Материалы докладов

международной конференции
Современные методы и проблемы
теории операторов и гармонического
анализа и их приложения — IX
Ростов-на-Дону, 22-25 апреля 2019 года
www.otha.sfedu.ru/conf2019
E-mail: otha.conference@gmail.com

Ростов-на-Дону
2019

УДК 519.71:519.72:004

Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения

С 34: Материалы IX международной конференции “Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения IX” (г. Ростов-на-Дону, 22–25 апреля 2019г.) / Под редакцией Гиля А.В. — Электрон. текстовые дан. — Ростов н/Д: Издательство Ростовского отделения Российской инженерной академии, 2019. — 134 с. — Режим доступа: http://rozmisly.ru/,
http://otha.sfedu.ru/upload/documents/abstracts/tethis_conf_2019_SFEDU.pdf

ISBN 978-5-6040260-1-4

Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis

Proceedings of the IX international conference "Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis IX"(Rostov-on-Don, 22 - 25 April, 2019).

ISBN 978-5-6040260-1-4

Table of content

Session I

Functional Analysis and Operator Theory

A. Almeida (Aveiro, Portugal)
jaralmeida@ua.pt

HOMOGENEOUS VARIABLE EXPONENT BESOV AND TRIEBEL-LIZORKIN SPACES

We introduce homogeneous Besov and Triebel-Lizorkin spaces with variable indexes. We show that their study reduces to the study of inhomogeneous variable exponent spaces and homogeneous constant exponent spaces. Corollaries include trace space characterizations and Sobolev embeddings. This is based on joint work with L. Diening and P. Hästö.

E. G. Bakhtigareeva, M. L. Goldman (Moscow, Russia)
bakhtigareeva-eg@rudn.ru, seulydia@yandex.ru

MODULAR INEQUALITIES FOR THE HARDY OPERATOR IN A WEIGHTED ORLICZ SPACE

Let $M=M(R_+)$ be the set of Lebesgue-measurable functions,
$M_+ = \{f \in M : f \geq 0 \quad a.e.\}$; let u, v, w be weights from
$\dot{M}_+ = \{f \in M : 0 < f < \infty\}$. Let $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty]$ be the N-function(see [1] for details).*Recall that Orlicz space is* $L_{\Phi,v} = \left\{ f \in M : \|f\|_{\Phi,v} < \infty \right\}$, where for $\lambda > 0$, $v \in \dot{M}_+$

$$\|f\|_{\Phi,v} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \int\limits_0^\infty \Phi\left(\lambda^{-1}|f(x)|\right) v(x)\, dx \leqslant 1 \right\}.$$

Consider the cone $\Omega = \{ f \in L_{\Phi,v} : \ 0 \leqslant f \downarrow \}$.

$$V(t) := \int\limits_0^t v d\tau, 0 < V(t) < \infty, \quad \forall t \in R_+, V(+\infty) = \infty.$$

For $b \in R_+$ consider $\delta_b(t) := V^{-1}(bV(t))$, $\delta_b^{-1}(t) = \delta_{b^{-1}}(t), \quad t \in R_+$. For $a \in (0,1)$ $\exists m \in N_0 : V(t)^{-(m+1)}(t - \delta_a(t)) \downarrow, \quad t \in R_+$. For $\rho \in R_+$ we consider

$$k_1(t,\rho) = \frac{a^{m+1}}{V(\rho)^{m+1}} \begin{cases} t-\rho, & \rho < t \leq \delta_{a^{-1}}(\rho), \\ \delta_{a^{-1}}(\rho) - \rho, & t > \delta_{a^{-1}}(\rho); \end{cases}$$

$$k_2(\rho,y) = \frac{a}{V(y)} \begin{cases} \delta_{a^{-1}}(y) - y, & 0 < y \leq \delta_a(\rho), \\ \rho - y, & \delta_a(\rho) < y < \rho. \end{cases}$$

$$\Phi_1 \prec \Phi_2 \Leftrightarrow \exists C_0 \in R_+ : \forall a_i \geq 0 \sum_i \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(a_i) \leq C_0 \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(\sum_i a_i).$$

Theorem 1. Under the notation and conditions above let T be the Hardy operator, i.e. $T(f;t) = \int_0^t f(\tau)d\tau, \quad t \in R_+$; Ψ_1, Ψ_2 be the complementary N-functions for the N-functions Φ_1, Φ_2 respectively, $\Phi_1 \prec \Phi_2$. Then,inequality

$$\Phi_2^{-1}\left\{\int_{R_+} \Phi_2\left(wTf\right) udt\right\} \leq \Phi_1^{-1}\left\{\int_{R_+} \Phi_1(c_1 f) vdt\right\}, \quad f \in \Omega$$

is equivalent to the following two conditions: for all $\epsilon, \rho \in R_+$:

$$\Phi_2^{-1}\left\{\int_\rho^\infty \Phi_2\left(\frac{w(\tau)}{C}\left\|\frac{k_2(\rho,y)\chi_{(0,\rho)}(y)}{\epsilon}\right\|_{\Psi_1,\frac{\epsilon v}{a}}\right) u(\tau)d\tau\right\} \leq \Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{\epsilon}\right),$$

$$\Phi_2^{-1}\left\{\int_\rho^\infty \Phi_2\left(\frac{w(\tau)}{C}\left\|\left(\frac{V(y)}{a}\right)^m \frac{\chi_{(0,\rho)}(y)}{\epsilon}\right\|_{\Psi_1,\frac{\epsilon v}{a}} k_1(\tau,y)\right) u(\tau)d\tau\right\} \leq \Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{\epsilon}\right).$$

Here $C = C(C_0, c_1, a, m) \in R_+$. Inner norms $\|\cdot\|_{\Psi_1,\frac{\epsilon v}{a}}$ in an Orlicz space $L_{\Psi_1,\frac{\epsilon v}{a}}$ are taken by y.

This work was supported by Russian Foundation for Basic Research (pr. № 18-51-06005 Аз_а).

R E F E R E N C E S

1. *M. M. Rao, Z. D. Ren.* Theory of Orlicz spaces. New York: M. Dekker, 1991.

2. *E.G. Bakhtigareeva, M. L. Goldman.* Weighted inequalities for Hardy-type operators on the cone of decreasing functions in an Orlicz space. Mathematical notes, 2017, v. 102, iss. 5, pp. 28–36.

A. A. Belyaev (Khimki, Russia)
alexei.a.belyaev@gmail.com

LOCALIZATION PROPERTIES OF SOBOLEV–TYPE SPACES AND CONSTRUCTIVE DESCRIPTION OF MULTIPLIERS

We study the problem of finding a constructive description of multiplier spaces when multipliers act in the scale of Sobolev–type spaces. Crucial role of Sobolev–type spaces' localization properties in investigating this problem is emphasized.

We examine the scales of spaces $A^s_{p,\,q,\,(r)}(\mathbb{R}^n)$, generated by the scale $A^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$ where $A^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$ is either Besov space $B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$ or Lizorkin–Triebel space $F^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$ and $r \in [1;\, +\infty]$ is a localization index. This scale can be seen as a partial case of a more general construction of decomposition Banach space of distributions (see [1; Definition 2.4]) with its "local component" being $A^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$ and "global component" being the sequence space l_r.

It turns out that the difference in localization properties between Lizorkin–Triebel spaces and Besov spaces is critical for the coincidence of multiplier space

$$M[A^{s_1}_{p_1,\,q_1}(\mathbb{R}^n) \to A^{s_2}_{p_2,\,q_2}(\mathbb{R}^n)]$$

with the space of uniformly localized multipliers, acting from $A^{s_1}_{p_1,\,q_1}(\mathbb{R}^n)$ to $A^{s_2}_{p_2,\,q_2}(\mathbb{R}^n)$, to hold true. The aforementioned coincidence provides an effective method of obtaining a constructive description of the multiplier space

$$M[A^{s_1}_{p_1,\,q_1}(\mathbb{R}^n) \to A^{s_2}_{p_2,\,q_2}(\mathbb{R}^n)]$$

since it allows us to establish criteria of the validity of the embeddings

$$A^{s_3}_{p_3,\,q_3,\,(\infty)}(\mathbb{R}^n) \subset M[A^{s_1}_{p_1,\,q_1}(\mathbb{R}^n) \to A^{s_2}_{p_2,\,q_2}(\mathbb{R}^n)]$$

in terms of multiplicative functional estimates.

Applying these criteria, we obtain descriptions

$$M[A^{s_1}_{p_1,\,q_1}(\mathbb{R}^n) \to A^{s_2}_{p_2,\,q_2}(\mathbb{R}^n)] = A^{s_2}_{p_2,\,q_2,\,(\infty)}(\mathbb{R}^n) \cap A^{-s_1}_{p_1,\,q_1,\,(\infty)}(\mathbb{R}^n)$$

under some natural additional assumptions in a case when $A^{s}_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$ is either Bessel potential space or more general Lizorkin–Triebel space.

The case of Bessel potential spaces was previously considered in the papers [2] (the case of the same sign smoothness indices] and [3] (the case of the smoothness indices of different sign].

This work is supported by the grant “State support of the leading scientific schools” NS–6222.2018.1.

REFERENCES

1. *Feichtinger H., Gröbner P.,* Banach spaces of distributions defined by decomposition methods. Math. Nachr. 1985. Vol. 123, pp. 97 – 120.

2. *Belyaev A. A., Shkalikov A. A.,* Multipliers in spaces of Bessel potentials: the case of indices of nonnegative smoothness. Math. Notes. 2017. Vol. 102 : 5 – 6, pp. 632 – 644.

3. *Belyaev A. A., Shkalikov A. A.,* Multipliers in Bessel potential spaces with smoothness indices of different sign. St. Petersburg Math. J. 2019. Vol. 30, pp. 203 – 218.

E. I. Berezhnoĭ (Yaroslavl’, Russia)
ber@uniyar.ac.ru

DYADIC SPACES OF MORREY

We fix $Q^0 = [-0.5; 0.5]^n$ unit cube in R^n. We divide the cube Q^0 into 2^n identical cubes Q^1_j and put $\overline{Q^1} = \{Q^1_j\}$, $j = 1, ..., 2^n$. Next, we divide each cube from $\overline{Q^1}$ into 2^n identical cubes Q^2_j and put $\overline{Q^2} = \{Q^2_j\}$, $j = 1, ..., 2^{2n}$, etc. We obtain a sequence of collections of cubes $\overline{Q} = \{\overline{Q^j}\}_0^\infty$, $(\overline{Q^0} = \{Q^0\})$. For each points of $t \in Q^0$ by $Q(t)$ we denote the collection of nested cubes $Q(t) = \{Q^j(t)\}_0^\infty$ containing the point t.

Definition. *Let an ideal space X on Q^0 and an ideal sequence space of l with the standard basis $\{e^j\}_0^\infty$ be given.*

The dyadic Morrey space $M^d_{l,X}$ consists of those $f \in L^{1,loc}(Q^0)$ for which the following norm is finite:

$$\|f|M^d_{l,X}\| = \sup_{t\in Q^0} \| \sum_{j=0}^{\infty} e^j \|f\chi(Q^j(t))|X\||l\|.$$

Let us demonstrate the effectiveness of the introduced concept by the example of solving one extreme problem.

Now let X be a symmetric space on Q^0. For each $j = 0, 1, 2, ...$ we fix a cube Q_1^j from the collection $\overline{Q^j}$ and represent Q_1^j as the union of cubes from the collection $\overline{Q^{j+1}}$: $Q_1^j = \cup_{i=1}^{2^n} Q_i^{j+1}$. Define the numbers by equalities

$$\alpha_{j+1} = \inf\{max_{i=1,2,\dots,2^n}\{\|f\chi(Q_i^{j+1})|X\|\} : \|f\chi(Q_1^j)|X\| = 1\}.$$

Theorem. *Let the function $f \in M^d_{l,X}$ be given. Fix $j = 0, 1, 2, \dots$ and some cube Q^j from the collection $\overline{Q^j}$. Then the exact inequality are fulfilled*

$$\|f\chi(Q^j)|M^d_{l,X}\| \geq \|f\chi(Q^j)|X\| \|\sum_{i=0}^{j} e^i + \sum_{i=j+1}^{\infty} (\Pi^i_{k=j+1}\alpha_j)e^i|l\|.$$

Research supported by the Russian Fond of Fundamental Investigations project code №18-51-06005.

REFERENCES

1. *Berezhnoĭ E. I.* A discrete version of local Morrey spaces. Izvestiya: Mathematics 2017, Vol. 81, No. 1, pp. 1-28 (Izvestiya RAN: Ser. Mat. 2017, Vol. 81, No. 1, pp. 3-31 (Russian))

V. I. Chilin (Tashkent, Uzbekistan), M. A. Muratov (Simferopol, Russia)
vladimirchil@gmail.com; mamuratov@gmail.com

COMPLETELY ADDITIVE LINEAR MAPPINGS IN ALGEBRAS OF MEASURABLE OPERATORS

It is well known that any positive completely additive linear mapping acting in von Neumann algebra is a normal mapping (see [2, Ch. III, §3]). In this note, we establish the normality of each completely additive positive linear mapping acting in $*$-algebras $S(\mathcal{M})$ of measurable operators affiliated with a von Neumann algebra $\mathcal{M}$ (see [1]).

Let $\mathcal{M}$ be an arbitrary von Neumann algebra, acting in a Hilbert space H, and let $S(\mathcal{M})$ be the $*$-algebra of measurable operators affiliated with $\mathcal{M}$. Partial order in $S_h(\mathcal{M}) = \{x \in S(\mathcal{M}) : x = x^*\}$ is defined by a convex cone $S_+(\mathcal{M}) = \{ x \in S_h(\mathcal{M}) : (x(\xi), \xi) \geq 0 \ \forall \ \xi \in D(x)\}$, where $D(x)$ is the domain of the operator $x \in S(\mathcal{M})$. Endowed with the locally measure topology $t(\mathcal{M})$ $*$-algebra $S(\mathcal{M})$ is a Hausdorf topological $*$-algebra (see, for example, [1]).

Positive linear mapping $T : S(\mathcal{M}) \to S(\mathcal{M})$ is called completely additive (c.a.m) (respectively, normal) if $T(p) = \sup_{\alpha\in A} T(p_\alpha)$ for any increasing net $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{M}$ of projections with $p_\alpha \uparrow p$ (respectively, $T(x) = \sup_{\alpha\in A} T(x_\alpha)$ for any increasing net $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset S_+(\mathcal{M})$ with $x_\alpha \uparrow x$).

Theorem 1. *Any positive c.a.m.* $T : S(\mathcal{M}) \to S(\mathcal{M})$ *is normal and continuous with respect to the topology* $t(\mathcal{M})$.

Corollary 1. *Any c.a.* $*$*-homomorphism* $\Phi : S(\mathcal{M}) \to S(\mathcal{M})$ *is normal and continuous with respect to the topology* $t(\mathcal{M})$*, in particular, the graph* $\Gamma_\Phi = \{(x, \Phi(x)) : x \in S(\mathcal{M})\}$ *is closed in* $(S(\mathcal{M}), t(\mathcal{M})) \times (S(\mathcal{M}), t(\mathcal{M}))$.

Theorem 2. *Let* $\Phi : S(\mathcal{M}) \to S(\mathcal{M})$ *be a* $*$*-homomorphism, and let the graph* Γ_Φ *be closed in* $(S(\mathcal{M}), t(\mathcal{M})) \times (S(\mathcal{M}), t(\mathcal{M}))$*. Then* $\Phi : S(\mathcal{M}) \to S(\mathcal{M})$ *is normal* $*$*-homomorphism and* Φ *is continuous with respect to the topology* $t(\mathcal{M})$.

REFERENCES

1. *Muratov M. A., Chilin V. I.* Topological algebras of measurable and locally measurable operators, Modern mathematics. Fundamental directions, (Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya). 2016. Vol. 61, pp. 115–163.
2. *Takesaki M.* Theory of operator algebras I. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1979.

E. D. Gal'kovskii, A. I. Nazarov (St. Petersburg, Russia)
al.il.nazarov@gmail.com

A FIRST-ORDER TRACE FORMULA FOR DIFFERENTIAL OPERATORS ON A SEGMENT FOR THE PERTURBATION BY A COMPLEX-VALUED MEASURE

A new trace formula for regular differential operators on a segment is obtained in the case where the last coefficient is perturbed by a finite complex-valued measure. Arbitrary Birkhoff regular boundary conditions are considered for the operators of order $n \geq 2$. For $n = 2$ we generalize an earlier result by A. Shkalikov and A. Savchuk. A completely new phenomenon is discovered in the case of even $n \geq 4$. Namely, the formula contains a new term generated by δ-potential at the midpoint of the segment.

REFERENCES

1. *Gal'kovskii E. D., Nazarov A. I.* A general trace formula for a regular differential operator on a segment with the last coefficient perturbated by a finite signed measure. Algebra & Analysis. 2018. Vol. 30, No. 3, pp. 30–54 (Russian). English transl: St. Petersburg Math. J. 2019. Vol. 30, No. 3.
2. *Gal'kovskii E. D.* A trace formulafor a high order differential operator on a segment under perturbation of the lowest-order coefficient by a finite signed measure. Functional Analysis and Its Applications. 2019. Vol. 53. To appear.

A. V. Gil (Rostov-on-don)
gil@sfedu.ru

COMPLEX DEGREES OF ONE DIFFERENTIAL OPERATOR ASSOCIATED TO THE HELMHOLTZ OPERATOR

Let
$$G_{\overline{\lambda}} = b^2 I + \Delta - \sum_{k=1}^{m} i\lambda_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad b > 0 \tag{1}$$
generalized Helmholtz operator in $\mathbb{R}^n$, where $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — Laplace operator, $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $0 < \lambda_k < 1$, $1 \leq m \leq n$. Complex powers of the operator $G_{\overline{\lambda}}$ from

negative the real parts of the functions $\varphi(x) \in \Phi$ defined as multiplier operators, the action of which in Fourier images is reduced to multiplication by the corresponding degree of the symbol of this operator:

$$(\widehat{G_{\overline{\lambda}}^{-\alpha/2}\varphi})(\xi) = \left(b^2 - |\xi|^2 + i\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \xi_k^2\right)^{-\alpha/2} \widehat{\varphi}(x), \tag{2}$$

$\xi \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$.

The obtained integral representations of the complex powers (2) as integrals of potential type $(B_{\overline{\lambda}}^{\alpha}\varphi)(x)$ with nonstandard metric.

The negative powers of the operator $G_{\overline{\lambda}}$ on functions $\varphi(x) \in L_p$ are understood as potentials $(B_{\overline{\lambda}}^{\alpha}\varphi)(x)$.

The boundedness of the $B_{\overline{\lambda}}^{\alpha}$ operator from L_p to $L_p + L_s$ is shown for $1 \le p < \frac{2n-m}{n+\mathrm{Re}\ \alpha-m-1}$, $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, $\frac{2n-m}{n-\mathrm{Re}\ \alpha+1} < q < \infty$ if $m < n$ and L_p to L_p at $1 \le p \le \infty$ in the case of $m = n$.

