail.ru

ОБОСНОВАНИЕ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ ИНВЕСТОРОВ НА ФИНАНСОВЫХ РЫНКАХ СО СЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ [1]

Рассмотрим безарбитражный и неполный (B,S)-рынок, заданный на $\{\Omega, \mathbf{F}\}$, где $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ — одношаговая фильтрация, $Z = (Z_i, \mathcal{F}_i)_{i=0}^{1}$ — $\mathbf{F}$-адаптированный случайный процесс (с.п.). С.п. Z – дисконтированная стоимость акции. Пусть $Z_0 = a, Z_1(\omega_i) = b_i, b_i > 0, i = 1, 2, \ldots$. Будем говорить, что $P \in NBC$ (удовлетворяет **условию несовпадения барицентров**), если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i p_i$ абсолютно сходится и $\forall I, J \subset \mathbb{N}$ $(I \cap J = \oslash, |I| \leqslant |J|)$ $\frac{\sum_I b_i p_i}{\sum_I p_i} \neq \frac{\sum_J b_j p_j}{\sum_J p_j}$. Интерес представляют невырожденные мартингальные меры P, которые удовлетворяют условию несовпадения барицентров (NBC). Это условие позволяет относительно произвольной специальной интерполирующей хааровской фильтрации с помощью мартингальной меры $P \in NBC$ интерполировать неполный рынок до полного. В данной работе будут уточнены достаточные условия для параметров рынка, которые были получены ранее и опубликованы в [1]-[2] и обеспечат существование такой мартингальной меры.

Программный комплекс, основанный на этих результатах, позволит применять метод специальных хааровских интерполяций к расчетам на безарбитражных финансовых рынках, что существенно облегчит выбор оптимальных стратегий инвесторов на финансовых рынках.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Павлов И.В., Шамраева В.В.* // Новые результаты о существовании интерполяционных мартингальных мер. // Успехи математических наук, 72:4 (2017), 193-194.

2. *Шамраева В.В.* // О существовании специальных интерполяционных мартингальных мер, допускающих преобразование неполных финансовых рынков в полные. Теория вероятн. и ее примен., 62:4 (2017), 798–839.

[1]Данная работа поддержана РФФИ (грант 16-01-00184).

Session VI

Bioinformatics and Mathematical Modelling

Abdulrahman H., Skorokhodov V. A. (Rostov-on-Don, Russia)
abdulrahm.haidar@gmail.com, pdvaskor@yandex.ru

ON DYNAMIC RESOURCES NETWORKS. THE CASE OF LOW RESOURCE

We consider ergodic dynamic resource network $G(X, U, f, D)$ [1,2]. Each arc u of such network has an throughput capacity $r(u)$, wich is periodic depended on discrete time with period D. Every node of the network stores some amount of «resource». This resource disseminates through networks according to the specified rules.

Set of values $\{q_i(t)\}$ $i \in [1; n]_Z$ are called network G state in the moment t and each of these values $q_i(t)$ is called the quantity of resource in vertex i in the moment t.

We define rules of functioning of the dynamic resourse network: for each $i \in [1; n]_Z$

$$q_i(t+1) = q_i(t) - \sum_{v \in [x_i]^+(t)} F(v,t) + \sum_{v \in [x_i]^-(t)} F(v,t),$$

where $F(v, t)$ is a the resource flow value, which passes through the arc v in the moment t.

We consider only such networks, wich are K-cyclic ergodic graphs and if $K = 1$, such graph is called regular.

Methods of finding threshold value of resource and limit state on the dynamic resources networks, wich based on construction of auxiliary graph G' similar to nonstandard reachability, are developed in case of low resource.

Proposition. *Let G – be an ergodic dynamic resource networks with period D.*

1. The threshold value of G is $T = \frac{\sum_{i=1}^{sc(G')} T(H_i)}{D}$, where H_i is a connectivity component of auxiliary graph G' and $sc(G')$ is the number of such components. Values $T(H_i)$ can be found such as it was described in [2];

2. In case $W = T$ the limit state Q^* of G exists and is unique.

REFERENCES

1. *Kuznetsov O. P., Zhilyakova L. Yu.* Nonsymmetric resource networks. The study of limit states. Management and Production Engineering Review. 2011. Vol. 2, No. 3. pp. 33–39

2.