Within the framework of the AEO method, the potential reversal $B_{\overline{\lambda}}\varphi$, $\varphi \in L_p$ is constructed, and the image $B_{\overline{\lambda}}(L_p)$ is described in terms of inverting constructions.

V. Guliyev. (Institute of Mathematics and Mechanics, Baku, Azerbaijan; Dumlupinar University, Kirsehir, Turkey)
vagif@guliyev.com

CHARACTERIZATIONS OF FRACTIONAL INTEGRAL OPERATOR AND ITS COMMUTATORS IN GENERALIZED ORLICZ-MORREY SPACES ON CARNOT GROUPS

In this talk, we shall give a necessary and sufficient conditions for the strong and weak boundedness of the fractional integral operator defined in Carnot groups on Orlicz and generalized Orlicz-Morrey spaces. Moreover, we also give characterizations for the boundedness of the commutators of fractional integral operators defined in Carnot groups on Orlicz and generalized Orlicz-Morrey spaces [1,2,3].

This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (the Agreement No. 02.a03.21.0008).

R E F E R E N C E S

1. *Guliyev V. S., Deringoz F. and Hasanov S. G.* Riesz potential and its commutators on Orlicz spaces. J. Inequal. Appl. 2017. Paper No. 75, 18 pp.

2. *A. Eroglu, V.S. Guliyev, J.V. Azizov*, Characterizations for the fractional integral operators in generalized Morrey spaces on Carnot groups. Math. Notes. 2017. 102 (5), pp. 127-139.

3. *V.S. Guliyev, I. Ekincioglu, E. Kaya, Z. Safarov*, Characterizations for the fractional maximal operator and its commutators in generalized Morrey spaces on Carnot groups. Integral Transforms and Special Functions. 2019. 30 (6) , pp. 453-470.

H. M. Hayrapetyan, S. A. Aghekyan (Yerevan, Armenia)
hhayrapet@gmail.com, smbat.aghekyan@gmail.com

ABOUT RIEMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM IN WEIGHTED SPACES

The paper considers Riemann boundary value problem in the half-plane in the classes of $C(\rho)$, $L^p(\rho)(1 \le p < \infty)$, when weight function has infinite number of zeros on real axis, as follows:

Find analytic in upper and lower half-planes function $\Phi(z)$ such that

$$\lim_{y \to +0} \|\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy) - f(x)\|_X = 0,$$

where $\|\cdot\|_X$ - is a norm of the spaces $C(\rho)$ or $L^p(\rho)$.

It is established that the problem has infinite number of linearly independent solutions in $L^1(\rho)$ and the general solution is determined in $L^p(\rho), (1 \le p < \infty)$ and $C(\rho)$.

REFERENCES

1. *Hayrapetyan H. M. and Aghekyan S. A.* On a Riemann Boundary Value Problem in the Half-plane in the Class of Weighted Continuous Functions. Proceedings of the NAS of Armenia. 2019. Vol. 54, No. 2, pp. 3–18.

2. *Hayrapetyan H. M.* On a boundary value problem with infinite index. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. (In print).

A. G. Kamalyan (Yerevan State University and Institute of Mathematics NAS, Armenia)
kamalyan_armen@yahoo.com

L-CONVOLUTION TYPE OPERATORS

The notion of the L-convolution operator is introduced by changing the Fourier operator in the definition of the convolution operator to the operator intertwining the Sturm-Liouville operator L with the multiplication operator. Along the same lines, the L-Wiener-Hopf operator. We will discuss the problem of Fredholm and invertibility.

A. Karapetyants (Rostov-on-Don, Russia), S. Samko (Faro, Portugal), K. Zhu (Albany, USA)
karapetyants@gmail.com

A CLASS OF HAUSDORFF - BEREZIN OPERATORS ON THE UNIT DISC

We introduce and study a class of Hausdorff-Berezin operators on the unit disc based on Haar measure (that is, the Möbius invariant area measure)

$$\mathbb{K}f(z) \;=\; \int_D K(w) f(\varphi_z(w))\, dH(w),$$

where $\varphi_z(w) = \frac{z-w}{1-\bar{z}w}$, $z, w \in D$. The study is inspired by the well-known theories of some special classes of integral operators, related to each other in a sense, namely the class of operators with homogeneous kernels in R^n with degree of homogeneity $-n$ and the class of Hausdorff operators.

For operators with homogeneous kernels we refer to the books by N.Karapetiants and S.Samko (1988 in Russian, and 2001 English edition), and for the theory of Hausdorff operators we mention the paper by Liflyand and Moriz (2000).

We discuss certain algebraic properties of these operators and obtain boundedness conditions for them. We also reformulate the obtained results in terms of ordinary area measure.

Acknowledgments: Alexey Karapetyants acknowledges the support of the Fulbright Research Scholarship program and the hospitality of the Mathematics Department at the State University of New York at Albany during the time when this research was completed. Alexey Karapetyants and Stefan Samko are partially supported by the Russian Foundation for Fundamental Research (Grant Number 18-01-00094). Kehe Zhu is supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Number 11720101003) and by STU Scientific Research Foundation for Talents (Grant No. NTF17009).

I. Louhichi (American University of Sharjah, UAE)
ilouhichi@aus.edu

PRODUCT OF TOEPLITZ OPERATORS ON THE BERGAMN SPACE

In this talk we shall discuss under which conditions the product of two Toeplitz operators is equal to another Toeplitz operator. This question is one of the major open problems in the Theory of Toeplitz Operators. Although partial results have been obtained, we are still far from a complete answer. Throughout the talk, examples shall be provided and future research directions shall be discussed.

M. V. Maliutina (Irkutsk, Russia)
fanofevanescence2008@yandex.ru

PERIODIC SOLUTIONS OF LINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF CONVOLUTION TYPE

Let us consider the following linear Volterra integral equations

$$\int_0^x \mathscr{K}(x-t)\varphi(t)dt = f(x), \tag{1}$$

$$\varphi(x) + \int_0^x \mathscr{K}(x-t)\varphi(t)dt = f(x), \tag{2}$$

of the first kind and the second kind respectively. Here $\mathscr{K}$ and f are given continuous functions of the argument $x \geq 0$. The problems of the existence of periodic solutions of equations (1) and (2) are studied. We have proved the following theorem, which is an analogue of the classical theorem on periodic solutions of ordinary differential equations (see the monograph [1, p. 482]).

Theorem. *Suppose the function $\mathcal{E}$ is continuous over the segment $[0;T]$ and satisfies the equation (1) (or (2)) on this segment. Then the equation (1) (or (2)) has a periodic solution with a period T if and only if for any $x \geq 0$ it is true that*

$$\int\limits_0^T \mathscr{K}(x+T-t)\mathcal{E}(t)dt = f(x+T) - f(x).$$

This solution is given by

$$\varphi(x) = \mathcal{E}\big(x-(n-1)T\big),\ (n-1)T \leq x < nT,\ n \in \mathbb{N},$$

i. e. it is T-periodic extension of the function $\mathcal{E}$ on the semi-axis $[0;+\infty)$.

For equaton (2) from this theorem it follows that $\mathcal{E}(0) = \mathcal{E}(T)$. It means that a periodic solution of the equation (2) is continuous over all semi-axis $[0;+\infty)$. Equation (1) admits a periodic solution, which is discontinuous at the points $x = nT$, where $n \in \mathbb{N}$. For example, if $\mathscr{K}(x) = 1$, and $f(x) = \{x\}^2 + \lfloor x \rfloor$, then the equation (1) has a 1-periodic solution $\varphi(x) = 2\{x\}$ with jump discontinuities at integer points.

REFERENCES

1. *Erugin N. P.* The book for reading on general course of differential equations. Minsk: Nauka i Tekhnika. 1979. (Russian)

S. N. Melikhov (Rostov-on-Don, Vladikavkaz, Russia)
melih@math.rsu.ru

CONVOLUTIONS IN SPACES OF INFINITELY DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

We study continuous linear operators commuting with the backward shift operator (Pommier operator) in the space of entire functions of exponential type, realizing the strong dual of the Fréchet space of infinitely differentiable functions on a real interval. A description of such operators in general classes of weighted (LF)-spaces of entire functions is obtained in [1]. They are given by a continuous linear functional on this space of entire functions, and hence, up to conjugate to the Fourier-Laplace transform, by an infinite differentiable function on the initial interval. A complete characterization of functionals, which are define an isomorphism, is received. It is proved that an isomorphism is given by functions that are not equal to 0 at the origin (and only by them). In the proof of the corresponding criterion an essential role a method plays which exploits the Fredholm theory in Banach spaces. A class of continuous of infinitely differentiable functions on the input interval is selected that define operators of the mentioned commutant which close to isomorphism. Such operators have a finite-dimensional kernel. For an interval other than the real line, we also define the class of operators of the commutant of the Pommiez operator, which are not surjective. The adjoint to the backward shift operator is realized in the space of infinitely differentiable functions as an operator obtained by the fixing one factor in the Duhamel product (convolution). This product is also used in the proofs (see [2]). In contrast to previously studied situations the backward shift operator has no cyclic vectors in the input space of entire functions.

REFERENCES

1. *Ivanova O. A., Melikhov S. N.* On Operators Commuting with the Pommiez Type Operator in Weighted Spaces of Entire Functions. St. Petersburg Math. J. 2017. Vol. 28, No. 2, pp. 209–224.

2. *Ivanova O. A., Melikhov S. N.* The Commutant of the Pommiez Operator in a Space of Entire Functions of Exponential Type and Polynomial Growth on the Real Line. Vladikavkaz Math. J. 2018. Vol. 20, No 3, pp. 48–56.

M. N. Oreshina (Lipetsk, Russia)
m_oreshina@mail.ru

ON A FUNCTIONAL CALCULUS FOR TWO SELF-ADJOINT OPERATORS

Let $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ be Hilbert spaces and $A\colon \mathbf{H}_1 \to \mathbf{H}_1$, $B\colon \mathbf{H}_2 \to \mathbf{H}_2$ be bounded self-adjoint operators. Due to spectral theorem [1, 2] there exist resolutions of the identity E^A and E^B associated with operators A and B which generate (scalar) functional calculi

$$\varphi^A(g) = \int_{\sigma(A)} g(\lambda)\, dE^A(\lambda), \qquad \varphi^B(h) = \int_{\sigma(B)} h(\mu)\, dE^B(\mu).$$

In the Hilbert tensor product $\mathbf{H}_1 \overline{\otimes}_2 \mathbf{H}_2$ we construct a functional calculus

$$\widetilde{\varphi}(f) = \int_{\sigma(B)} \int_{\sigma(A)} f(\lambda,\mu)\, dE^A(\lambda) \otimes dE^B(\mu),$$

such that

$$\langle \widetilde{\varphi}(f)(x \otimes y), (x' \otimes y') \rangle_{\mathbf{H}_1 \overline{\otimes}_2 \mathbf{H}_2} = \int_{\sigma(B)} \int_{\sigma(A)} f(\lambda,\mu)\, dE^A_{x,x'}(\lambda)\, dE^B_{y,y'}(\mu),$$

where $x, x' \in \mathbf{H}_1$, $y, y' \in \mathbf{H}_2$, and the measures $E^A_{x,x'}$, $E^B_{y,y'}$ are defined by the relations $E^A_{x,x'}(\omega) = \langle E^A(\omega)x, x' \rangle_{\mathbf{H}_1}$, $E^B_{y,y'}(\omega) = \langle E^B(\omega)y, y' \rangle_{\mathbf{H}_2}$. We discuss properties of the functional calculus $\widetilde{\varphi}(f)$.

Theorem 1. *Let $g\colon \sigma(A) \to \mathbb{C}$, $h\colon \sigma(B) \to \mathbb{C}$ be essentially bounded Borel measurable functions. Then for the function $f(\lambda,\mu) = g(\lambda)h(\mu)$ the relation*

$$\widetilde{\varphi}(f) = \varphi^A(g) \otimes \varphi^B(h)$$

holds.

Analytic functional calculus for two operators acting in a Banach space is discussed in [3].

REFERENCES

1. *Rudin W.* Functional analysis. New York: McGraw-Hill. 1973.
2. *Helemskii A. Ya.* Lectures and exercises on functional analysis. Providence: American Mathematical Society. 2005.
3. *Kurbatov V. G., Kurbatova I. V., and Oreshina M. N.* Analytic functional calculus for two operators. April 2016, arXiv: 1604.07393.

J. S. Pashkova (Simferopol, Russia), B. A. Rubshtein (Beer-Sheva, Israel)
pashkova.kromsh@gmail.com, benzion@math.bgu.ac.il

MEAN ERGODIC THEOREMS IN REARRANGEMENT INVARIANT SPACES

Mean (Statistical) Ergodic Theorems ($\mathcal{MET}$) deal with the strong operator convergence of Cesáro sums $A_{n,T} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T^{k-1}$ of a Cesáro bounded operator T in a Banach space $\mathbf{E}$. Here we focus attention on case, when $\mathbf{E}$ be a symmetric space of measurable functions on a measure space $(\mathbf{\Omega}, \mu)$, while T be an absolute $(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$-contraction such that $T\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$.

Let $(\mathbf{\Omega}, \mu)$ be an infinite σ-finite non-atomic measure space, $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\mathbf{\Omega}, \mu)$ be the set of all μ-measurable functions $f\colon \mathbf{\Omega} \to \mathbb{R}$. A Banach space $\mathbf{E}$ of measurable functions on $(\mathbf{\Omega}, \mu)$ is called *symmetric* if

$$f \in \mathbf{L}_0\,,\; g \in \mathbf{E} \text{ and } f^* \le g^* \implies f \in \mathbf{E} \text{ and } \|f\|_{\mathbf{E}} \le \|g\|_{\mathbf{E}},$$

where f^* denotes the decreasing right-continuous rearrangement of $|f|$.

A linear operator $T\colon \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \to \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ is said to be an absolute contraction ($(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$-contraction) if T is a contraction in $\mathbf{L}_1$ and in $\mathbf{L}_\infty$ as well. The operator T is said to be positive if $Tf \ge 0$ for all $f \ge 0$. The operator T is called monotonely continuous in $\mathbf{E}$ if $f_n \uparrow f \in \mathbf{E}$ implies $Tf_n \uparrow Tf$. Every positive contraction in $\mathbf{L}_1$ is monotonely continuous, while a positive contraction T in $\mathbf{L}_\infty$ is monotonely continuous iff $T = S^*$ for some positive contraction S of $\mathbf{L}_1$.

We denote by $\mathcal{T}$ the set of all positive absolute contractions which are monotonely continuous in $\mathbf{L}_\infty$ and

$$\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}} := \{f \in \mathbf{E} : \{A_{n,T} f\}_{n=1}^\infty \text{ } is \text{ } norm \text{ } convergent \text{ } in \text{ } \mathbf{E}\},\; T \in \mathcal{T}.$$

An operator T is called mean ergodic if $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}} = \mathbf{E}$.

Theorem 1. *Let $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{\Omega}, \mu)$ a symmetric space an infinite σ-finite measure space $(\mathbf{\Omega}, \mu)$ and let $T \in \mathcal{T}$. Let $\mathbf{E}^0 = cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$ be the minimal part of $\mathbf{E}$.*

Assume that $\mathbf{E} \not\subseteq \mathbf{L}_\infty \not\subseteq \mathbf{E}$. Then $\mathbf{E}^0 \subseteq \mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}$, i.e. the sequence of Cesáro averages $\{A_{n,T} f\}_{n=1}^\infty$ is norm convergent in $\mathbf{E}$ for all $f \in \mathbf{E}^0$. In particular, if the space $\mathbf{E}$ is *minimal (i.e.* $\mathbf{E}^0 = \mathbf{E}$*) and* $\varphi_{\mathbf{E}}(0+) = 0$*, then* T *is mean ergodic on* $\mathbf{E}$*, where* $\varphi_{\mathbf{E}}$ *is the fundamental function* $\mathbf{E}$*.*

The theorem admits a partial converse if the considered operators are of the form $T = T_\theta$, where θ is an invertible measure preserving transformation (m.p.t.) of $(\mathbf{\Omega}, \mu)$.

A m.p.t. θ is said to be strictly conservative on $(\mathbf{\Omega}, \mu)$ if there exists $h \in \mathbf{L}_1^+$ such that $\{h > 0\} = \mathbf{\Omega}$ and $T_\theta h = h$. A m.p.t. θ is called aperiodic if

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega \in \mathbf{\Omega}\colon \theta^n\omega = \omega\}\Big) = 0.$$

Theorem 2. *Let* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{\Omega}, \mu)$ *a symmetric space an infinite* σ*-finite measure space* $(\mathbf{\Omega}, \mu)$ *and let* θ *be an invertible strictly conservative m.p.t. on* $(\mathbf{\Omega}, \mu)$*.*

Then $\mathbf{E} \nsubseteq \mathbf{E}_{\mathcal{MET}}^{T_\theta}$*, i.e. the sequence of Cesáro averages* $\{A_{n,T_\theta} f\}_{n=1}^{\infty}$ *is not norm convergent in* $\mathbf{E}$ *for some* $f \in \mathbf{E} \setminus \mathbf{E}^0$*.*

In particular, if T_θ *is mean ergodic on* $\mathbf{E}$ *then the space* $\mathbf{E}$ *is minimal.*

D. M. Polyakov (Vladikavkaz, Russia)
DmitryPolyakow@mail.ru

FOURTH-ORDER PERIODIC OPERATOR WITH MATRIX COEFFICIENTS[1]

Let $L_2^k[0,1] = L_2([0,1], \mathbb{C}^k) = L_2[0,1] \times \cdots \times L_2[0,1]$ (k times). The inner product in $L_2^k[0,1]$ is defined by

$$(f, g) = \sum_{j=1}^{k} \int_0^1 f_j(t)\overline{g_j(t)}\,dt, \quad f, g \in L_2^k[0,1].$$

We consider the operator $L_\theta : D(L_\theta) \subset L_2^k[0,1] \to L_2^k[0,1]$ determined by the differential expression

$$l(y) = y^{IV} - \mathfrak{A}(t)y'' - \mathfrak{B}(t)y$$

where $\mathfrak{A}(t) = (a_{pj}(t))_{p,j=1}^k$ and $\mathfrak{B}(t) = (b_{pj}(t))_{p,j=1}^k$ are $k \times k$ matrices and a_{pj}, $b_{pj} \in L_2[0,1]$. The domain $D(L_\theta) = \{y \in W_2^4([0,1], \mathbb{C}^k)\}$ is given by the quasiperiodic boundary conditions $y^{(j)}(1) = e^{i\pi\theta}y^{(j)}(0)$, $j = 0, 1, 2, 3$, where $\theta \in (0, 2)$, $\theta \neq 1$. By $\mathfrak{A}_0$ we denote the matrix $\mathfrak{A}_0 = (a_{0,pj})_{p,j=1}^k$, $a_{0,pj} = \int_0^1 a_{pj}(t)\,dt$, and suppose that this matrix is similar to the diagonal matrix.