2. *Skorokhodov V. A., Chebotareva A. S.* The Maximum Flow Problem in a Network with Special Conditions of Flow Distribution. Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2015. Vol. 9, No. 3. pp. 435–446.

A. M. S. Al-Temimi, V. S. Pilidi (Rostov-on-Don, Russia)
ammar.comsec.it@gmail.com, pilidi@sfedu.ru

ON THE THRESHOLD VALUES FOR CANNY EDGE DETECTOR IN THE CASE OF MEDICAL X-RAY IMAGES

Canny edge detector [1] is an effective algorithm for finding boundaries in the digital image. Analysis of intensity gradients of the image is the main step of this algorithm.

Here there are used two different thresholds (to detect so called strong and weak edges) for the values. The algorithm includes weak edges in the output only if they are connected with the strong ones. These values are chosen by the user, and the result depends on them significantly.

This edge detector was used in the algorithms [2] which permit to analyze medical X-ray images of the human joints and find the so called reference lines and angles [3]. As a result of the experiments, the optimal values of the parameters of the intermediate algorithms (including values if thresholds mentioned above) were determined, which allowed automatic processing without additional program setting in the case of an average quality image. The obtained after Canny detector image required extensive additional processing to find the details that were important for medical analysis.

In the programs created on the basis of the developed algorithms, a manual correction of the thresholds was provided, which, of course, significantly slows down the work with the image.

Our experiments showed that it is possible to automatically find these thresholds, using only the statistical characteristics of the image. This significantly improves the quality of the definition of boundaries and, as a result, the need for further processing of the image disappears or substantially decreases.

REFERENCES

1. *Canny J. A.* Computational Approach to Edge Detection. IEEE Transactions. 1986. Vol. PAMI-8, No. 6, pp. 659–663.

2. *Al Temimi A. M. S., Pilidi V. S.* Automating the process of determining the reference lines on the X-ray medical images. 2017. Engineering Journal of Don. No. 1 ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2017/4007

3. *Solomin L. N., Shchepkina E.A.* Opredelenie referentnyh linij i uglov dlinnyh trubchatyh kostej: posobie dlja vrachej [Determining reference lines and angles of the long bones: a manual for physicians]. SPb.: RNIITO im. R.R. Vredena, 2010. 46 pp.

M. A. Stepovich$^{\alpha}$, A. N. Amrastanov$^{\beta}$, E. V. Seregina$^{\gamma}$ (Kaluga, Russia), M. N. Filippov$^{\delta}$ (Moscow, Russia)
$^{\alpha}$m.stepovich@rambler.ru, $^{\beta}$an_amr@mail.ru, $^{\gamma}$evfs@yandex.ru, $^{\delta}$mn@filippov.org.ru

ON ONE PECULIARITY OF THE MATHEMATICAL MODEL DESCRIBING THE INTERACTION OF THE ELECTRON BEAM WITH THE SEMICONDUCTOR MATERIAL

The problem of heat distribution in semiconductor materials irradiated with sharply focused electron beam in the absence of heat exchange between the target and the external medium has been considered by mathematical modeling methods. The three–dimentional differential equation of heat transfer is solved in a cylindrical coordinate system. In the quantitative description of energy losses by probe electrons, a model based on a separate description of the contributions to the energy of absorbed and backscattered electrons is used [1]. Using the features of this approach, the nonmonotonic dependence of the temperature of the maximum heating of the target ΔT on the energy of the primary electrons E_0 is explained. The results of the calculations show that the contribution of electrons absorbed in the target to the total energy losses of the probe electrons in the target is decisive for the probe energy of less than about 2…3 keV. We note that for heavy semiconductors (for example for CdTe), the energy loss of the absorbed electrons becomes practically zero at an energy of about 8 keV. For light samples (for example for Si) and samples with average ordinal numbers (for example for GaAs), the energy losses absorbed by the target absorbed and back scattered (reflected) electrons become commensurate with the electron energy of the probe about 8 keV, and at higher energies the contribution of backscattered electrons predominates. This can be explained by the deeper penetration and large scattering in the target of the probe electrons and, as a consequence, the lower probability of the exit from the target of electrons experiencing small–angle scattering in the volume of the semiconductor.

This work was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 16–03–00515.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mikheev N. N., Stepovich M. A.* Distribution of Energy Losses in Interaction of an Electron Probe with Material. Industrial Laboratory. 1996. Vol. 62, no. 4, pp. 221–226.

М. А. Абделхафиз, В. Г. Цибулин (Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия)
mostafa.abdallah@yahoo.com

КОСИММЕТРИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ КОНВЕКЦИИ НАНОЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Для моделирования конвекции жидкости в пористой среде используется модель Дарси-Буссинеска. В плоской постановке рассматривается задача о подогреве наножидкости в прямоугольнике $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ при линейном по высоте распределении температуры и концентрации наночастиц. Для функции тока $\psi(x, y, t)$, отклонений температуры $\theta(x, y, t)$ и концентрации $c(x, y, t)$ ставится начально–краевая задача с учетом ортотропии свойств жидкости и среды

$$\begin{aligned}
&0 = \mu_{11}\psi_{yy} + \mu_{22}\psi_{xx} + \theta_x + c_x,\\
&\dot\theta = d^T_{11}\theta_{xx} + d^T_{22}\theta_{yy} - \lambda^T\psi_x - J(\psi,\theta), \quad J(\psi,\theta) = \theta_x\psi_y - \theta_y\psi_x,\\
&\dot c = d^C_{11}c_{xx} + d^C_{22}c_{yy} - \lambda^C\psi_x + d^{CT}_{11}\theta_{xx} + d^{CT}_{22}\theta_{yy} - J(\psi, c).\\
&[\psi,\theta,c]_{\partial\Omega} = 0, \quad \theta(x,y,0) = \theta_0(x,y), \quad c(x,y,0) = c_0(x,y).
\end{aligned}$$

Здесь λ^T — температурное число Рэлея, λ^C — концентрационное число Рэлея; μ_{ii}, d_{ii}^T, d_{ii}^C, d_{ii}^{CT}, $(i = 1, 2)$ — коэффициенты обратной проницаемости, теплопроводности, молекулярной диффузии и термодиффузии (эффект Соре).

Установлены условия

$$\mu_{11} d_{11}^C = \mu_{22} d_{22}^C, \left[-\mu_{22} d_{22}^C + \mu_{11} d_{11}^{CT}\right] d_{22}^T = \left[-d_{22}^C + d_{22}^{CT}\right] \mu_{11} d_{11}^T,$$

при которых косимметрией системы будет вектор-функция

$$L = (\theta + c, S_1\psi, S_2\psi), \quad S_1 = \mu_{11}\left[d_{22}^{CT} - d_{22}^C\right]/d_{22}^T d_{22}^C, \quad S_2 = -\mu_{11}/d_{22}^C.$$

При условиях косимметрии и для случая монотонной неустойчивости выводится соотношение, связывающее критические числа Рэлея λ^T и λ^C:

$$\lambda_{crit}^T\left[d_{11}^C - d_{11}^{CT}\right] + d_{11}^T \lambda_{crit}^C = 4\pi^2 d_{11}^T d_{11}^C \left(\frac{\mu_{22}}{a^2} + \frac{\mu_{11}}{b^2}\right).$$

При $\lambda^C = 0$ получается критическое значения числа Рэлея (Изв. РАН. МЖГ. 2017). Для вычисления конвективных режимов применяется метод (ЖВМиМФ, 2017), сохраняющий косимметрию задачи.