The goal of this talk is to study some asymptotic formulas for eigen-values of the operator L_θ. Using the method of similar operators (see [1] and [2]), we get

Theorem 1. *There exists* $m \in \mathbb{Z}_+$ *such that the spectrum* $\sigma(L_\theta)$ *of the operator* L_θ *has*

[1]This work is supported by Grant MC-1056.2018.1 of the President of the Russian Federation, contract 075-02-2018-433

the form $\sigma(L_\theta) = \sigma_{(m)} \cup (\cup_{|n|\geqslant m+1}\sigma_n)$, *where* $\sigma_{(m)}$ *is finite set and the set* σ_n *has not more than* k *points. Then for eigenvalues* $\widetilde{\lambda}_n$ *of the operator* L_θ *we have the following asymptotic representation*

$$\sum_{j=1}^{k} \widetilde{\lambda}_j = \pi^4(2n+\theta)^4 + \frac{\pi^2(2n+\theta)^2}{k}\sum_{j=1}^{k}\mu_j + \mathcal{O}(|n|), \quad |n| \geqslant m+1,$$

where μ_j, $j = 1, \ldots, k$, *are the eigenvalues of matrix* $\mathfrak{A}_0$.

REFERENCES

1. *Baskakov A. G., Polyakov D. M.* The method of similar operators in the spectral analysis of the Hill operator with nonsmooth potential. Sb. Math. 2017. Vol. 208, No. 1, pp. 1–43.
2. *Polyakov D. M.* Spectral analysis of a fourth order differential operator with periodic and antiperiodic boundary conditions. St. Petersburg Math. J. 2016. Vol. 27, No. 5, pp. 789–811.

J. E. Restrepo (Rostov-on-Don, Russia)
cocojoel89@yahoo.es

WEIGHTED GENERALIZED HÖLDER TYPE SPACES DESCRIBED BY DJRBASHIAN'S GENERALIZED FRACTIONAL OPERATOR

In this paper we use the Bari-Stechkin class $\Omega_{c,\beta}$, see e.g. [3]. Classical examples are t^λ, $t^\lambda\left(\ln\frac{1}{t}\right)^\beta$ and $t^\lambda\left(\ln\ln\frac{1}{t}\right)^\beta$, where $\lambda \in (0,1)$ and $\beta \in \mathbb{R}$. We study the weighted space $\Delta_\gamma(\mathbb{R}^n)$ ($\gamma \in \Omega_c$), i.e. those functions $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ which satisfy $\|f(x+t) - f(x)\|_\infty \leqslant A\gamma(|t|), \quad x, t \in \mathbb{R}^n$, where A does not depend on x, t. The first weighted characterization is:

Theorem 1. *Let* $\gamma \in \Omega_{c,\beta}$. *Any* $f \in \Delta_\gamma(\mathbb{R}^n)$ *if and only if the condition*

$$\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_\infty \leqslant A\frac{\gamma(y)}{y}, \quad y > 0,$$

holds, where $u(x,y) = \big(P_y * f\big)(x)$ *is a harmonic function in* $\mathbb{R}^n_+$, *and* $P_y(x)$ *is the Poisson kernel in* $\mathbb{R}^n_+$. To give a fractional characterization of the space $\Delta_\gamma(\mathbb{R}^n)$, let Ω be the class of those functions $\omega(x) > 0$, ω is almost decreasing on $(0, +\infty)$, $\omega(x) \asymp x^{-\alpha}$ $(0 < \alpha < 1, x \geqslant \Delta_0 > 0)$ and $\omega_1(x) = \int_0^x \omega(t)dt < +\infty$, $0 \leqslant x < +\infty$. We use a type of Djrbashian's fractional operator:

$$L_\omega u(x,y) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}u(x, y+t)\omega(t)dt = \int_y^\infty \frac{\partial}{\partial s}u(x,s)\omega(s-y)ds,$$

for any $\omega \in \Omega$ and functions $u(x,y)$ $(x \in \mathbb{R}^n, y > 0)$ given in $\mathbb{R}^n_+$. This operator also is a type of Liouville's fractional derivative.

Theorem 2. *Let* $\gamma \in \Omega_{c,\beta}$, $\omega \in \Omega_\alpha$ *and* $\alpha > \beta$. *If* $f \in \Delta_\gamma(\mathbb{R}^n)$ *then*

$$\|L_\omega u(x,y)\|_\infty \leqslant A\frac{\gamma(y)}{y}\int_0^y \omega(s)ds, \quad y > 0.$$

We now do not expect to prove the general case of Theorem 2, but we give a result on the equivalence of Theorem 2 when $\omega(x) = x^{-\alpha}$ for any $x \in [0, \infty)$ and $0 < \alpha < 1$. This work gives an extension of M. Taibleson's theorem [3,4] and a new fractional characterization of the space $\Delta_\gamma(\mathbb{R}^n)$.

REFERENCES

1. *Taibleson M. H.* Lipschitz classes of functions and distributions in E^n. Bulletin of the American Mathematical Society. 1963.
2. *Enriquez F. E.* Characterization of spaces with non-integer differentiation in terms of harmonic prolongations. Manuscript Master's Thesis, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow. 1995.
3. *Samko N. G.* Singular integral operators in weighted spaces with generalized Hölder condition. Proc. A. Razmadze Math. Inst. 1999. Vol. 120, pp. 107–134.

A. G. Sergeev (Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia)
sergeev@mi-ras.ru

QUANTUM DIFFERENTIALS AND FUNCTION SPACES

One of the goals of noncommutative geometry is the translation of basic notions of analysis into the language of Banach algebras. This translation is done using the quantization procedure which establishes a correspondence between function spaces and operator algebras in a Hilbert space H. The differential df of a function f (when it is correctly defined) corresponds under this procedure to the commutator of its operator image with some symmetry operator S which is a self-adjoint operator in H with square $S^2 = I$. The image of df under quantization is the quantum differential of f which is correctly defined even for non-smooth functions f. The arising operator calculus is called the quantum calculus.

In our talk we shall give several assertions from this calculus concerning the interpretation of Schatten and interpolation ideals of compact operators in a Hilbert space in terms of function spaces on the circle. The main attention is paid to the case of Hilbert–Schmidt operators. The role of the symmetry operator S is played in this case by the Hilbert transform. In the case of function spaces of several variables the symmetry operator may be defined in terms of Riesz operators and Dirac matrices.

A. A. Shkalikov (Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)
shkalikov@mi.ras.ru

ANALYTICAL APPROACH TO PROBLEMS ON COMPLETENESS AND BASIS PROPERTY OF EIGENFUNCTIONS OF NON-SELF-ADJOINT OPERATORS

We shall talk about spectral properties of operators of the form $A = T + B$, where B is a non-symmetric operator subordinated to a self-adjoint or normal operator T.

An operator B is said to be $T-p$-subordinated $(0 \leqslant p < 1)$ if the domain of B contains the domain of T and

$$\|Bx\| \leqslant b\|Tx\|^p \, \|x\|^{1-p} \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(B), \quad b = \text{const}.$$

There is a great number of results (in particular, by J. Birkhoff, T. Carleman, M. V. Keldysh, F. Brauder, S. Agmon, V. B. Lidskii, I. Ts. Gohberg and M. G. Krein, F. S. Markus, V. I. Matsaev, B. S. Mityagin) which say about completeness and basis property of the eigenfunctions of self-adjoint operators under p-subordinated perturbations.

We introduce new concepts of local subordination and local subordination in the sense of quadratic forms and prove new theorems which involve new technique and can be applied for concrete problems in more general situation.

In the second part we will discuss problems on perturbations of self-adjoint operators with continuous spectrum. We shall also talk about recent results on properties of the eigenfunctions of ordinary differential operators on the semi-axis with complex potentials.

The work is supported by the Russian Science Foundation, grant No 17-11-01215.

M. A. Skopina (St. Petersburg, Russia)
skopina@MS1167.spb.edu

MULTIVARIATE QUASI-PROJECTION OPERATORS AND THEIR APPROXIMATION PROPERTIES

A quasi-projection operator with a matrix dilation M is

$$Q_j(f,\varphi,\widetilde{\varphi}) = |\det M| \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \langle f, \widetilde{\varphi}(M^j \cdot +k)\rangle \varphi(M^j \cdot +k), \quad j \in \mathbb{Z},$$

where f is an approximated function (signal), φ is a function, $\widetilde{\varphi}$ is a function or a tempered distribution, M is a $d\times d$ matrix whose eigenvalues are bigger (in modulus) than 1. We consider different classes of such operators and provide error estimates for them.

First, we study sampling-type operators that are the quasi-projection operators Q_j associated with $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{S}'_N$, where $\mathcal{S}'_N$ is the set of tempered distribution whose Fourier transform $\widehat{\widetilde{\varphi}}$ is a function on $\mathbb{R}^d$ which grows not faster than a polynomial of degree N. Error estimates for such Q_j in L_p-norm, $2 \le p \le \infty$, are provided for a large class of functions φ, including both band-limited and compactly supported functions. The estimates are given in terms of the Fourier transform of f.

Another class of quasi-projection operators we study includes classical Kantorovich–Kotelnikov operators that have several advantages over the sampling operators. Using the averages values of f near the nodes instead of the exact sampled values allows to deal with discontinues signals and reduce the so-called time-jitter errors. On the other hand, unlike to the sampling operators, thsee operators are bounded in $L_p(\mathbb{R}^d)$ and, therefore, provide better approximation order. We consider operators Q_j (generalized Kantorovich–Kotelnikov operators) for a wide class of band-limited functions φ including non-integrable ones, and a wide class of functions $\widetilde{\varphi}$ including both compactly supported and band-limited functions. Under the assumption $D^\beta(1-\widehat{\varphi}\widehat{\widetilde{\varphi}})(\mathbf{0})=0$, $\beta\in\mathbb{Z}_+^d$, $\|\beta\|_1<n$, an error estimate in L_p-norm, $1\le p\le\infty$, for Q_j is given in terms of the classical L_p-moduli of smoothness of order n.

Error estimates for Q_j in L_p-norm are not applicable to signals whose decay is not enough to belong to the space $L_p(\mathbb{R}^d)$. However such functions may belong to some weighted spaces $L_{p,1/w}(\mathbb{R}^d)$. For the class of the so-called submultiplicative weights w, error estimates in $L_{p,1/w}$-norm for the generalized Kantorovich–Kotelnikov operators are given in terms of the $L_{p,1/w}$-moduli of smoothness.

D. Suragan (Astana, Kazakhstan)
durvudkhan.suragan@nu.edu.kz

ISOPERIMETRIC INEQUALITIES FOR SOME PROBLEMS ARISING IN THE POTENTIAL THEORY AND MEMS

In this talk we discuss some isoperimetric inequalities for the logarithmic potential and Riesz potential type operators. In this case, the main reason why the results are useful, beyond the intrinsic interest of geometric extremum problems, is that they produce a priori bounds for spectral invariants of operators on arbitrary domains. We demonstrate these in explicit examples. We also discuss nonlinear analogues of these problems related to the multidimensional MEMS type problems. This talk is based on our joint papers with Rozenblum G., Ruzhansky M. and Wei D. [1]-[4].

REFERENCES

1. *Rozenblum G., Ruzhansky M. and Suragan D.* Isoperimetric inequalities for Schatten norms of Riesz potentials. J. Funct. Anal. 2016. Vol. 271, pp. 224–239.

2. *Ruzhansky M. and Suragan D.* Schatten's norm for convolution type integral operator. Russ. Math. Surv. 2016. Vol. 71, pp. 157–158.

3. *Ruzhansky M. and Suragan D.* Isoperimetric inequalities for the logarithmic potential operator. J. Math. Anal. Appl. 2016. Vol. 434, pp. 1676–1689.

4. *Suragan D. and Wei D.* On geometric estimates for some problems arising from modeling pull-in voltage in MEMS. arXiv:1801.08199v2, 2018.

S. M. Tabatabaie (University of Qom, Qom, Iran)
sm.tabatabaie@qom.ac.ir

SOME SPECIAL COARSE STRUCTURES

Coarse spaces were introduced by Roe in [4]. A *coarse structure* on a set X is a family of subsets of $X\times X$ (called *controlled sets*), which contains the diagonal and is closed under the formation of subsets, inverses, products, and (finite) union. A set equipped with a coarse structure is called a *coarse space*. The coarse structures are very useful to study the metric structures. In this talk we introduce a method for giving some new coarse structures on locally compact groups and hypergroups (as extensions of locally compact groups), and study their properties and some related topics. Specially, we give some examples on hypergroup join.

REFERENCES

1. *Bloom W. R. and Heyer H.* Harmonic analysis of probability measures on hypergroups. De Gruyter. Berlin. 1995.
2. *Dydak J. and Hoffland C. S.* An alternative definition of coarse structures. Topology and its Applications. 2008. Vol. 155. pp. 1013–1021.
3. *Nowak P. W. and Yu G.* Large scale geometry, EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS). Zurich. 2012.
4. *Roe J.* Lectures on coarse geometry. University Lecture Series. **31**, Amer. Math. Soc., Providence, RI. 2003.

A. S. Usachev (Voronezh, Russia)
alex.usachev.ru@gmail.com

DIXMIER TRACES OF HANKEL OPERATORS IN LORENTZ IDEALS

Let $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ be an increasing concave function with $\psi(0) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = \infty$ and $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$. Consider the Lorentz ideal $\mathcal{M}_\psi$ of bounded, compact operators A on a separable Hilbert space H such that $\sup_{t>0} \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t \mu(s, A)\mathrm{d}s < \infty$, where $\mu(A)$ is a singular value function of A.

In 1966 J. Dixmier have considered the functional

$$\mathrm{Tr}_{\psi,\omega}(A) = \omega\left(\frac{1}{\psi(t)}\int_0^t \mu(s, A)\mathrm{d}s\right),\ 0 \le A \in \mathcal{M}_\psi$$

and have proved that under a suitable conditions on the generalised limiting procedure ω this functional extends to a linear functional on the whole $\mathcal{M}_\psi$. These functionals, termed Dixmier traces, became a cornerstone in the noncommutative geometry developed by A. Connes in 1980s. In general, one has no access to the singular value function of an operator. This makes the computation of Dixmier traces a difficult problem.

In the present talk we discuss the computation of Dixmier traces of Hankel operators on the Hardy space $H^2(S^1)$. Here, S^1 is the boundary of the unit disc in the complex plane. For $f \in L^\infty(S^1)$, the associated Hankel operator is defined as

$$H_f := (1 - P)fP,$$

where $P : L^2(S^1) \to H^2(S^1)$ is the Szegö projection.

We discuss the conditions on the function $f \in L^\infty(S^1)$ guaranteeing that $H_f \in \mathcal{M}_\psi$ and the estimates of Dixmier traces of H_f in terms of the Besov norms of f.

This talk based on the joint work with M. Goffeng.

B. G. Vakulov, Yu. E. Drobotov (Rostov–on–Don, Russia)
bvak1961@bk.ru

THE HARDY–LITTLEWOOD TYPE THEOREM FOR THE RIESZ POTENTIAL TYPE OPERATOR IN WEIGHTED FUNCTION SPACES

Let $\mathbb{S}^{n-1}$ denote a unit sphere in the Euclidean space $\mathbb{R}^n$. The Riesz potential type operator is to be considered as

$$\left(K^{\alpha} f\right)(x)=\frac{1}{\gamma_{n-1}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{f(\sigma) d\sigma}{|x-\sigma|^{n-1-\alpha}}, \quad x \in \mathbb{S}^{n-1},$$

where

$$\gamma_{n-1}(\alpha)=2^{\alpha} \pi^{\frac{n-1}{n}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{n-1-\alpha}{2}\right), \quad \alpha>0, \quad \alpha \neq n-1, n+1, \ldots,$$

and the multiplier of K^{α} is

$$\left\{\Gamma\left(m+\frac{n-1-\alpha}{2}\right) / \Gamma\left(m+\frac{n-1+\alpha}{2}\right)\right\}_{m=0}^{\infty}.$$

Let $\mathrm{W}_{\lambda, N}$ denote the class of multipliers $\{k_m\}_{m=0}^{\infty}$ through spherical harmonics, which are of a specific asymptotic with $m \rightarrow \infty$, $k_m \neq \infty$, $m=0,1,2,\ldots$, and $k_m \neq 0$, $m=p, p+1, \ldots$.

Then $\mathbf{H}^{\lambda}(\mathbb{S}^{n-1}, \rho)$ is to denote the space

$$\mathbf{H}^{\lambda}(\mathbb{S}^{n-1}, \rho)=\left\{f: f \in C(\mathbb{S}^{n-1}), \omega(\rho D^{[\lambda]} f, t) \leq c t^{\lambda-[\lambda]}\right\},$$

where D^{λ} is an operator with the multiplier $\{k_m\} \in \mathrm{W}_{\lambda, N}$, $N \geqslant n+1$.

The problem is on the reflection by K^{α} from $L^p\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$ to the Hölderian spaces $\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^{\alpha-\frac{n-1}{p}}(\mathbb{S}^{n-1}, \rho)$ and $\overset{\sim}{\overset{\circ}{\mathbf{H}}}{}^{\alpha-\frac{n-1}{p}}(\mathbb{S}^{n-1}, \rho)$, defined through $\mathbf{H}^{\lambda}(\mathbb{S}^{n-1}, \rho)$, in the case of a radially oscillating weight $\rho(x)=\varphi(|x-a|)$ such as φ belongs to the Zygmund–Bary–Stechkin class.

Similar results were obtained in [1] for spherical fractional integrals with another multiplier. The paper to be presented has [2] as an immediate predecessor.

REFERENCES

1. *Plessis Du N.* Spherical fractional integrals. Trans. Amer. Math. Soc. 1957. Vol. 84, No. 1, pp. 262–272.

2. *Vakulov B. G.* Teoremy tipa Hardi–Littlvuda–Soboleva ob operatorah tipa potenciala v $L_p(S_{n-1}, \rho)$. Rostov-na-Donu, 1986. Dep. v VINITI 25.07.1986, No. 5435–V 86.

Абрамян А. В., Пилиди В. С. (Ростов-на-Дону, Россия)
annaabr@yandex.ru, pilidi@sfedu.ru

О РАВНОМЕРНОЙ ОБРАТИМОСТИ РЕГУЛЯРНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ОДНОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА КОНТУРЕ С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ

Работа продолжает исследования в области критериев применимости к полным сингулярным интегральным операторам приближенных методов по семействам сильно аппроксимирующих их операторов с «вырезанной» особенностью ядра Коши [1–3]. Рассматривается случай полного сингулярного интегрального оператора с непрерывными коэффициентами, действующего в L_p-пространстве на замкнутом контуре. Предполагается, что контур является кусочно-ляпуновским и не имеет точек возврата. Задача сводится к получению критерия обратимости элемента некоторой банаховой алгебры. Исследование проводится с помощью локального принципа Гохберга-Крупника. Критерий формулируется в терминах обратимости некоторых интегральных операторов, сопоставляемых угловым точкам и действующих в L_p-пространстве на вещественной оси, и условия сильной эллиптичности в точках контура, в которых выполняется условие Ляпунова. Результаты исследования опубликованы в статье [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пилиди В. С.* Критерии равномерной обратимости регулярных аппроксимаций одномерных сингулярных интегральных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами. Известия АН СССР. Сер. мат. 1990. Том 54, № 6, стр. 1270–1294.