Н. В. Боев (Ростов-на-Дону, Россия)
boyev@math.rsu.ru

РАССЕЯНИЕ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН НА СКОПЛЕНИЯХ ТВЕРДЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В ДВУМЕРНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ ИХ ЛЮБЫХ ОТРАЖЕНИЙ И ТРАНСФОРМАЦИЙ

Наличие твердых включений в однородном упругом материале существенно меняет его свойства в режиме динамического воздействия на него. Это обстоятельство позволяет отнести его к метаматериалам, свойства которых интенсивно изучаются в настоящее время. Исследована задача прохождения ультразвуковых волн через скопления твердых препятствий (в том числе и периодической структуры), находящихся в бесконечной двумерной упругой среде.

В скопление препятствий вводится импульс с тональным заполнением несколькими периодами плоской высокочастотной, монохроматической продольной или поперечной упругой волны, а в некоторой области упругой среды принимается прошедшая волна с любыми возможными отражениями (продольной волны в продольную, поперечной волны в поперечную) и трансформациями (продольной волны в поперечную, поперечной волны в продольную). Высокочастотный режим колебаний позволяет строить решение задачи на основе геометрической теории дифракции (ГТД). Задача исследуется в локальной постановке. Строятся траектории лучей распространения упругих волн с учетом их отражений и трансформаций в точках зеркального отражения на граничных контурах препятствий. Траектории лучей представляют собой плоские ломаные линии. При прохождении каждого луча из источника волны через скопление препятствий образуется, в общем случае, конечное число лучей с различнными типами отражений и трансформаций упругих волн. В область приема могут попасть как все образовавшиеся лучи, так и часть их.

Интегральные представления перемещений в переотраженных волнах выписаны на основе физической теории дифракции Кирхгофа. Асимптотической оценкой кратных дифракционных интегралов методом многомерной стационарной фазы выписан явный вид геометрооптического приближения перемещений в многократно отраженных волнах. После этого, в области приема импульса анализируются фазы и величины перемещений в прошедших продольных и поперечных ультразвуковых волнах.

Исследования проведены при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, грант № 15-19-10008.

И. В. Богачев, А. О. Ватульян (Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия)
bogachev89@yandex.ru

О РЕКОНСТРУКЦИИ ХАРАКТЕРИСТИК ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО ДИСКА С УЧЕТОМ РЕОЛОГИИИ

Активное использование пьезоэлектрических преобразователей в современных технических устройствах в настоящее время влечет за собой развитие моделей функционально-градиентных пьезополимеров (ФГПП), свойства которых непрерывно изменяются относительно координат. Также отличительными особенностями ФГПП являются значительные коэффициенты затухания, низкая теплопроводность, надежность и долговечность при циклических нагружениях. Современные технологии позволяют изготавливать ФГПП со значительными диапазонами изменения механических и пьезоэлектрических свойств, ввиду чего существенную значимость приобретает создание новых методик их идентификации с целью сравнения характеристик изготовленных материалов с расчетными.

В настоящей работе рассмотрена новая обратная задача идентификации свойств функционально-градиентного пьезокерамического диска с радиальной поляризацией при наличии эффекта затухания. Предполагалось, что модули упругости для неполяризованной керамики и диэлектрическая проницаемость известны и требуется определить законы изменения пьезоэлектрических характеристик с учетом затухания как функции радиальной координаты. Определяющие соотношения электроупругости для пьезополимера сформулированы на основе концепции комплексных модулей с использованием принципа соответствия и модели стандартного вязкоупругого тела. Для решения задачи разработан эффективный проекционный метод, основанный на разложении функции смещения и искомых функций-характеристик по системам линейно независимых функций, который позволяет определять искомые пьезоэлектрические характеристики в классе линейных функций. Его эффективность проиллюстрирована вычислительными экспериментами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-00354 А) и Минобрнауки РФ (проект № 9.4726.2017/8.9).

Я. М. Ерусалимский (Ростов-на-Дону, Россия)
ymerusalimskiy@sfedu.ru

ГРАФЫ С P-ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ДОСТИЖИМОСТЬ

Рассмотрены ориентированные графы $G(X, U, f)$ с p-ограничениями на достижимость. Множество дуг графа $U = U_1 \cup U_2$, $U_1 \neq \emptyset$, $U_2 \neq \emptyset$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Говорят, что путь на графе удовлетворяет условию p-достижимости ($p \in N$), если на нем за каждой p-ой дугой из множества U_2 следует дуга из множества U_1. Граф, на котором рассматриваются только пути, удовлетворяющие условию p-достижимости, будем называть графом с p-достижимостью. Графы с различными ограничениями на достижимость рассматривались в работах [1]–[5].

Для графов с p-достижимостью предложена конструкция развертки — вспомогательного графа. Это позволяет сводить решение задачи о кратчайших путях, удовлетворяющих условию p-достижимости, и задачи о случайных блужданиях по таким путям к решению задачи о кратчайших путях и о случайных блужданиях на его развёртке без ограничений на достижимость. Схема сведения подробно описана в [1].

Рассмотрен граф-решетка с 2-ограничениями на достижимость (множество U_1 — горизонтальные дуги, а множество U_2 — вертикальные дуги). Регулярная конструкция графа-решётки позволила найти количество 2-ограниченных путей, соединяющих пары вершин решетки без перехода к развертке.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ерусалимский Я. М.* Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения / Я.М. Ерусалимский, В.А. Скороходов, М.В. Кузьминова, А.Г. Петросян / Ростов н/Д: ЮФУ. 2009. 195 с.

2. *Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А.* Графы с вентильной достижимостью. Марковские процессы и потоки в сетях // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2003, №2, стр. 3–5.

3. *Ерусалимский Я.М.* Общий метод решения задач о достижимости на ориентированных графах // Известия вузов.Северо-Кавказский регион, ест. науки, 2000, №3, стр. 62-63.

4. *I.M. Erusalimskiy.* Graph–lattice: random walk and combinatorial identities // Boletin de la Sociedad Matem?tica Mexicana, 2016, V. 22, Issue 2, pp. 329–335.

5. *I.M. Erusalimskiy.* 2-2 ways on a graph-lattice // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения–VII, материалы конференции, Ростов-на-Дону, 2017, стр. 144–145.

Ж. М. Петрова, Б. Я. Штейнберг (Южный Федеральный университет, Россия)

jumana.abukhalil@gmail.com borsteinb@mail.ru

ПЕРЕНОС ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ВЫРАВНИВАНИЯ НУКЛЕОТИДНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В данной работе получен параллельный алгоритм выравнивания последовательностей, учитывающий иерархию памяти. Задача выравнивания последовательностей возникает в биоинформатике и при анализе больших текстов на естественных языках (например, при анализе социальных сетей). Алгоритм ориентирован на многоядерный процессор с общей памятью и возможностью векторизации.

В работе рассматривается модель вычислительной системы, обладающая несколькими ядрами, векторными регистрами и, хотя бы, двумя уровнями кэш-памяти. Будем считать, что у процессора есть кэш-большой медленный (низкого уровня) и малый-быстрый (высокого уровня). При этом, большой-медленный кэш является общим для всех вычислительный ядер, малый-быстрый – у каждого вычислительного ядра свой.

Для решения проблемы переносимости и увеличения эффективности программы выравнивания выполнен переход к блочным вычислениям (тайлингу) нескольких уровней. Исходная задача разбивается на мелкие подзадачи, у каждой их которых данные попадают в кэш-память.

Для повышения производительности программы при выполнении на системах с векторными регистрами проведена векторизация кода. Переразмещение данных внутри каждого блока позволяет применять векторные операции. Вычисления внутри каждого блока выполняются в векторных регистрах. Следует отметить, что такой такое совмещение векторных и блочных вычислений повысило быстродействие программ выравнивания в два раза для последовательностей длины 200 000, в случае парного выравнивания, и 15 000, в случае множественного выравнивания. При этом, объем используемой памяти увеличился незначительно.

Анализ переносимости параллельной программы выравнивания последовательностей без потери эффективности представлен в [1].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Абу-Халил Ж. М., Гуда С. А., Штейнберг Б. Я.* Перенос параллельных программ с сохранением эффективности. «Открытые системы СУБД». 2015. №. 4, стр. 18–19.