2. *Пилиди В. С.* О равномерной обратимости регулярных аппроксимаций одномерных сингулярных интегральных операторов в пространствах функций, суммируемых с переменной степенью. Известия вузов. Сев.-Кавк. регион. Сер. ”Естественные науки“. 2011. № 1, стр. 12–17.

3. *Абрамян А. В., Пилиди В. С.* О равномерной обратимости регулярных аппроксимаций одномерных сингулярных интегральных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами в пространствах функций, суммируемых с переменной степенью. Известия вузов. Сев.-Кавк. регион. Сер. ”Естественные науки“. 2013, № 5, стр. 5–10.

4. *Абрамян А. В., Пилиди В. С.* Критерий равномерной обратимости регулярных аппроксимаций одномерных сингулярных интегральных операторов на кусочно-ляпуновском контуре. Владикавказский математический журнал. 2019. Том 21, №1, стр. 5–15.

О. Г. Авсянкин (Ростов–на–Дону, Россия)
avsyanki@math.rsu.ru

ОБ ОПЕРАТОРАХ ТИПА СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ МОРРИ

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Пространство Морри $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ — это пространство всех функций $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \frac{\|f\|_{L_p(\mathbb{B}(x,r))}}{r^\lambda} < \infty,$$

где $\mathbb{B}(x,r)$ — открытый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в точке x. Пространства Морри $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ являются нетривиальными тогда и только тогда, когда $0 \leqslant \lambda \leqslant n/p$.

В пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим оператор свертки

$$(H\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} h(x-y)\varphi(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Известно ([1]), что оператор H ограничен в $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Пусть M_a — оператор умножения на функцию $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Будем говорить, что функция $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ принадлежит классу $B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, если

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N} |a(x)| = 0.$$

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$ и $a \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$. Тогда операторы M_aH и HM_a компактны в пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.*

Также указаны условия на функцию $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, гарантирующие компактность в пространстве Морри коммутатора $M_aH - HM_a$.

В пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим оператор $\alpha I + H$, где $\alpha \in \mathbb{C}$. Поставим в соответствие этому оператору его символ — функцию $\alpha + \widehat{h}(\xi)$, где $\widehat{h}(\xi)$ — преобразование Фурье функции $h(t)$. Показано, что невырожденность символа является необходимым и достаточным условием обратимости оператора $\alpha I + H$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 18-01-00094 и 18-51-06005.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. И. Буренков, Т. В. Тарарыкова* Аналог неравенства Юнга для сверток функций для общих пространствах типа Морри. Функциональные пространства, теория приближений, смежные вопросы математического анализа // Труды МИАН. 2016. Т. 293. С. 113–132.

Х. Алмохаммад, Н.Х. Альхалиль (Москва, Россия)
Khaleel.almahamad1985@gmail.com

О СВОЙСТВАХ ПОТЕНЦИАЛОВ ТИПА РИССА НА БАЗЕ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА–ЛОРЕНЦА

Пространство потенциалов $H_E^G \equiv H_E^G(\mathbb{R}^n)$ определяем как множество свёрток ядер потенциалов с функциями из базового пространства

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) = \left\{ u = G * f : \ f \in E(\mathbb{R}^n) \right\},$$
$$\|u\|_{H_E^G} = \inf\left\{ \|f\|_E : \ f \in E(\mathbb{R}^n), \ G * f = u \right\}.$$

Здесь E — перестановочно инвариантное пространство, а ядро G — специального вида,

$$c_1\theta(r) \leqslant G(x) \leqslant c_2\theta(r), \quad r = |x| \in \mathbb{R}_+,$$

где $0 < \theta \downarrow$ на $\mathbb{R}_+$; $\int\limits_0^r \theta(\rho)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho < \infty$, $\forall r \in \mathbb{R}_+$.

Введём функцию $\varphi(t) = \theta(t^{1/n})$.

Важную роль в теории этих потенциалов играют обобщённые операторы Харди F, построенные по функции φ:

$$F[f](t) = \varphi(t)\int\limits_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int\limits_t^\infty \varphi(\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

(см. [1]). Для них получены критерии справедливости модулярных неравенств на весовых пространствах Орлича–Лоренца $L_\Phi(\omega)$, обобщающие некоторые результаты работы [2]. Пространство Орлича–Лоренца определим как множество измеримых по Лебегу функций с нормой

$$\|f\|_{L_\Phi(\omega)} = \inf\left\{\lambda > 0,\ \int\limits_0^\infty \Phi\left(\lambda^{-1}\bigl(f^*(x)\bigr)\right)\omega(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1\right\},$$

где f^* — убывающая перестановка функции f, Φ — функция Юнга.

Авторы выражают благодарность Гольдману М.Л. за ценные советы при работе над статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алмохаммад Х., Альхалиль Н. Х.* Интегральные свойства обобщённых потенциалов типа Бесселя и типа Рисса. Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». 2017. Том. 25, № 4. стр. 340–349.

2. *Jim Quile Sun* “Hardy type inequalities on weighted Orlicz spaces”, Ph.D Thesis, The Univ. of Western Ontario, London, Canada, 1995.

А. Б Антоневич, А. Н. Бузулуцкая (Минск, Беларусь)
antonevich@bsu.by, anna-glaz@yandex.ru

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $CB(\mathbb{R}^m)$ есть пространство ограниченных непрерывных функций на $\mathbb{R}^m$ с sup-нормой. C^*-подалгебра $\mathcal{A}$ в $CB(\mathbb{R}^m)$ называется *квазипериодической*, если она порождена конечным числом N экспонент $e^{i2\pi<h_j,x>}$. Как абстрактная C^*-алгебра она изоморфна алгебре $C(\mathbb{T}^N)$ непрерывных функций на торе и изоморфна алгебре $C_1(\mathbb{R}^N)$, состоящей из непрерывных функций в $\mathbb{R}^N$, периодических с периодом 1 по каждой переменной.

Квазипериодические функции и квазипериодические алгебры представляют особый интерес в связи с многочисленными приложениями, в частности, в теории квазикристаллов [1, 2, 3].

Для заданного вложения $J : \mathbb{R}^m \to L \subset \mathbb{R}^N$ множество

$$\mathcal{A}_J = \{u(J(x)) : u \in C_1(\mathbb{R}^N\},$$

есть квазипериодическая алгебра на $\mathbb{R}^m$ и любая квазипериодическая алгебра, порождённая N экспонентами, совпадает с одной из алгебр $\mathcal{A}_J$ при подходящем выборе вложения.

Пусть $D(\mathcal{A}_J) \subset \mathcal{A}_J$ есть подпространство, состоящее из сужений бесконечно дифференцируемых функций из $C_1(\mathbb{R}^N$, т.е. функций вида $u(J(x))$, где бесконечно дифференцируема, с соответствующей топологией. *Квазипериодическим распределением* называется непрерывный линейный функционал на $D(\mathcal{A}_J)$, пространство квазипериодических распределений обозначим $D'(\mathcal{A}_J)$.

Цель доклада — показать, что, хотя пространство $D'(\mathcal{A}_J)$ изоморфно пространству периодических распределений на пространстве $\mathbb{R}^N$ большей размерности, свойства квазипериодических распределений существенно отличаются от свойств соответствующих периодических распределений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дынников И. А. Новиков С. П.* Топология квазипериодических функций на плоскости. Успехи математических наук. 2005. Том 60, вып. 1, стр. 3-28.

2. *Ле Ты Куок Тханг, Пиунихин С. А. Садов В. А.* Геометрия квазикристаллов. // Успехи математических наук. 1993. Том 48, вып. 1, стр. 41-102.

3. *Antonevich A., Glaz (Buzulutskaya) A.* Quasi-peroidic Algebras and Their Physical Automorphisms. In book: Geometric Methods in Physics XXXV, Birkhauser, 2017, pp. 3-10.

Е. И. Бережной, В. В. Кочерова В. В. (Ярославль, Россия)
ber@uniyar.ac.ru

ТЕОРЕМА ВЛОЖЕНИЯ $W^{1,n}(D)$ ДЛЯ МНОЖЕСТВА ПРОИЗВОЛЬНОЙ МЕРЫ

Пусть в $D \subseteq R^n$, $(n \geq 2)$ – открытое множество, $S(\mu; D)$ – пространство измеримых на D функций $f : D \to R$. Для $f : D \to R$ через $\lambda(x, \gamma)$ обозначим функцию распределения функции f: $\lambda(x, \gamma) = \mu(\{t \in D : |f(t)| > \gamma\})$, а через f^* ее перестановку в невозрастающем порядке. Идеальное пространство X называется симметричным, если из $f \in X$, измеримости g и из выполнения при всех $\gamma \in R_+$ неравенства $\lambda(g, \gamma) \leq \lambda(f, \gamma)$ следует, что $g \in X$ и $\|g|X\| \leq \|f|X\|$. Пусть X – симметричное пространство в $S(\mu; D)$. Через $W^{1,p}(D, X)$, $(1 \leq p < \infty)$ обозначим замыкание $C_0^\infty(D)$ по норме Соболева

$$\|f|W^{1,p}(D, X)\| = \|\nabla f|L^p\| + \|f|X\|.$$

Определим функцию $\psi_{R,n} : (0, \rho) \to R_+$ равенством

$$\psi_{\rho,n}(t) = nC_n^{1/n} \begin{cases} (ln\frac{\rho}{t})^{-1/n'}, & \text{при } t \in (0, \rho e^{-1/n'}), \\ (\frac{1}{n'})^{-1/n'}, & \text{при } t \in [\rho e^{-1/n'}, \rho) \end{cases} .$$

Прямой подсчёт показывает, что функция $\psi_{R,n}$ является вогнутой. По функциям $\psi_{\rho,n}$ построим квазибанаховы пространства Марцинкевича $\widetilde{M}(\psi_{\rho,n})$, квазинормы в которых определяется равенством

$$\|f|\widetilde{M}(\psi_{R,n})\| = \sup_{0<\alpha} \alpha\varphi(\lambda(f,\alpha)) = \sup_{0<\alpha} \varphi(\alpha) f^*(\alpha).$$

Теорема. *Для любой f из $W^{1,n}(D,X)$ справедливо неравенство*

$$\sup_{\rho\in(0,\mu(D))} \{\|(f^*(.) - f^*(\rho))\chi(0,\rho)|\widetilde{M}(\psi_{\rho,n})\| +$$

$$\|f^*(\rho)\chi(0,\rho) + f^*(.)\chi(\rho,\mu(D))|X\|\} \le \|f|W^{1,n}(D,X)\|.$$

Неравенство в теореме усилить нельзя.

В случае $D = R^n$ из теоремы следуют результаты [1-2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Adachi S., Tanaka K.* Trudinger type inequality in R^n and their best exponent. // Pros. AMS., 1999, v. 128, pp. 2051–2057.

2. *Li X., Ruf B.* A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in R^n. // Indiana Univ. Math. J., 2008, v. 57, pp. 451–480.

Я. И. Грановский (Донецк)
yarvodoley@mail.ru

К СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ КВАНТОВЫХ ЗВЕЗДНЫХ ГРАФОВ

Рассмотрим звездный граф $\mathcal{G}$, состоящий из $p_1 > 0$ бесконечных ребер и $p_2 \ge 0$ конечных ребер, $p_1 + p_2 := p$. Каждое ребро будем ассоциировать с конечным или бесконечным интервалом $(0, a_j)$,
$j \in \{1, \dots, p\}$, где точка 0 соответствует внутренней вершине графа.

На каждом бесконечном ребре $l_j, j \in \{1, \dots, p_1\}$ определим минимальный оператор $A^{\min}_{l_j} f_{l_j} = -f''_{l_j} + Q_{l_j} f_{l_j}, Q_{l_j} = Q^*_{l_j} \in L^1(l_j, \mathbb{C}^{m\times m})$,

$$\operatorname{dom}(A^{\min}_{l_j}) = \left\{ f_{l_j} \in L^2(l_j, \mathbb{C}^m) : \begin{array}{c} f_{l_j}, f'_{l_j} \in AC_{\mathrm{loc}}(l_j, \mathbb{C}^m), \\ A^{\min}_{l_j} f_{l_j} \in L^2(l_j, \mathbb{C}^m), \\ f_{l_j}(0) = f'_{l_j}(0) = 0 \end{array} \right\}.$$

На каждом конечном ребре $e_j, j \in \{p_1 + 1, \dots, p\}$ определим минимальный оператор $A^{\min}_{e_j} f_{e_j} = -f''_{e_j} + Q_{e_j} f_{e_j}, Q_{e_j} = Q^*_{e_j} \in L^1(e_j, \mathbb{C}^{m\times m})$,

$$\operatorname{dom}(A^{\min}_{e_j}) := \left\{ f_{e_j} \in L^2(e_j, \mathbb{C}^m) : \begin{array}{r} f_{e_j}, f'_{e_j} \in AC_{\mathrm{loc}}(e_j, \mathbb{C}^m), \\ A^{\min}_{e_j} f_{e_j} \in L^2(e_j, \mathbb{C}^m), \quad f_{e_j}(0) \\ = f_{e_j}(a_j) = f'_{e_j}(0) = f'_{e_j}(a_j) = 0 \end{array} \right\}.$$

Это позволяет ввести минимальный оператор $A_{\min}$ на графе

$$\mathcal{G} : A_{\min} := \bigoplus_{j=1}^{p} A_j^{\min}, \quad \operatorname{dom}(A_{\min}) := \bigoplus_{j=1}^{p} \operatorname{dom}(A_j^{\min}).$$

Показано, что при сделанных предположениях $\sigma_{sc}(\widetilde{A}) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ для каждого самосопряженного расширения $\widetilde{A}$. В частности, это верно для расширения A_α, задаваемого условием типа дельта:

$$\begin{cases} f \quad \text{непрерывна в } 0, \\ \sum_{j=1}^{p} f_j'(0) = \alpha f(0). \end{cases} \tag{1}$$

При $\alpha = 0$ условие (1) — хорошо известное условие Кирхгофа.

Также найдена формула, выражающая матрицу рассеяния системы $\{A_\alpha, A_0\}$ через функцию Вейля, A_0 — оператор задачи Дирихле.

Полученные результаты обобщают и развивают результаты [1], а доклад базируется на результатах совместной работы с М. М. Маламудом и Х. Найдхардтом.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Granovskyi Ya., Malamud M., Neidhardt H. and Posilicano A.* To the spectral theory of vector-valued Sturm-Liouville operators with summable potentials and point interactions. J. Functional Analysis and Operator Theory for Quantum Physics, The Pavel Exner Anniversary. 2017. pp. 271–313.

Д. Б. Диденко (Воронеж, Россия)
dmixtry@gmail.com **СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРНЫХ ПОЛИНОМОВ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ N-ОГО ПОРЯДКА**

Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство с нормой $||\cdot||$, $\operatorname{End}\mathcal{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$.

В банаховом пространстве $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$ (рассматривается одно из функциональных пространств определённых в [1]) определим дифференциальный оператор второго порядка

$$\mathscr{L} = D^N + \mathscr{B}_1 D^{N-1} + \cdots + \mathscr{B}_{N-1} D + \mathscr{B}_N,$$

с областью определения $D(\mathscr{L}) = \mathscr{F}^{(N)} \subset \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathscr{X}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathscr{X})$, где символ D обозначает дифференциальный оператор, действующий по правилу $Dx = x^{'}$ с с областью определения $\mathscr{F}^{(1)} = \{x \in \mathscr{F} : x$ – абсолютно непрерывная функция, $x^{'} \in \mathscr{F}\}$, где операторы $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_N$ принадлежат алгебре $\operatorname{End}\mathscr{F}$. Так же рассмотрим следующий дифференциальный оператор оператор $\mathbb{L} : \mathscr{F}^{(1)}(\mathbb{R}, \mathscr{X}^N) \subset \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathscr{X}^N) \to \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathscr{X}^N)$, заданный с помощью операторной матрицы

$$\mathbb{L} \sim \begin{pmatrix} D & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & D & I & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D & I \\ -\mathscr{B}_N & -\mathscr{B}_{N-1} & -\mathscr{B}_{N-2} & \dots & -\mathscr{B}_2 & D-\mathscr{B}_1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathscr{F}_d = \mathscr{F}(\mathbb{Z}, X)$ — пространство двусторонних последовательностей (см. [1]). Определим разностный оператор $\mathfrak{L} \in \operatorname{End} \mathscr{F}_d$ с помощью формулы $(\mathfrak{L}x_d)(n) = x_d(n) - \mathscr{U}(n, n-1)x_d(n-1)$, $x_d \in \mathscr{F}_d$, $n \in \mathbb{Z}$, где $\mathscr{U}$ — эволюционное семейство операторов, построенное по абстрактной задаче Коши.

Теорема 1. *Множества состояний обратимости операторов $\mathscr{L}$, $\mathbb{L}$ и $\mathfrak{L}_{(t_n)}$ совпадают, т.е.* $\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathscr{L}) = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathbb{L}) = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathfrak{L})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баскаков А. Г., Диденко В. Б.* О состояниях обратимости разностных и дифференциальных операторов. Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82, № 1. С. 3–16.

О. А. Иванова (Ростов-на-Дону, Россия)
neo_ivolga@mail.ru

ОБ УМНОЖЕНИИ В СОПРЯЖЕННЫХ К ВЕСОВЫМ (LF)-ПРОСТРАНСТВАМ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Описываются линейные непрерывные операторы, действующие в счетном индуктивном пределе E весовых пространств Фреше целых в $\mathbb{C}^N$ функций и перестановочные в нем с системами операторов частного дифференцирования и сдвига. При сделанных предположениях коммутанты систем операторов дифференцирования и сдвига совпадают. Они состоят из операторов свертки, задаваемых произвольным линейным непрерывным функционалом на E. При этом не предполагается, что множество многочленов плотно в E. В топологическом сопряженном к E пространстве E' вводится умножение — свертка. Полученная алгебра изоморфна упомянутому коммутанту системы операторов частного дифференцирования в алгебре всех линейных непрерывных операторов, действующих в E, с умножением — композицией операторов. В построенной алгебре аналитических функционалов в двух несмешанных случаях введена топология, с которой эта алгебра становится топологической и уже топологически изоморфна указанному коммутанту с соответствующей (естественной) операторной топологией. (В общем случае изоморфизм является топологическим, если в E' введена слабая топология $\sigma(E', E)$, а в коммутанте — слабо операторная топология). Отсюда следует, что множество многочленов от операторов дифференцирования плотно в коммутанте с топологией поточечной сходимости. Установлены условия, при которых данная алгебра не имеет делителей нуля. Доказана автоматическая непрерывность линейных операторов, перестановочных со всеми операторами дифференцирования в весовом (LF)-пространстве целых функций, изоморфном посредством преобразования Фурье-Лапласа пространству бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^N$ функций с компактным носителем.

Упомянутые результаты опубликованы в [1], [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванова О. А., Мелихов С. Н., Мелихов Ю. Н.* О коммутанте операторов дифференцирования и сдвига в весовых пространствах целых функций. Уфимский матем. журнал. 2017. Т. 9, № 3, стр. 38–49.

2. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* О топологических алгебрах аналитических функционалов с умножением, определяемым сдвигами. Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24, № 3, стр. 14–22.

В. С. Климов (Ярославль, Россия)
vsk76@list.ru

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Пусть $p_i(t)\,(t \in I, i = 0, 1, \ldots, m-1$ - суммируемые на отрезке $J = [a, b]$ функции. Определяемый равенством

$$Ax = x^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1} p_i(\cdot) x^{(i)},$$

дифференциальный оператор A действует и непрерывен из пространства Соболева $W_1^m(J)$ в пространство Лебега $L(J)$ суммируемых на отрезке J функций. Функцию x из $W_1^m(J)$ назовём A – положительной, если Ax – неотрицательная функция. Совокупность A – положительных функций образует клин $K(A)$ в пространстве $W_1^m(J)$.

Теорема. *Справедливо неравенство*

$$\sum_{i=0}^{m} \int\limits_{J^\delta} |x^{(i)}(t)|\, dt \leqslant \frac{c_1}{\delta^m} \int\limits_{J \setminus J^\delta} |x(t)|\, dt + c_2 \int\limits_{J} |x(t)|\, dt,$$

в котором $0 < 3\delta < b - a$, $J^\delta = [a+\delta, b-\delta]$, *постоянные* c_1, c_2 *не зависят от* δ *и функции* x *из клина* $K(A)$.

В докладе предполагается обсудить возможные модификации теоремы и наметить приложения к нелинейным краевым задачам. Теорема означает, что клин $K(A)$ есть достаточно узкое подмножество пространства $W_1^m(J)$. В частности, неэквивалентные в пространствах Соболева топологии могут индуцировать на клине $K(A)$ эквивалентные топологии.

А. В. Козак, Д. И. Ханин (Южный федеральный университет, Россия)
avkozak@bmail.ru, dihan@mail.ru

СВЯЗЬ МЕЖДУ СВЁРТКОЙ ПО ВСЕМУ ПРОСТРАНСТВУ И ЦИКЛИЧЕСКОЙ СВЁРТКОЙ

Оператор A, действующий в $l_p(Z^m)$ так, что $(Ax)_i = \sum\limits_{j\in Z^m} a_{i-j}x_j$, где $i \in Z^m$, $a \in l_1(Z^m)$, называется оператором свёртки. Вектор a — его ядро. Если $v \subset Z^m$, то обозначим P_v проектор, действующий в $l_p(Z^m)$ по правилу $(P_v\omega)_j = \omega_j$, если $j \in v$, и $P_v\omega)_j = 0$, если $j \notin v$.

Пусть H — целочисленные точки параллелепипеда $[0,\ n_1-1]\times[0,\ n_2-1]\times \ldots \times [0,\ n_m-1]$. Линейный ограниченный оператор C_H, действующий в $l_p(H)$, называется циклическим оператором, если $(C_H x)_k = \sum\limits_{j\in H}(C_H)_{k,j}x_j = \sum\limits_{j\in H} c_{k\odot j}x_j$, где запись «$i_\odot j$» обозначает вектор, k-й координатой которого является остаток от деления числа $(i_k - j_k)$ на n_k. Вектор $c \in l_1(H)$ — ядро C_H.

Определение. *Будем говорить, что циклический оператор C_H с ядром c порождён оператором свёртки A с ядром a, если $c_k = \sum\limits_{\substack{s\equiv k \\ (mod\ n)}} a_s, \quad k \in H$. В этом случае будем писать $C_H = \eta_H(A)$.*

Справедливы утверждения:

1) $\eta_H(\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2) = \gamma_1\eta_H(A_1) + \gamma_2\eta_H(A_2)$, где $\gamma_1,\ \gamma_2$ — комплексные числа;
2) $\eta_H(A_1A_2) = \eta_H(A_1)\cdot\eta_H(A_2)$;
3) Если A обратим, то $\eta_H(A)$ обратим и $(\eta_H(A))^{-1} = \eta_H(A^{-1})$;
4) $||\eta_H(A)|| \leqslant ||a||_1$, где a — ядро оператора A.
5) $||P_uC_H - P_uP_HAP_H|| \leqslant \sum\limits_{k:\ |k|\geqslant l} |a_k|$, где $u \subset H$, l — расстояние между u и $Z^m \setminus H$.

Аналогичные результаты справедливы и для интегральных свёрток. В этом случае вместо циклических свёрток рассмотрены операторы свёртки на торе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козак А. В., Ханин Д. И.* Приближенное решение больших систем уравнений с многомерными теплицевыми матрицами. Сиб. журн. вычисл. матем. 2015. 18:1, с. 55–64.

2. *Kozak A. V., Khanin D. I.* Approximate solution of integral equations with multidimensional convolution operators on large sets with piecewise smooth boundaries. Boletin de la Sociedad Matemática Mexicana. 2016. Volume 22, Issue 2, pp. 487-–501.

М. Ю. Кокурин (Йошкар–Ола, Россия)
kokurinm@yandex.ru

О ПОЧТИ РАЗРЕШИМОСТИ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается нелинейный интегральный оператор Урысона

$$F(u)(t) = \int\limits_{\Delta} \varphi(t, s, u(s))ds, \quad t \in \Delta, \tag{1}$$

где $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная замкнутая область, $d \geq 1$. Пусть X, Y — банаховы пространства функций на Δ, пространство Y непрерывно вложено в $C(\Delta)$, интегрант φ характеризуется степенным (с ненулевым показателем) поведением по u на бесконечности и оператор $F : X \to Y$ вполне непрерывен. Изучается уравнение первого рода

$$F(u) = g, \quad u \in K, \tag{2}$$

где K — конус в пространстве X. Для уравнения (2) с фиксированным интегрантом φ описан способ явного построения луча, принадлежащего рецессивному конусу $b(\overline{F(K)})^-$, либо касательному конусу $T_0(\overline{F(K)})$ в точке $0 \in \overline{F(K)}$. Центральную роль в этой конструкции играет главная часть ψ интегранта φ по параметру u, которая определяется в зависимости от характера поведения φ при $u \to \infty$. В частности, при естественных дополнительных условиях оказывается, что для любого $h \in K$ элемент

$$F_0(h) = \int\limits_{\Delta} \psi(t, s, h(s))ds$$

определяет луч $\mathcal{L}_h(\psi) = \{\mu F_0(h) : \mu \geq 0\}$ такой, что

$$F(u_0) + \mathcal{L}_h(\psi) \subset \overline{F(D)} \; \forall u_0 \in K.$$

Устанавливается, что несмотря на некорректность рассматриваемых уравнений, понимаемое в подходящем смысле свойство обобщенной разрешимости (2) оказывается устойчивым к определенным вариациям элементов задачи F, g. Обсуждаются приложения к вопросам обобщенной разрешимости нелинейных интегральных уравнений первого рода.

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания (проект 1.5420.2017/8.9).

С. А. Рощупкин (Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Россия), Л. Н. Ляхов (Воронежский государственный университет, Россия)
roshupkinsa@mail.ru, levnlya@mail.ru

D_B-ПРОИЗВОДНАЯ БЕССЕЛЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА—КИПРИЯНОВА

Пусть $x = (x', x'') \in \mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_{N-n}$, $\{x' = (x_1, \ldots, x_n)\}$, а $\mathbb{R}_n^+ = \{x : x_1 > 0, \ldots, x_n > 0)\}$ — n-полупространство, $\langle x, \xi \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \xi_i$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}_N$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $\gamma_i > 0$.

Четное преобразование Радона—Киприянова размерности γ функций четных по каждой координате вектора $x'\in\mathbb{R}_n^+$ введено в [1], имеет вид

$$K_{\gamma,ev}[f](\xi;p)=2^n\int\limits_{\mathbb{R}_N^+} f(x)\mathfrak{P}_x^\gamma\,\delta(p-\langle x,\xi\rangle)\,(x')^\gamma dx\,,\quad (x')^\gamma=\prod_{i=1}^n (x_i^2)^{\gamma_i/2}\,,$$

где $\mathfrak{P}_x^\gamma$ — многомерный оператор Пуассона [1]. Пусть $n=1$ и g(x) — x_1-нечетная функция, $|\Theta|=1$. Введем нечетное $K_{\gamma,od}$ преобразование в виде

$$K_{\gamma,od}[g](\Theta;p)=\int\limits_{\mathbb{R}_N} g(x)\frac{1}{\Theta_1}\frac{d}{dx_1}\mathfrak{P}_{x_1}^\gamma\delta(p-\langle x,\Theta\rangle)(x_1^2)^{\gamma/2}dx.$$

Пусть $(D_B)_{x_i}^{2k+1}=\frac{\partial}{\partial x_i}B_{\gamma_i}^k$, где B_{γ_i} — сингулярный дифференциальный оператор Бесселя по x_i и $L^m(D)=\sum\limits_{|\alpha|=m}^N a_\alpha\,D_B^\alpha$.

Теорема. *Для* $f\in H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_N)$ *справедлива формула*
$K_{\gamma,od}[L^m(D_B)f](\Theta;p)=2^n\,L^m(\Theta)\frac{d^m}{dp^m}K_{\gamma,ev}[f](\Theta;p)$.
В частности, если $L^1(D)=\sum\limits_{i=1}^N a_i\,D_i$, *то*
$(K)_{\gamma,od}[L^1(D)f](\Theta;p)=2^n\,L^1(\Theta)\frac{d}{dp}K_{\gamma,od}[f](\Theta;p)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киприянов И. А., Ляхов Л. Н.* О преобразованиях Фурье, Фурье—Бесселя и Радона. — Докл. АН СССР. —1998, 360, № 2, — С. 157—160.

А. Э. Пасенчук (Ростов-на-Дону, Россия)
pasenchuk@mail.ru

О МЕТОДЕ ЧАСТИЧНЫХ РЕГУЛЯРИЗАТОРОВ В НЕКОТОРЫХ СЧЕТНО-НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть Γ - единичная окружность комплексной плоскости C, Γ^2 - тор. Обозначим: $W\left(\Gamma^2\right)$ - банахово пространство винеровских функций, $W^{\infty,0}\left(\Gamma^2\right)$, $W^{\infty,\infty}\left(\Gamma^2\right)$ - счетно-нормированные пространства гладких функций. Будем знаками «+» и «-» внизу будем обозначать подпространства указанных пространств, а соответствующие операторы проектирования $P^{\pm\pm}$ соответственно (точные определения см в [1]).

Обозначим $T_a=P^{++}a\left(\xi,\eta\right)I$ оператор Теплица $T_a:X_{++}\to X_{++}$, $a\left(\xi,\eta\right)\in X$, где X - одно из пространств $W\left(\Gamma^2\right)$, $W^{\infty,0}\left(\Gamma^2\right)$, $W^{\infty,\infty}\left(\Gamma^2\right)$. Наиболее полно этот оператор изучен в банаховых пространствах, в частности, в $W\left(\Gamma^2\right)$. И.Б.Симоненко [2] получен критерий который может быть переформулирован следующим образом: оператор $T_a:W_{++}\left(\Gamma^2\right)\to W_{++}\left(\Gamma^2\right)$ нетеров тогда и только тогда, когда его символ $a(\xi,\eta)$ допускает каноническую факторизацию $a = a_{--}a_{+-}a_{-+}a_{++}$ в алгебре $W(\Gamma^2)$. Это означает, что каждый сомножитель в этом представлении символа порождает обратимый оператор Теплица. При этом регуляризатор может быть построен методом частичной регуляризации, предложенным В.С.Пилиди [3]. Показано, что этот результат сохраняется в случае пространства $W_{++}^{\infty,0}(\Gamma^2)$ и не имеет места для пространства $W_{++}^{\infty,\infty}(\Gamma^2)$. Например, символ, $\xi\eta^{-1} - \xi^{-1}\eta = (1-\xi\eta^{-1})(1+\xi^{-1}\eta)$ порождает оператор $T_{\xi\eta^{-1}-\xi^{-1}\eta}$, имеющий бесконечномерное ядро, несмотря на то, что каждый из операторов $T_{1-\xi\eta^{-1}}$, $T_{1+\xi^{-1}\eta}$ обратим в пространстве $W_{++}^{\infty,\infty}(\Gamma^2)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1.*Пасенчук А. Э.* Дискретные операторы типа свертки в классах последовательностей со степенным характером поведения на бесконечности. Издательство ЮФУ, Ростов-на-Дону. 2013.

2.*Симоненко И. Б.* Операторы типа свертки в конусах. Матем. сборник. 1967. Том. 74, в. 2, стр. 108-112.

3.*Пилиди В. С.* О многомерных бисингулярных операторах. Докл. АН СССР. 1971. Том. 201, №. 2, стр. 787–789.

Д. А. Полякова (Ростов-на-Дону, Владикавказ, Россия)
forsites1@mail.ru

О БЫСТРО УБЫВАЮЩИХ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ

В работе предлагается новый подход к определению пространства $S_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ быстро убывающих ультрадифференцируемых функций в $\mathbb{R}^N$. Именно, указанное пространство вводится следующим образом:

$$S_{(\omega)}(\mathbb{R}^N) = \Big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) : \forall p \in \mathbb{N} \quad \|f\|_p := \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \frac{|f^{(\alpha)}(x)|\, e^{p\omega(x)}}{\exp p\varphi_\omega^*\left(\frac{|\alpha|}{p}\right)} < \infty \Big\}. \tag{1}$$

Здесь, как обычно, $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^N$ функций; $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$ — мультииндекс; $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$ — его длина; $f^{(\alpha)} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_N^{\alpha_N}}$; ω — весовая функция, определяющая пространство; φ_ω^* — функция, сопряженная по Юнгу с $\omega(e^x)$.

Ранее (см. [1,2]) пространство $S_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ вводилось с помощью оценок, накладываемых одновременно на функции f и их преобразования Фурье $\widehat{f}$:

$$S_{(\omega)}(\mathbb{R}^N) = \Big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) : \forall p \in \mathbb{N} \quad \|f\|_{\omega,p} := \max_{|\alpha|\le p} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left(\left|f^{(\alpha)}(x)\right| + \left|\widehat{f}^{(\alpha)}(x)\right| \right) e^{p\omega(x)} < \infty \Big\}.$$

Очевидно, что данный подход менее удобен, чем (1).

В работе доказано, что пространство $S_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$, определяемое равенством (1), обладает всеми классическими свойствами пространств быстро убывающих функций. Именно, проверено, что преобразование Фурье является автоморфизмом пространства $S_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$. Далее, установлены непрерывные вложения $D_{(\omega)}(\mathbb{R}^N) \subset S_{(\omega)}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$, где $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ — известное пространство Берлинга ультрадифференцируемых функций, а $D_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ — соответствующее ему пространство пробных ультрадифференцируемых функций. Наконец, показано, что пространство $D_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ плотно в $S_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bjorck G.* Linear partial differential operators and generalized distributions. Ark. Mat. 1966. Vol. 6. pp. 351-407.
2. *Абанин А.В.* Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения. М.: Наука. 2007.

В. В. Семёнов (Киев, Украина)
semenov.volodya@gmail.com

ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ С МОНОТОННОЙ РЕГУЛИРОВКОЙ ШАГА ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ И ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

В докладе рассматриваются вариационные неравенства и операторные уравнения в гильбертовом пространстве и с дополнительными условиями вида включения в множество неподвижных точек заданного оператора, т.е. задачи вида

$$\text{найти } x \in C: \ (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C \ \text{ и } \ x = Tx,$$

где C — непустое выпуклое замкнутое подмножество гильбертова пространства H, $A : H \to H$, $T : H \to H$.

Для приближенного решения задач предложен модифицированный экстраградиентный алгоритм с монотонной регулировкой величины шага, не требующей знания константы Липшица оператора A:

$$\begin{cases} y_n = P_C\left(x_n - \lambda_n A x_n\right), \\ z_n = P_C\left(x_n - \lambda_n A y_n\right), \\ x_{n+1} = \mu_n x_n + (1-\mu_n) T z_n, \\ \lambda_{n+1} = \min\left\{\lambda_n, \tau \frac{\|y_n - x_n\|}{\|Ay_n - Ax_n\|}\right\} \text{ если } Ay_n \neq Ax_n \text{ иначе } \lambda_{n+1} = \lambda_n, \end{cases}$$

где $\tau \in (0,1)$, $\mu_n \in (0,1)$.

В отличие от применявшихся ранее правил выбора величины шага (см. [1, 2]) в предлагаемом алгоритме не производится дополнительных вычислений значений оператора A и отображения проектирования P_C.

Доказана слабая сходимость алгоритма для задач с псевдомонотонными, липшицевыми, секвенциально слабо непрерывными операторами A и квазинерастягивающими операторами T, задающими дополнительные условия.

Л И Т Е Р А Т У Р А
1. *Denisov S. V., Semenov V. V., Chabak L. M.* Convergence of the Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators. Cybernetics and Systems Analysis. 2015. Vol. 51, No. 5, pp. 757–765.
2. *Verlan D. A., Semenov V. V., Chabak L. M.* A Strongly Convergent Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators. Journal of Automation and Information Sciences. 2015. Vol. 47, No. 7, pp. 31–46.

А. Ф. Чувенков
(Ростов-на-Дону, Россия)
chuvenkovaf@mail.ru

О НОВЫХ КВАЗИСТЕПЕННЫХ ГРАНД-ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЁННЫХ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ

Вводимые гранд-пространства (в частности, $L^a_{M),s}(\Omega,\omega)$) строятся на основе весовых пространств Орлича $L_M(\Omega,\omega)$, порожденных N-функциями $M(u)$, имеющих различные скорости убывания в нуле (p_1) и роста в бесконечности (p_2).

Предполагаем, что выполняются ограничения $1 < p_1 < \infty$, $1 < p_2 < \infty$, $p = \min\{p_1, p_2\}$. Для любого положительного веса $a(x)$ из пространства $L_M(\Omega,\omega)$ определяем новый (дополнительный) вес формулой

$$\omega_\delta(x) \equiv \omega_\delta(a, M) = (p\delta)^{\frac{1}{p}} M^\delta(a(x)) \cdot \omega(x), \quad 0 < \delta < 1 - 1/p.$$

Через $L^a_{M),s}(\Omega,\omega)$ обозначаем гранд-пространство Орлича с весом $\omega_\delta(x)$:

$$\left\{ f : \rho_{a,s}(f, M, \omega) = \left(\int\limits_0^{\delta_0} \left[\int\limits_\Omega M^{1-\delta}(|f(x)|)\omega_\delta(a, M)dx \right]^{\frac{s}{1-\delta}} d\delta \right)^{\frac{1}{\delta}} < \infty \right\},$$

где $f \in L_M(\Omega,\omega)$, $s \in [1,\infty]$, $\delta_0 \in (0, 1-1/p)$. В случае, когда $M(u) = \frac{u^p}{p}$, $1 < p < \infty$, $s = \infty$, имеем гранд-пространство Лебега $L_{p)}(\Omega)$ функций, заданных на ограниченных множествах Ω ([2]), и на неограниченных – $L^a_{p)}(\Omega)$ ([3]).

Теорема. *Пусть функция f принадлежит пространству Орлича $L_M(\Omega,\omega)$, $1 < p = \min\{p_0, p_\infty\} < \infty$, a – положительный вес. Для того чтобы была справедлива оценка*

$$\rho_{a,s}(f, M, \omega) \le C_{p,a}\rho(f, M, \omega),$$

с точной константой $C_{p,a}$, необходимо и достаточно, чтобы $a \in L_M(\Omega,\omega)$.