Е. В. Пучков, Г. И. Белявский (Ростов-на-Дону, Россия)
puchkoff@i-intellect.ru, beliavsky@hotmail.com

СТРУКТУРНЫЕ МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Последние годы нейронные сети продемонстрировали впечатляющие результаты, например, обработка естественного языка, компьютерное зрение, распознавание речи, анализ временных рядов. Одними из самых мощных в обнаружении зависимости в данных последовательностей являются рекуррентные нейронные сети и особенно долго-краткосрочная память (LSTM)[1], которая хорошо работает с временными данными с долгосрочными зависимостями благодаря механизму внутренней памяти. Не секрет, что этот успех основан не только на возможностях архитектуры сети, но и связан с качественной предобработкой исходных данных. Высокоуровневые представления временных рядов очень часто дают больше информации о поведении процесса, чем их абсолютные значения.

В данной работе основное внимание уделяется изучению и прогнозированию локальных тенденций во временных рядах с помощью рекуррентных нейронных сетей LSTM. Для предварительной предобработки данных использованы кусочно-линейная аппроксимация [2], как, пожалуй, наиболее часто используемый метод обработки данных, кусочно-логарифмическая аппроксимация, локальные главные компоненты [3], динамическое преобразование Хафа [4], адаптированные авторами для их использования с LSTM.

Предполагается, что последовательность исторических локальных тенденций описывает долгосрочную взаимосвязь во временном ряду и, таким образом, естественно влияет на изменение следующего локального тренда.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-01-00888 а.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Hochreiter Sepp, Schmidhuber Jurgen* Long short-term memory. Neural computation, 9(8): 1735–1780, 1997.

2. *Keogh E., Chu S., Hart D., Pazzani M.* Segmenting time series: A survey and novel approach, Data mining in time series databases, 2004, 1-21.

3. *Belyavskiy G., Puchkov E.* Nonlinear Principal Component Analysis Approach to Pattern Recognition // Modeling of Artificial Intelligence, 2016, Vol.(9), Is. 1, pp. 24-32.

4. *Canny J. F.* A computational approach to edge detection. IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 8:679-698, 1986.

Л. В. Сахарова, М. Б. Стрюков (Ростов-на-Дону)
L_Sakharova@mail.ru

НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ РЕГИОНА НА ПРИМЕРЕ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ

Разработана методика оценки экологического благополучия региона на основе пяти сфер разнородных показателей, таких как: состояние атмосферы в крупных городах, качество воды, природопользование в регионе, влияние экологической среды на здоровье населения, динамика катастроф в регионе. В качестве исходных данных использованы временные ряды соответствующих показателей по Ростовской области. Методика основана на применении стандартных нечетких многоуровневых [0,1]- классификаторов. Она позволяет проанализировать каждую из сфер по комплексу наиболее важных показателей, а также сформировать числовую оценку сферы на основе учета как уровней показателей, так и их динамики. Используемая система нечетко-логических выводов позволяет агрегировать сформированные оценки в итоговую оценку региона, устанавливающую уровень его экологического благополучия и позволяющую ранжировать регионы на основе полученных оценок.

Алгоритм формирования комплексной оценки объекта на основе совокупности показателей включает в себя пять этапов. **1.** Введение в рассмотрение лингвистической переменной «комплексная оценка состояния объекта на основе совокупности показателей», определение ее универсального множества, терм-множества, функций принадлежности термов. **2.** Формирование списка значимых показателей, расчет нормированных значений показателей. В зависимости от постановки задачи применяются две разновидности нечетких многоуровневых [0,1]- классификаторов: статические и динамические. Статические классификаторы используются для оценки уровня оцениваемого качества объекта при условии существования эталона оценивания. Динамические классификаторы применяются для анализа изменения оцениваемого качества во времени на основе временных рядов статистических данных в отсутствии эталона. **3.** Определение лингвистических переменных «уровни показателей». **4.** Ранжирование показателей на основе экспертных оценок, расчет их весовых коэффициентов. **5.** Агрегирование нормированных значений показателей в комплексную оценку состояния объекта, лингвистическое распознавание полученной числовой оценки.