Сообщаются первоначальные основные свойства введенных гранд-пространств: банаховость, сепарабельность и другие.

Л И Т Е Р А Т У Р А
1. *Rao M. M., Ren Z. O.* Theory of Orlicz Spaces. Crc Press. 1991, pp. 472.
2. *Iwaniec T., Sbordone C.* On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses. Arch. Rational Mech. Anal. 1992. № 119, C. 129–143.

3. *Умархаджиев С. М.* Обобщение понятия гранд-пространства Лебега. Известия вузов. Математика. 2014, № 4, С. 42-51.

Т. Г. Шагова (Минск, Беларусь)
tanya.shagova@gmail.com

УМНОЖЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Распределение f будем называть *рациональным*, если существует пара функций (f^+, f^-), где $f^\pm$ – правильные рациональные функции, аналитические в верхней и нижней полуплоскостях соответственно, что f является пределом в пространстве распределений семейства гладких функций $f_\varepsilon(x) = f^+(x+i\varepsilon) - f^-(x-i\varepsilon)$. Тогда говорят, что произведение распределений f и g является распределением, если существует предел семейства $f_\varepsilon g_\varepsilon$ в пространстве распределений.

В силу того, что любую рациональную функцию можно представить в виде суммы простейших дробей, вопрос о придании смысла произведению рациональных распределений сводится к определению произведений распределений $f = (f^+, f^-)$ и $g = (g^+, g^-)$, когда $f^\pm$, $g^\pm$ являются простейшими рациональными дробями. В случае, когда функции f^+, g^- и f^-, g^+ имеют особенности в разных точках, произведение распределений f и g существует. Для случая, когда f^+, g^- и f^-, g^+ имеют особенности в одинаковых точках, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть рациональные распределения f и g имеют вид:*

$$f = \Big(\sum_{k=1}^{m} f_k^+(z), \sum_{k=1}^{m} f_k^-(z)\Big), \quad g = \Big(\sum_{k=1}^{m} g_k^+(z), \sum_{k=1}^{m} g_k^-(z)\Big),$$

и

$$f_k^\pm(z) = \sum_{j=1}^{p_k} \frac{A_{kj}^\pm}{(z-z_k)^j}, \quad g_k^\pm(z) = \sum_{j=1}^{p_k} \frac{B_{kj}^\pm}{(z-z_k)^j},$$

где $\{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ – заданный набор вещественных чисел. Произведение распределений f и g существует тогда и только тогда, когда для каждого k, $1 \le k \le m$, существует число t_k, такое, что

$$B_{kj}^+ = t_k A_{kj}^+, \quad B_{kj}^- = -t_k A_{kj}^-.$$

Например, распределения δ и $\mathcal{P}(1/x)$ являются рациональными и их произведение есть $-\delta'/2$.

Session II

Function Theory and Approximation Theory

A. I. Fedotov (Kazan, Russia)
fedotovkazan@hotmail.com

JUSTIFICATION OF THE APPROXIMATE METHODS FOR SOLVING OPERATOR EQUATIONS

Nowdays there is a large number of the approximate methods for solving operator equations, but the number of methodics for justification these methods are obviously not enough, therefore many methods are still unjustified. So I try to develop the theory of justification of the approximate methods for solving operator equations.

Actually there were only 2 main approaches to justification. One is based on the wellknown Banach theorem.

Theorem 1. *Let an operator $A : X \to Y$ be linear and invertible and an operator $\bar{A} : X \to Y$ be linear. If*

$$\|A - \bar{A}\|_{X \to Y} < \|A^{-1}\|^{-1}_{Y \to X},$$

then the operator $\bar{A}$ is also invertible.

Second approach is based on Fredholm theorem.

Theorem 2. *Let an operator $A : X \to Y$ be linear and invertible and an operator $\bar{A} : X \to Y$ be linear. If the operator*

$$A - \bar{A} : X \to Y$$

is compact and an equation $\bar{A}x = 0$ has the only solution $x = 0$, then the operator $\bar{A}$ is also invertible.

In the papers [1]–[4] some other approaches are developed to justify the approximate methods for solving singular integro-differential and periodic pseudodifferential equations which previously were not justified.

R E F E R E N C E S

1. *Fedotov A. I.* On the asymptotic convergence of the polynomial collocation method for singular integral equations and periodic pseudodifferential equations. Arcivum mathematicum. 2002. Vol. 38, No. 1, pp. 1–13.

2. *Fedotov A. I.* Convergence of cubature-differences method for multidimesional singular integro-differential equations. Arcivum mathematicum. 2004. Vol. 40, No. 2, pp. 1–13.

3. *Fedotov A. I.* Quadrature-difference methods for solving linear and nonlinear singular integro-differential equations. Nonlinear analysis. 2009. Vol. 71, pp. e303–e308.

4. *Fedotov A. I.* Approximation of solutions to singular integro-differential equations by Hermite-Fejer polynomials. Ufa mathenatical journal. No. 2, pp. 109–117.

M. A. Karapetyants (Moscow, Russia)
karapetytantsmk@gmail.com

DYADIC GENERALIZED FUNCTIONS AND UNIQUENESS THEOREM

In the year of 2007 dyadic generalized functions were introduced by Prof. B. Golubov as continuous linear functionals on the linear space $D_d(\mathbb{R}_+)$ of infinitely differentiable functions compactly supported by the positive half-axis $\mathbb{R}_+$ together with all dyadic derivatives.

The space of rapidly decreasing in the neighborhood of infinity dyadic generalized functions $S_d(\mathbb{R}_+)$ was defined as the space of functions from $C^{(\infty)}{}_W(\mathbb{R})$ such that for all $\alpha,\ \beta \in \mathbb{Z}_+$

$$\lim_{x\to\infty} (h(x))^{-\beta}\phi^{\alpha}(x) \ = \ 0,\ h(x) = 2^{-n},\ 2^n \le x < 2^{n+1},\ n \in \mathbb{Z}.$$

However, $D_d(\mathbb{R}_+)$ and $S_d(\mathbb{R}_+)$ defined as they are above were not invariant with respect to the Walsh-Fourier transform $F[f](x) \ = \ \int_{R_+} \psi(x,y)f(y)dy$.

Thus, S. Volosivets suggested in 2009 the following definition of the space $D_d(\mathbb{R}_+)$: functions f such that

$$f(x) \ = \begin{cases} \ \ constant, & x \in \delta \\ 0, otherwise, & \end{cases}$$

for some dyadic interval δ. Now, if $f \in D_d(\mathbb{R}_+)$ then $F[f]$ also belongs $D_d(\mathbb{R}_+)$.

Thereby, we consider the space $D_d(\mathbb{R}_+)$ and prove that it cannot be defined "better" in terms of the range of functions it contains to preserve the property of being invariant. We also consider the refinement equation $\phi \ = \ \sum_{k=0}^{2^n-1} C_k\phi(2x \ominus k),\ x \in R_+,\ C_k$ - finite set of complex numbers, and prove some facts of its solution ϕ, in particular, the uniqueness of that solution (if exists).

REFERENCES

1. *Golubov B. I.* Binary analysis elements. LKI.2007.
2. *Novikov I. A., Protasov V. Yu., Skopina M. A.* Wavelet theory. PhysMatLit.2005.
3. *Volosivets S. S.* Applications of P-adic generalized functions and approximations by a system of p-adic translations of a function. Siberian Mathematical Journal. 2009. Vol. 50, No. 1, pp. 3-18.
4. *Golubov B. I.* Dyadic distributions. Sbornik: Mathematics. 2007. Vol. 198, No. 2, pp. 207-230.
5. *Protasov V. Yu., Farkov Yu. A* Dyadic wavelets and refinable functions on a half-line. Sbornic: Mathematics. 2006. Vol. 197, No. 10, pp. 129-160.

V.Yu.Protasov (Moscow, Russia)
v-protassov@yandex.ru

WAVELETS, BOUNDARY DIMENSION OF COMPACT SETS, AND AUTOMATA THEORY

Multivariate wavelets on $\mathbf{R}^d$ can be constructed with an arbitrary dilation integer expansive $d \times d$ matrix and arbitrary set of “digits” from the corresponding quotient sets. A formula for the Hölder exponent of multivariate wavelets was presented in [1]. In the simplest case of multivariate Haar wavelets, this formula can be applied for computing the boundary dimension of self-similar tiles. Moreover, the same value has an interpretation in terms of the problem of synchronizing automata. A finite automata is determined by a directed multigraph with N vertices (states) and with all edges (transfers) coloured with m colours so that each vertex has precisely one outgoing edge of each colour. The automata is synchronizing if there exists a finite sequence of colours such that all paths following that sequence terminate at the same vertex independently of the starting vertex. The problem of synchronizing automata has been studied in great detail (see [3] for a survey). It turns out that each multivariate Haar function can be naturally associated with a finite automata and the Hölder exponent is related to the length of the synchronizing sequence. We introduce a concept of synchronizing rate and show that it is actually equal to the Hölder exponent of the corresponding Haar function. Applying this result we prove that the boundary dimension of self-similar tiles, as well as the Hölder exponent of Haar functions, can be found within finite time by a combinatorial algorithm.

R E F E R E N C E S

1. *Charina M., Protasov V. Yu.* Regularity of anisotropic refinable functions, Applied and Computational Harmonic Analysis. 2017. published electronically, https://doi.org/10.1016/j.acha.2017.12.003

2. *Krivoshein A., Protasov V. and Skopina M.* Multivariate wavelet frames, Springer, 2016.

3. *Volkov M. V.* Synchronizing Automata and the Ĉerny Conjecture, Proc. 2nd Int'l. Conf. Language and Automata Theory and Applications (LATA 2008) (PDF), LNCS, 5196, Springer-Verlag, pp. 11—27.

T. I. Zaitseva (Moscow, Russia)
zaitsevatanja@gmail.com

MULTIVARIATE HAAR SYSTEMS AND SELF-SIMILARITY TILES: CLASSIFICATION AND REGULARITY

The Haar system on the real line is the simplest example of wavelets. Multidimensional Haar system can be constructed as a direct product of one-dimensional systems, although, this simple approach has some disadvantages. One of them is a big amount of corresponding generating mother wavelet functions. That is why it is more effective to construct Haar multivariate functions using an arbitrary integer dilation matrix M (all of whose eigenvalues are larger than one in the absolute value). The univariate Haar system is based on the characteristic function of the segment [0,1]. In the construction in $\mathbb{R}^n$, the unit segment is replaced by a compact set G with a nonempty interior (the so called tile) which possess the following properties:

1) $G = \bigcup\limits_{d \in D} M^{-1}(G+d)$, where D is the finite set of integer vectors (called digits);

2) integer shifts of the tile G cover $\mathbb{R}^n$ with one layer (all intersections have zero measure).

So, it is important to classify somehow simple multivariate tiles. In this work we present a classification of all two-digits Haar systems and compute their Holder regularity. The regularity is important for estimating the rate of convergence of the cascade algorithm for computing the coefficients of the Haar expansion. We also classify the most regular cases: the case of polygonal tiles and convex polyhedral tiles.

REFERENCES

1. *Gröchenig K., Madych W. R.* Multiresolution analysis, Haar bases and self-similar tilings of $\mathbb{R}^n$. IEEE Trans. Inform. Theory. 1992. Vol. 38, pp. 556–568.

2. *Lagarias J., Wang Y.* Integral self-affine tiles in $\mathbb{R}^n$. II. Lattice tilings. J. Fourier Anal. Appl. 1997. Vol. 3, pp. 83 – 102.

Г. Акишев (Астана, Казахстан)

akishev_g@mail.ru

О ТОЧНОСТИ НЕРАВЕНСТВА РАЗНЫХ МЕТРИК ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В ОБОБЩЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА

Пусть функция ψ непрерывна, неубывает, вогнута на $[0,1]$, $\psi(0)=0$ и $1\leqslant\tau<\infty$. Обобщенным пространством Лоренца $L_{\psi,\tau}(\mathbb{T}^m)$ называется множество измеримых на $\mathbb{T}^m=[0,2\pi]^m$, имеющих 2π-период по каждый переменной x_j, $j=1,\ldots,m$, функций $f(x_1,\ldots,x_m)$, с нормой $\|f\|_{\psi,\theta}$ (см. [1]). Для функции $\psi(t), t \in [0,1]$, положим $\alpha_\psi=\underline{\lim}_{t\to0}\psi(2t)/\psi(t)$, $\beta_\psi=\overline{\lim}_{t\to0}\psi(2t)/\psi(t)$.

Множество всех неотрицательных, на $[0,1]$ функций $\psi(t)$, для которых $(\log 2/t)^{\varepsilon}\psi(t)\uparrow+\infty$ и $(\log 2/t)^{-\varepsilon}\psi(t)\downarrow 0$ при $t\downarrow 0$ обозначим SVL. Рассмотрим кратный тригонометрический полином

$$T_{\overline{n}}(\overline{x})=\sum_{k_1=-n_1}^{n_1}\ldots\sum_{k_m=-n_m}^{n_m}a_{\overline{k}}e^{\sum_{j=1}^m k_jx_j},\ n_j\in\mathbb{N}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $1<\tau_1<\tau_2<\infty$, *функции* ψ_1,ψ_2 *удовлетворяют условиям* $1<\alpha_{\psi_1}=\beta_{\psi_2}<2$, $\sup_{0<t\leqslant1}\psi_2(t)/\psi_1(t)<\infty$ *и* $\psi_1/\psi_2\in SVL$. *Тогда справедливо соотношение*

$$\sup_{T_{\bar{n}}\neq0}\frac{\left\|T_{\bar{n}}\right\|_{\psi_1,\tau_1}}{\left\|T_n\right\|_{\psi_2,\tau_2}}\asymp\frac{\psi_1\Big(\prod_{j=1}^m(n_j+1)^{-1}\Big)}{\psi_2\Big(\prod_{j=1}^m(n_j+1)^{-1}\Big)}(\log\prod_{j=1}^m(n_j+1))^{1/\tau_1-1/\tau_2}.$$

В частности из этой теоремы следуют результаты [1]–[3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шерстнева Л. А.* О свойствах наилучших приближений Лоренца и некоторые теоремы вложения. Изв. вузов. Матем. 1987. № 10, стр. 48–58.

2. *Gogatishvili A., Opic B., Tikhonov S., Trebels W.* Ulyanov-type inequalities between Lorentz-Zygmund spaces. J. Fourier Anal. Appl. 2014. Vol. 20. page 1020-1049.

3. *Акишев Г.* Неравенство разных метрик в обобщенном пространстве Лоренца. Труды ИММ УрО РАН. 2018. Том. 24, № 4, стр. 5–18.

М. В. Невский, А. Ю. Ухалов (Ярославль, Россия)
mnevsk55@yandex.ru, alex-uhalov@yandex.ru

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА N-МЕРНОМ ШАРЕ

Обозначим через B_n евклидов единичный шар пространства $\mathbb{R}^n$, задаваемый неравенством $\|x\| \le 1$, $\|x\| := \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$. Под $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ будем понимать пространство многочленов от n переменных степени ≤ 1, т. е. линейных функций на $\mathbb{R}^n$. Пусть $x^{(1)}, \ldots, x^{(n+1)}$ — вершины n-мерного невырожденного симплекса $S \subset B_n$. Интерполяционный проектор $P : C(B_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, соответствующий этому симплексу, определяется равенствами

$$Pf\left(x^{(j)}\right) = f\left(x^{(j)}\right), \quad 1 \le j \le n+1.$$

Через $\|P\|$ обозначим норму P как оператора из $C(B_n)$ в $C(B_n)$. Определим θ_n как минимальную величину нормы P при условии $x^{(j)} \in B_n$. Положим для $0 \le t \le n+1$

$$\psi(t) = \frac{2\sqrt{n}}{n+1}\,(t(n+1-t))^{1/2} + \left|1 - \frac{2t}{n+1}\right|.$$

Теорема. *Пусть S^* — правильный симплекс, вписанный в граничную сферу $\|x\| = 1$, P^* — соответствующий интерполяционный проектор. Тогда*

$$\|P^*\| = \max\{\psi(a), \psi(a+1)\}, \quad a := \left\lfloor \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2} \right\rfloor.$$

Всегда $\sqrt{n} \le \|P^*\| \le \sqrt{n+1}$. При этом $\|P^*\| = \sqrt{n}$ лишь в случае $n = 1$, а равенство $\|P^*\| = \sqrt{n+1}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\sqrt{n+1}$ — целое число. По крайней мере для $1 \le n \le 4$ верно $\|P^*\| = \theta_n$. Авторы предполагают, что последнее равенство выполняется для любого n.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Невский М. В., Ухалов А. Ю.* Линейная интерполяция на евклидовом шаре в $\mathbb{R}^n$. Моделирование и анализ информационных систем. (Статья принята к публикации.)

А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко, А.А. Драпеза (Гомель, Беларусь)
svoitov@gsu.by, nmankevich@tut.by

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЭРМИТА – ПАДЕ

Пусть $f = (f_1, f_2, ..., f_k)$ – набор, состоящий из k формальных степенных рядов

$$f_j(z)\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^j}{z^{i+1}}, \;\; j = 1, 2..., k$$

с комплексными коэффициентами. Множество k–мерных мультииндексов $n = (n_1, ..., n_k)$ обозначим $\mathbb{Z}_+^k$. Порядок мультииндекса $n = (n_1, ..., n_k)$ – это сумма $|n| := n_1 + ... + n_k$. Зафиксируем мультииндекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ и рассмотрим следующую задачу Эрмита – Паде:

Задача ЭП. *Найти тождественно не равный нулю многочлен $Q = Q_n$, $\deg Q \leq |n|$, такой, что для некоторых многочленов $P_1 = P_n^1, \ldots, P_k = P_n^k$ выполняются равенства:*

$$R_n^j(z) = Q(z)f_j(z) - P_j(z) = \frac{c_j}{z^{n_j+1}} + \ldots, \;\; j = 1, 2..., k.$$

Если полиномы $Q, P_1, \ldots, P_k$ находятся с точностью до мультипликативного множителя, то говорят, что задача Эрмита – Паде имеет единственное решение. Хорошо известно, что достаточным условием единственности является равенство $\deg Q = |n|$, т.е. нормальность индекса n (см. [1]). В данном сообщении получен критерий единственности решения поставленной задачи ЭП.

В предположении, что $n_j \neq 0$, рассмотрим матрицы-строки порядка $1 \times (|n|+1)$: $F_i^j = \left(f_{i-1}^j \; f_i^j \; \ldots \; f_{|n|+i-1}^j\right)$, $i = 1, ..., n_j$; матрицы порядка $n_j \times (|n| + 1)$: $F^j = \left[F_1^j \;\; F_2^j \ldots F_{nj}^j\right]^T$, $j = 1, ..., k$ и матрицу $F_n = \left[F^1 \; F^2 \ldots F^k\right]^T$ порядка $|n| \times (|n| + 1)$. При $n_j = 0$ в матрице F_n блок-матрица F^j отсутствует.

Теорема 1. *Для того, чтобы для фиксированного мультииндекса $n \in \mathbb{Z}_+^k$ задача Эрмита – Паде имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы $rang\, F_n = |n|$.*

При $rang\, F_n = |n|$ получены явные формулы для $Q, P_1, \ldots, P_k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никишин Е. М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность/ Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, 1988.

И. Г. Царьков (Россия, Москва)
tsar@mech.math.msu.su

НЕПРЕРЫВНЫЕ ВЫБОРКИ В РАВНОМЕРНО ГЛАДКИХ И ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ [1]

Определение. *Пусть X – банахово пространство, через $\omega(t) = \omega_X(t)$ обозначим модуль выпуклости пространства X, т.е. величину* $\inf\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \mid x, y \in S, \|x - y\| \leqslant t\}$. *Через (UR) обозначим класс всех равномерно выпуклых пространств X, т.е. таких, что $\omega_X(t) > 0$ для всех $t \in (0, 2]$. Через (US) обозначим класс всех равномерно гладких банаховых пространств, т.е. таких, что модуль*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (№19-01-00332-а)

гладкости $\Omega(t) := \sup\{\frac{1}{2}(\|x+h\| + \|x-h\|) - 1 \mid \|h\| \leqslant t, x \in S\}$ *является* $o(t)$ *при* $t \to 0$.

Пусть $X \in (US) \cap (UR)$ и для непустого множества $M \subset X$ рассмотрим множество $A_0(x) := \bigcap\limits_{\delta>0} A_\delta(x)$, где $A_\delta(x) := \overline{\operatorname{conv}}\, \mathring{P}^\delta_M x$, будем предполагать, что для всех точек $x \in X \setminus M$ верно неравенство $d(x) := \varrho(x, A_0(x)) > 0$. Пусть $g_0(x)$ – ближайшая точка в $A_0(x)$ для x. В силу теоремы Хана-Банаха и гладкости пространства X существует единственный функционал $f = f_x \in S^*$: $f(g_0(x) - x) = \|g_0(x) - x\|$.

Пусть $C_x = \{y \in S(x, \varrho(x, M)) \mid f_x(y - x) \geqslant d(x)\}$. Для каждой точки $y \in C_x$ рассмотрим единственный опорный функционал $y^* \in S^*$: $y^*(y - x) = \|y - x\|$ (единственность такого функционала вытекает из условия $X \in (US)$). Множество всех таких функционалов обозначим через T_x, и положим

$$\gamma(x) := \inf\Big\{y^*(g_0(x) - x)/\|g_0(x) - x\| \mid y^* \in T_x\Big\}.$$

Теорема 1. *Пусть* $X \in (US) \cap (UR)$, $\varphi : (0, +\infty) \to (0, 1]$ *такая непрерывная функция, что сходится интеграл* $\int_0^R \frac{dr}{\varphi(r)}$ $(R > 0)$; $M \subset X$ *такое замкнутое множество, что для всех* $x \in X \setminus M$: $r(x) = \varrho(x, M) \leqslant R$ *верно неравенство:* $\gamma(x) \geqslant \varphi(r(x))$. *Тогда для любого* $\sigma > 0$ *существует такое непрерывное отображение* $\Phi : U_R \to M$, *что для всех* $x \in U_R$ *верно неравенство*

$$\|\Phi(x) - x\| \leqslant (1 + \sigma) \int_0^{r(x)} \frac{dr}{\varphi(r)}.$$

М. М. Цвиль (Ростов-на-Дону)
tsvilmm@mail.ru

ОПЕРАТОРЫ ФАБЕРА В ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Введем следующие обозначения: C^n — n-мерное комплексное пространство, его точки $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$; $D^+ = D_1^+ \times D_2^+ \times \ldots \times D_n^+$, $D^- = D_1^- \times D_2^- \times \ldots \times D_n^-$ — полицилиндрические области в C^n с остовом $\sigma = L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_n$, где D_k^+ — конечная односвязная область в плоскости C^n, ограниченная спрямляемой жордановой кривой L_k; D_k^- — ее дополнение до всей плоскости; функция $z_k = \psi_k(w_k)$ конформно и однолистно отображает внешность единичного круга на область D_k^- при условиях $\psi_k(\infty) = \infty$, $\psi_k'(\infty) > 0$; функция $w_k = \varphi_k(z_k)$ — обратная к $\psi_k(w_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$; $U^+ = \{w \in C^n\colon |w_k| < 1\}$ — поликруг в C^n; T^n — единичный тор.

Рассмотрим функцию $\tau(t) \in H_2(U^+)$ и весовую функцию $g(z) \in E_2(D^-)$, для которых выполняется условие

$$\int\limits_{T^n} |\tau(t)| \cdot |(\psi^* g)(t)| \cdot |\psi_1'(t_1) \dots \psi_n'(t_n)| \cdot |dt_1| \dots |dt_n| < \infty.$$

В этом случае в работе [1] был определен обобщенный оператор Фабера для полицилиндрической области D^+

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\sigma} \frac{(\varphi^* \tau)(\zeta) g(\zeta)}{(\zeta - z)^I} d\zeta, \quad z \in D^+,$$

где $d\zeta = d\zeta_1 \dots d\zeta_n$; $I = (1, 1, \dots, 1)$.

В случае, когда $g(z) \equiv 1$, имеем оператор Фабера, который есть n-мерный интеграл типа Коши. Одно из основных свойств оператора Фабера состоит в том, что всякий многочлен n переменных $t_1, t_2, \dots, t_n$ $\sum\limits_{\ell \in \Omega} c_\ell t^\ell$ преобразуется в многочлен по многочленам Фабера $\sum\limits_{\ell \in \Omega} c_\ell \Phi_\ell(z)$, где Ω — некоторое подмножество целочисленной решетки Z_+^n; $\Phi_\ell(z) = \Phi_1(z_1)\Phi_2(z_2)\dots\Phi_n(z_n)$.

Приводятся оценки норм операторов Фабера в конкретных пространствах. В тех случаях, когда оператор Фабера имеет конечную норму, можно переносить различные результаты о приближении аналитических функций многочленами с единичного поликруга на произвольную полицилиндрическую область, остов которой образуют достаточно гладкие кривые.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цвиль М. М.* Обобщенные операторы Фабера для полицилиндрических областей. Тезисы докладов. Материалы конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа»-VI. Ростов-на-Дону, 24–29 апреля 2016. С. 74–75.

В. В. Шустов (Москва, Россия), vshustov@gosniias.ru

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ СОСТАВНЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ ЭРМИТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АППРОКСИМАЦИИ ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ

В продолжение работ [1-2] рассмотрена задача о представлении функции составными двухточечными многочленами Эрмита, в которых в качестве производных используются конечно-разностная их оценка, полученная путем дифференцирования многочлена Лагранжа, построенного по узловым точкам в окрестности заданной точки.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[x_0, x_n]$, является достаточно гладкой и в узловых точках $x_i = x_0 + ih$, i=0,1,… n с шагом h заданы только значения функции

$$f(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots n. \tag{1}$$

Пусть $L_{i,p}\ (x)$ - многочлен Лагранжа, построенный для i-ой точки с использованием точек отрезка $[x_{i-k},\ x_{i-k+p}]$, $H(x){=}H_i(x)$, $x\in[x_i{,}x_{i+1}), i=0,1,...n-1$ - составной многочлен Эрмита, и

$$H_i^{(j)}(x_i)=L_{i,p}^{(j)}(x_i),\quad j=0,1,...,m,\ \ i=0,1,...,n. \tag{2}$$

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет (1) и (2). Тогда $f(x)$ может быть представлена как: $f(x)=H_m(x)+r_p(x)+r_m(x)$, где*

$$H_m(x)=\sum_{j=0}^{m}\frac{f_i^j h_i^j}{j!}\psi_{i,m}^j(\xi)+\sum_{j=0}^{m}\frac{f_{i+1}^j h_i^j}{j!}\psi_{i+1,m}^j(\xi);\xi=\left\{\frac{x-x_0}{h}\right\};i=\left[\frac{x-x_0}{h}\right],$$

$$\psi_{i,m}^j(\xi)=\xi^j(1-\xi)^{m+1}\sum_{k=0}^{m-j}c_{m+k}^k\xi^k;\psi_{i+1,m}^j(\xi)=(\xi-1)^j\xi^{m+1}\sum_{k=0}^{m-j}c_{m+k}^k(1-\xi)^k,$$

$$f_i^j=\frac{1}{h^j}\sum_{l=0}^{p}\frac{(-1)^{p+l}f_{i+l-k}}{l!(p-l)!}\left[\prod_{s=0}^{p}\frac{t-s}{t-l}\right]_{t=k}^{(j)},$$

$$r_p=\sum_{j=0}^{m}\psi_{i,m}^j(\xi)\sum_{l=0}^{j}\frac{h^{p+1+l}f^{(p+1+l)}(\xi_l)}{(j-l)!(p+1+l)!}\left[\prod_{s=0}^{p}(t-s)\right]_{t=k}^{(j-l)};\ \ \xi_l\in(x_{i-k},x_{i-k+p}),$$

$$r_m=\frac{f^{(2m+2)}(\eta_i)h^{2m+2}}{(2m+2)!}\xi^{m+1}(\xi-1)^{m+1},\eta_i\in(x_i{,}x_{i+1}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шустов В.В.* О приближении функций двухточечными интерполяционными многочленами Эрмита // ЖВММФ. 2015. Т. 55, № 7, С. 1091.

2. *Шустов В.В.* Представление функций составными двухточечными многочленами Эрмита // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа-VIII. - Ростов н/Д, 2018. С. 52-53

Session III

Differential Equations and Mathematical Physics

R. Castillo-Perez (Instituto Politécnico Nacional, ESIME Zacatenco, CDMX, Mexico City, Mexico),
V. V. Kravchenko (CINVESTAV del IPN, Unidad Querétaro, Querétaro, Mexico)
S. M. Torba (CINVESTAV del IPN, Unidad Querétaro, Querétaro, Mexico)
rcastillo@ipn.mx, vkravchenko@math.cinvestav.edu.mx, storba@math.cinvestav.edu.mx

THE METHOD OF FUNDAMENTAL SOLUTIONS WITH BERGMAN KERNEL IN EIGENVALUE PROBLEMS

The Method of Fundamental Solutions (MFS) has been employed for the solution of boundary value problems long ago [1]. However, when used for the solution of eigenvalue problems its most simple version shows some limitations because it employs the determinant (which decreases very fast) for the detection of the eigenvalues [2]. This makes it difficult to locate them, specially for non trivial geometries. Several methods have been proposed in order to overcome this and other drawbacks still using the MFS [3]. Here we propose and analize the performance of a method in which the Bergman kernel [4] is constructed based on a complete system of fundamental solutions, which turns the eigenvalue problem into a problem of locating simple poles of a function based on the computed Bergman kernel and having a more reasonable scale.

REFERENCES

1. *Kupradze V. D., and Aleksidze M. A.* The Method of Functional Equations for the Approximate Solution of Certain Boundary Value Problems. Z. Vych. Mat. 1964, 4, pp. 683–715.

2. *Aleksidze M. A.* Fundamental Functions in Approximate Solutions of Boundary Value Problems, Nauka, Moscow, Russia, 1991 (in Russian).

3. *Alves C. J. S. and Antunes P. R. S.* The Method of Fundamental Solutions Applied to the Calculation of Eigenfrequencies and Eigenmodes of 2D Simply Connected Shapes. CMC 2005, Vol. 2, No. 4 pp. 251–265.

4. *Campos H. M., Castillo-Perez R., Kravchenko V. V.* Construction and application of Bergman-type reproducing kernels for boundary and eigenvalue problems in the plane. Complex Variables and Elliptic Equations, 2012, Vol. 57, No. 7-8, pp. 787-824.

A. P. Chegolin (Rostov-on-Don, Russia)
apchegolin@mail.ru

HYPERSINGULAR INTEGRALS FOR SOME NON-ELLIPTIC DIFFERENTIAL OPERATORS

The implementation of the HSI-method in the non-elliptic case will be considered using a sufficiently wide class of n-dimensional operators with the Lorentz distance in symbol. These operators are of particular interest in terms of the following provisions. First of all, they realize the “negative” degrees of the multidimensional telegraph operator. Telegraph operator is an inhomogeneous and non-elliptic operator. This situation is the most difficult to construct complex degrees, in particular, to construct structures that invert potentials. In fact, a two-dimensional telegraph operator constructed according to the classical telegraph equation belongs to the class of such operators. Secondly, it turns out that the kernels of the integral operators under investigation behave locally in the same way as the kernels of the Riesz hyperbolic potentials. The HSI will be constructed using a modification of the standard generalized difference considering the behavior of the operator kernel. In this case, it is necessary to adjust this modification so that in Fourier images the operator constructed as an analytic continuation had the same symbol as the operator. The Fourier transform formula in the weak sense for the potential under consideration is proved, but by the uniqueness theorem of the analytic functions theory it remains valid also in the domain. The inversion formula (both a left and a right inverse to the operator) is verified by an exact passage to Fourier images on spaces of invariant functions. Thus, the hypersingular integrals realize the negative complex powers of the differential operators under consideration.

B. B. Delgado (Rostov-on-Don, Russia)
briceydadelgado@gmail.com

A RIGHT INVERSE OPERATOR FOR $CURL+\lambda$ AND ITS APPLICATIONS

In this talk will be presented a general solution of the equation [1]

$$curl\overrightarrow{w} + \lambda\overrightarrow{w} = \overrightarrow{g},$$

where λ is an arbitrary non-zero complex number and $\overrightarrow{g}$ belongs to the class of L^p-integrable functions whose divergence is also L^p-integrable. In other words, a right inverse operator for the operator $curl + \lambda$ is constructed in this class of integrable functions. The explicit general solution is based on the use of classical integral operators of quaternionic analysis as well as on the construction of metaharmonic conjugate functions. Applications of the above result are considered to the nonhomogeneous time-harmonic Maxwell system.

REFERENCES

1. *B. B. Delgado, V. V. Kravchenko.* A right inverse operator for $curl + \lambda I$ and applications,"(2018) *https://arxiv.org/abs/1812.07364.*

M. A. Dorodnyi (St. Petersburg, Russia)
mdorodni@yandex.ru

HOMOGENIZATION OF THE PERIODIC SCHRÖDINGER-TYPE EQUATIONS WITH THE LOWER ORDER TERMS

In $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, we consider a selfadjoint matrix strongly elliptic second order differential operator

$$\mathcal{B}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon + \sum_{j=1}^{d}\big(a_j(\mathbf{x}/\varepsilon)D_j + D_j a_j(\mathbf{x}/\varepsilon)^*\big) + \mathcal{Q}(\mathbf{x}/\varepsilon) + \lambda I, \quad \varepsilon > 0.$$

Here the principal term $\mathcal{A}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) b(\mathbf{D})$ is given in a factorized form, where g is a periodic, bounded, and positive definite $m \times m$ matrix-valued function, and $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^{d} b_l D_l$, where b_l are $m \times n$ matrices. It is assumed that $m \geq n$ and that $\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n$ for $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. The a_j are periodic matrix-valued functions; in general, they are unbounded. The potential $\mathcal{Q}$ is a distribution generated by some periodic measure (with values in the class of Hermitian matrices). The parameter λ is subject to some restriction ensuring the positive definiteness of the operator $\mathcal{B}_\varepsilon$.

We study the behavior of the operator $e^{-it\mathcal{B}_\varepsilon}$, $t \in \mathbb{R}$, for small ε. The following sharp order error estimate is obtained:

$$\| e^{-it\mathcal{B}_\varepsilon} - e^{-it\mathcal{B}^0} \|_{H^3(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1 (1 + |t|)\varepsilon. \tag{1}$$

Here $\mathcal{B}^0$ is the effective operator with constant effective coeffients. We show that under some additional assumptions on the operator (which are formulated in terms of the spectral characteristics near the bottom of the spectrum), this result can be improved:

$$\| e^{-it\mathcal{B}_\varepsilon} - e^{-it\mathcal{B}^0} \|_{H^2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_2 (1 + |t|)\varepsilon.$$

Finally, we confirm that (1) is sharp with respect to the type of the norm: in the general case the estimate $\| e^{-it\mathcal{B}_\varepsilon} - e^{-it\mathcal{B}^0} \|_{H^s \to L_2} = O(\varepsilon)$ is not true if $s < 3$. The supporting examples are given.

The results are applied to study the solution $\mathbf{u}_\varepsilon$ of the Cauchy problem for the Schrödinger-type equation $i\partial_t \mathbf{u}_\varepsilon = \mathcal{B}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{F}$. Applications to the magnetic Schrödinger equation with a singular electric potential and to the two-dimensional Pauli equation with singular potentials are given.

R E F E R E N C E S

1. *Dorodnyi M. A.* Homogenization of the periodic Schrödinger-type equations with the lower order terms. St. Petersburg Math. J., to appear.

V. E. Fedorov (Chelyabinsk, Russia)
kar@csu.ru

A CLASS OF DISTRIBUTED ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS IN BANACH SPACES

Let $\mathcal{Z}$ be a Banach space. Denote by $\mathcal{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$ the set of linear closed densely defined in $\mathcal{Z}$ operators, acting into $\mathcal{Z}$, such that

(i) for all $\lambda \in S_{\theta_0,a_0} := \{\mu \in \mathbf{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta_0, \mu \neq a_0\}$ we have $\lambda^\alpha \in \rho(A)$;

(ii) for every $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ there exists a constant $K = K(\theta, a) > 0$, such that for all $\mu \in S_{\theta,a}$ $\|R_{\mu^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta,a)}{|\mu^{\alpha-1}(\mu-a)|}$.

Consider the Cauchy problem

$$z(0) = z_0, \quad \int_b^c \omega(\alpha) D_t^\alpha z(t) d\alpha = Az(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

where D_t^α is the Gerasimov — Caputo derivative, $0 \leq b < c \leq 1$, $\omega : (b, c) \to \mathbf{C}$, $A \in \mathcal{A}^c(\theta_0, a_0)$. Denote $W_d^h(\lambda) := \int_d^h \omega(\alpha)\lambda^\alpha d\alpha$,

$$Z_k(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_{\theta,a}} e^{\lambda t} \left(\frac{W_b^c(\lambda)}{\lambda}\right)^k (W_b^c(\lambda)I - A)^{-1} d\lambda, \ k = 0, 1,$$

for some $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$. Denote by $E(\mathcal{Z})$ the set of all exponentially bounded functions $z : \overline{\mathbf{R}}_+ \to \mathcal{Z}$.

Theorem 1. *Let $0 \leq b < c \leq 1$, $A \in \mathcal{A}^c(\theta_0, a_0)$, $z_0 \in D_A$, $g \in C(\overline{\mathbf{R}}_+; D_A) \cap E(D_A)$ and $W_b^c(\lambda)$ be the holomorphic function on S_{θ_1,a_1} with some $\theta_1 \in (\pi/2, \theta_0]$, $a_1 \geq a_0$, satisfying the conditions*

$$\forall \lambda \in S_{\theta_1,a_1} \quad (W_b^c(\lambda))^{1/c} \in S_{\theta_0,a_0},$$
$$\exists C_1, C_2 > 0 \ \exists \varepsilon \in (0, c) \ \forall \lambda \in S_{\theta_1,a_1} \ C_1|\lambda|^\varepsilon \leq |W_b^c(\lambda)| \leq C_2|\lambda|^c.$$

Then $z(t) = Z_1(t)z_0 + \int_0^t Z_0(t-s)g(s)ds$ is a unique solution of problem (1) in $E(\mathcal{Z})$.

The case of $c > 1$ can be considered analogously. Similar problems with a bounded operator A were studied in [1]. The results are applied to study of the unique solvability for some initial-boundary value problem to systems of partial differential equations.

REFERENCES

1. *Fedorov V.E., Streletskaya E.M.* Initial-value problems for linear distributed-order differential equations in Banach spaces. Electronic Journal of Differential Equations. 2018. Vol. 2018, No. 176, pp. 1–17.

T. N. Harutyunyan (Yerevan, Armenia)
hartigr@yahoo.co.uk

ON SOME INVERSE PROBLEMS

We consider the uniqueness theorems in inverse Sturm-Liouville problems (theorems of Ambarzumian, Borg, Marchenko, Trubowitz, McLaughlin, Yurko, Horvath and others) and some their extensions. These theorems also considered as the properties of the "Eigenvalues function of the family of Sturm-Liouville operators (EVF)", studied by author. We give the algorithm of (uniquely) reconstruction of potential by EVF.

Similar problems considered for Dirac operators.

$\boxed{\text{G. A. Karapetyan}}$, **H. A. Petrosyan (Yerevan, Armenia)**
heghine.petrosyan@rau.am

APPROXIMATE SOLUTIONS OF THE DIRICHLET PROBLEM IN A HALF-SPACE FOR REGULAR EQUATIONS

Introduction. In this paper we consider a Dirichlet problem in a half-space for special (multihomogeneous) regular hypoelliptic equations with zero boundary conditions. Problems of this type appear in the study of multianisotropic processes and the difficulty of their study lies in the fact that the full symbol of an operator is not generalized homogeneous, as for elliptic or semi-elliptic equations (see [1]), but a multihomogeneous one, and the construction of an approximate solution for such equations is from itself difficult. But, applying special integral representations of functions (see [2]) through vertices of a completely regular Newton polyhedron, it was possible to construct approximate solutions in terms of integral operators. Similar questions in the whole space $\mathbb{R}^n$ were studied in [3]. In this paper we study the question of the solvability of the Dirichlet problem in Sobol'ev spaces in $W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n_+)$ $(1 < p < \infty)$.

In the space of functions defined on $\mathbb{R}^n_+$ consider the differential operator $P(D_x, D_{x_n})$ with constant real coefficients a_j $(j = 1, \ldots, M)$

$$P(D_x, D_{x_n}) = D_{x_n}^{2m} + \sum_{j=1}^{M} a_j D^{\alpha^j}. \tag{1}$$

with full symbol $P(\xi, \xi_n) = \xi_n^{2m} + \sum_{j=1}^{M} a_j \xi^{\alpha^j}$.

Let the operator (1) is a regular operator, i.e. there exists a constant number $C > 0$ such that for any $\xi \in \mathbb{R}^n$ inequality holds

$$|P(\xi, \xi_n)| \geq C \left(\sum_{j=1}^{M} \left| \xi^{\alpha^j} \right| + \xi_n^{2m} \right), \ \forall (\xi, \xi_n) \in \mathbb{R}^n_+. \tag{2}$$

For $1 < p < \infty$ denote by $\chi := \left(|\mu^0| + \frac{1}{2m}\right) - \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

In $\mathbb{R}^n_+$ consider the following Dirichlet problem:

$$\begin{cases} P(D_x, D_{x_n})U = f(x, x_n), \quad x_n > 0, \ x \in \mathbb{R}^{n-1}, & (3) \\ \left.\dfrac{\partial^j U}{\partial x_n^j}\right|_{x_n=0} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1. & (4) \end{cases}$$

In this paper we prove the following results.

Theorem 1. *Let for $1 < p < \infty$ $\chi > 1$, then for any function $f \in L_p(\mathbb{R}^n_+)$ with compact support problem (3)-(4) has a unique solution $U \in W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}^n_+)$, in addition, for any bounded region $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ there is a constant C> 0, such that*

$$\|U\|_{W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)}, \ \forall f \in L_p(\mathbb{R}^n_+), supp f \subset \Omega. \tag{5}$$

Theorem 2. *Let for $1 < p < \infty$ $\chi \leq 1$ and $f \in L_p(\mathbb{R}^n_+)$ with compact support satisfies the following orthogonality conditions:* $\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} x^s f(x, x_n)dx = 0$ *as* $|s| = 0, 1, \ldots, L-1$, *where L is a natural number, determined from the inequalities* $\chi + L\mu^0_{min} > 1 \geq \chi + (L-1)\mu^0_{min}$ *and* $\mu^0_{min} := \min\limits_{j=1,\ldots,n-1} \mu^0_j$. *Then for any such function f problem (3)-(4) has a unique solution from the class $W^{\mathfrak{M}}_p(\mathbb{R}^n_+)$, in addition, for any bounded region $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ there is a constant $C>0$, such that for which the inequality (5) holds.*

REFERENCES

1. *Demidenko G. V.* On the correct solvability of boundary value problems in a half-space for quasielliptic equations // Siberian Mathematical Journal, Vol. XXIX, No. 4, (1988).
2. *Karapetyan G. A.* Integral representation of functions and embedding theorems for n-dimensional multianisotropic spaces with one vertex of anisotropicity. // Siberian Math. Journal, v.58, n.3, (2017), 445-460.
3. *Karapetyan G. A., Petrosyan H. A.* On Solvability of Regular Hypoelliptic Equations in R^n // Journal of Contemporary Mathematical Analysis, v.53, n.4, (2018), 187–200.

D. B. Katz (Kazan, Russia)
katzdavid89@gmail.com

THE CAUCHY-HADAMARD INTEGRAL AND THE RIEMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM

The Cauchy-type integral over the curve Γ is a traditional tool for solving boundary problems of complex analysis. However, it may diverge if the length of the curve is infinite. We use Hadamard's idea of the finite part of the integral to study this situation. [1]

Let Γ be simple Jordan arc on the complex plane with the beginning at the point a and ending at the point b. If it is piecewise smooth, then the Cauchy type integral $\Phi(z) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{t-z}, \quad z \notin \Gamma$, with a sufficiently smooth density f will have limit values $\Phi^{\pm}(t)$ from both sides at any point $t \in \Gamma' := \Gamma \setminus \{a, b\}$, and these values satisfy $\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma'$, i.g. Cauchy type integral has a jump f on the arc Γ. This fact is important for solving the Riemann boundary value problem, see [1]. However, if the Γ arc length is infinite, бесконечна, then this integral may diverge We will study this situation with the application of Hadamard's idea of the finite part of the integral. The finite part of the divergent integral $\int\limits_a^b \frac{f(x)\,dx}{(x-a)^n}$ will be defined as $\int\limits_a^b \frac{(f(x)-P(x))\,dx}{(x-a)^n}$, where polynomial $P(x)$ is chosen such that the last integral converges (see [2]). We assume that Γ loses smoothness and straightness at one of its ends. We show that under certain restrictions on the arc and density f there is a polynomial of two variables $P(t, \bar{t})$ and holomorphic in $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ function Φ_0 such that the integral sum

[1]This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant 18-31-00060).

$\Phi(z) := \Phi_0(z) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{(f(t)-P(t,\bar{t}))\,dt}{t-z}, \quad z \notin \Gamma$, converges, Φ has the jump f and Γ, and $\Phi(\infty) = 0$. We call such sums the Cauchy-Hadamard integrals and apply them to the solution of the Riemann boundary value problem.

REFERENCES

1. *Gakhov F. D.* Boundary value problems. Nauka. 1977.
2. *Hadamard J. S.* Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. Yale University Press. 2003.

S. A. Khoury (Sharjah, UAE)
skhoury@aus.edu

SOLUTION OF A CLASS OF FLOW PROBLEMS: BIHARMONIC VERSUS POLYHARMONIC EQUATIONS

A semi-analytical approach is presented and described for the solution of a class of partial differential equations that model creeping viscous incompressible flow through cavities that arise in fluid dynamics. Such flows are modeled by the biharmomic equation. The strategy leads to the development of biorthogonality conditions and an algorithm for the computation of the coefficients in the eigenfunction expansion. Properties of solutions of the biharmonic equation as well as the more general polyharmonic equation are explored. Numerical experiments will be given in order to test and confirm the validity and applicability of the proposed strategy.

I. V. Kravchenko (Lisbon, Portugal)
ivkoh@iscte-iul.pt

GENERALIZED EXPONENTIAL BASIS FOR SOLVING FREE BOUNDARY PROBLEMS FOR TIME-HOMOGENEOUS DIFFUSIONS: NUMERICAL APPLICATION - RUSSIAN OPTION PRICING

The talk is based on a joint paper [1]. We develop a method for solving free boundary problems for time-homogeneous diffusions. We combine the complete exponential system of solutions

$$e_n^{\pm}(x,t) = \exp(\pm i\omega_n x - \omega_n^2 t), \tag{1}$$

for the heat equation $h_{xx} = h_t$, transmutation operators and recently discovered in [2] Neumann series of Bessel functions representation for solutions of Sturm-Liouville equations to construct a complete system of solutions (CCS) for the considered partial differential equations.

We propose the construction of the CSS generalizing exponential solutions (1) for the equation

$$\mathbf{C}u(y,t) := \frac{1}{w(y)}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(p(y)\frac{\partial}{\partial y}\right) - q(y)\right)u(y,t) = u_t(y,t) \tag{2}$$

using the transmutation operator $\mathbf{T}$ that satisfies.

$$\mathbf{C}\mathbf{T}h = \mathbf{T}\partial_{xx}h,$$

for any $h \in C^2[-b, b]$ such that $\mathbf{T}[1] = f(y)$. We define the transmuted basis functions as follows

$$E_n^{\pm}(y,t) = \mathbf{T}[e_n^{\pm}(x,t)] = e^{\omega_n^2 t}\mathbf{T}[e^{\pm i\omega_n x}].$$

This makes possible to extend the numerical methods (minimization problems) for free boundary problems for the heat equation to the time homogeneous parabolic equations, in particular, to the Russian option with finite horizon valuation problem.

R E F E R E N C E S

1. *Kravchenko I. V., Kravchenko V. V., Torba S. M., and Dias J. C.* Generalized exponential basis for efficient solving of homogeneous diffusion free boundary problems: Russian option pricing. arXiv:1808.08290.

2. *Kravchenko V. V. and Torba S. M.* A Neumann series of Bessel functions representation for solutions of Sturm–Liouville equations. Calcolo. 2018. Vol. 55, No. 1, pp. 1–11.

V. V. Kravchenko (Regional mathematical center of Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia)
vkravchenko@math.cinvestav.edu.mx

THE TRANSFORMATION OPERATOR METHOD FOR SOLVING FORWARD AND INVERSE STURM-LIOUVILLE PROBLEMS

The transformation operators are one of the main theoretical tools of the spectral theory [6-8]. In the talk a new approach is presented for solving the classical forward and inverse Sturm-Liouville problems on finite and infinite intervals. It is based on the Gel'fand-Levitan-Marchenko integral equations and recent results on the functional series representations for the transmutation (transformation) operator kernels [1-5]. New representations of solutions to the Sturm-Liouville equation are obtained admitting the following feature important for practical applications. Partial sums of the series admit estimates independent of the real part of the square root of the spectral parameter which makes them especially convenient for approximate solution of spectral problems. Numerical methods based on the proposed approach for solving forward problems allow one to compute large sets of eigendata with a nondeteriorating accuracy. Solution of the inverse problems reduces directly to a system of linear algebraic equations. In the talk some numerical illustrations will be presented.

R E F E R E N C E S

1. *Kravchenko V. V., Navarro L. J., Torba S. M.* Representation of solutions to the one-dimensional Schrödinger equation in terms of Neumann series of Bessel functions. Applied Mathematics and Computation, v. 314 (2017) 173-192.

2. *Kravchenko V. V.* Construction of a transmutation for the one-dimensional Schrödinger operator and a representation for solutions. *Applied Mathematics and Computation*, v. 328 (2018) 75-81.

3. *Kravchenko V. V.* On a method for solving the inverse scattering problem on the line. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 42 (2019) 1321-1327.

4. *Kravchenko V. V.* On a method for solving the inverse Sturm-Liouville problem. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, published online https://doi.org/10.1515/jiip-2018-0045.

5. *Delgado B. B., Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V.* Fourier-Laguerre series expansion of Levin's transmutation kernel and an efficient method for solving the spectral problem on the half line. Submitted.

6. *Levitan B. M.* Inverse Sturm-Liouville problems, VSP, Zeist, 1987.

7. *Marchenko V. A.* Sturm-Liouville Operators and Applications.Birkhäuser, Basel, 1986.

8. *Yurko V. A.* Introduction to the theory of inverse spectral problems. Moscow, Fizmatlit, 2007, 384pp. (Russian).

H. R. Malonek (Aveiro, Portugal)
hrmalon@ua.pt

SPECIAL FUNCTIONS VIA CO-DIMENSION ONE FUNCTION THEORY

Abstract harmonic analysis as analysis on topological groups is one of the most modern branches of harmonic analysis, developed in the mid-20th century. At the same time the seminal paper of E. M. Stein and G. Weiss [1] was an important step towards the application of group representation theory to systems of pde's. They proved *"the correspondence of irreducible representations of several rotation groups to first order constant coefficient pde's generalizing the Cauchy-Riemann equations."* Thereby they showed how certain properties of complex one-dimensional function theory extend to solutions of those systems, particularly the fact of being harmonic solutions. In their list of systems one can find a *generalized Riesz system*, the *Moisil-Theodoresco system*, *spinor systems* as n-dimensional generalization of *Diracs equations*, *Hodge - de Rham equations*. But their aim were merely of qualitative nature and connected with properties of harmonic functions in several real variables. Some years later, in the 1970s, the use of non-commutative Clifford algebras for dealing with those systems started to grow, cf. [2], whereas Special Functions treated by means of algebraic methods (e.g. Lie algebras, Lie groups, symmetric spaces) gained renewed importance, cf. [3].
In our talk we show that certain combinations of Special Functions similar to Hankel or Macdonald's functions in the complex case are solutions of differential equations with respect to an areolar hypercomplex derivative. This is a more recently developed tool in Clifford Analysis and originates a function theory in co-dimension 1. Thereby it stresses the function theoretic origins of Clifford Analysis and at the same time leads to the consideration of functions of several hypercomplex variables. As application we introduce generalized exponential functions as generating functions of different types of multivariate polynomials and lay the basis for an differential operator approach in co-dimension one function theory.

R E F E R E N C E S

1. *Stein, E. M., Weiss, G.* Generalization of the Cauchy-Riemann Equations and Representations of the Rotation Group. American Journal of Mathema–tics. 1968. Vol. 90, No.1, pp. 163–196

2. *Brackx, F., Delanghe, R., and F. Sommen* Clifford Analysis, Pitman, 1982.

3. *Vilenkin, N.Ja., Klimyk, A.U.* Representation of Lie Groups and Special Functions, Recent Advances, Springer Netherlands. 1995

M. G. Mazhgikhova (Nalchik, Russia)
mazhgihova.madina@yandex.ru

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR DELAY DIFFERENTIAL EQUATION OF FRACTIONAL ORDER

Consider the equation

$$\partial_{0t}^{\alpha}u(t) - \lambda u(t) - \mu H(t-\tau)u(t-\tau) = f(t), \quad 0 < t < 1 \tag{1}$$

where ∂_{0t}^{α} is the Caputo fractional derivative [1, c. 11], $1 < \alpha \leq 2$, $H(t)$ is the Heaviside function, λ, μ are the arbitrary constants, τ is fixed positive number.

A function $u(t)$ is called *regular solution* of (1) if $u(t)$ has absolutely continuous first order derivative and satisfies (1) for all $0 < t < 1$.

The problem here is to construct a regular solution to equation (1) satisfying the conditions

$$u(0) = u_0, \quad u(1) - au(t_1) = u_1, 0 < t_1 < 1. \tag{2}$$

Theorem. *Assume the function* $f(t) \in C(0;1)$ *has the form* $f(t) = D_{0t}^{\alpha-1}g(t)$, $g(t) \in L(0,1)$ *and the condition* $W_2(1) - aW_2(t_1) \neq 0$ *is satisfied. Then*

1) the function

$$u(t) = u_0 D_{1\xi}^{\alpha-1}G(t,\xi)|_{\xi=0} - u_1 D_{1\xi}^{\alpha-1}G(t,\xi)|_{\xi=1} + \int\limits_0^1 f(\xi)G(t,\xi)d\xi,$$

is a regular solution of the problem (1), (2), where

$$G(t,\xi) = H(t-\xi)W_\alpha(t-\xi) + \frac{W_2(t)}{W_2(1) - aW_2(t_1)}[aH(t_1-\xi)W_\alpha(t_1-\xi) - W_\alpha(1-\xi)],$$

$$W_\nu(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m (t-m\tau)_+^{\alpha m+\nu-1} E_{\alpha,\alpha m+\nu}^{m+1}(\lambda(t-m\tau)_+^{\alpha}),$$

$E_{\alpha,\beta}^{\rho}(z)$ *is the generalized Mittag-Leffer function [2],* $(\rho)_k$ *is the Pochhammer symbol,* $\Gamma(z)$ *is the Gamma function;*

2) the solution to problem (1), (2) is unique if and only if condition $W_2(1) - aW_2(t_1) \neq 0$ *is satisfied.*

REFERENCES

1. *Nakhushev A. M.* Fractional calculus and its application. Moscow: Fizmatlit. 2003. (in russian)
2. *Prabhakar T. R.* A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel. Yokohama Math. J. 1971. Vol. 19, pp. 7–15.

A. B. Morgulis (Rostov-na-Donu-Vladikavkaz, Russia)
morgulisandrey@gmail.com

RESOLVENT FOR AN OPERATOR RELATED TO THE INVISCID FLUID DYNAMICS

Let $n = 2, 3$, $D \subset \mathbb{R}^n$ – smooth domain and $S = \partial D$. Vector filed $\mathbf{V}$ is said to be *harmonic in* D iff $\operatorname{curl}\mathbf{V} = 0$ and $\operatorname{div}\mathbf{V} = 0$ in D. Note that $\mathbf{V} \nparallel S$ unless V belongs to a vector space which dimension is finite and equal to 1-dimensional Betty number of D.

Every harmonic field satisfies stationary Euler equation of inviscid incompressible fluid and, therefore, represents the velocity field for some steady fluid flow confined within domain D. The small perturbations of such flows are solutions to equations

$$\mathbf{u}_t + (\operatorname{curl}\mathbf{u}) \times \mathbf{V} = -\nabla h; \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \text{ in } D. \tag{1}$$

System (1) is of mixed type with only one family of characteristics driven by field $\mathbf{V}$. We'll be talking about a non-characteristic mixed problem for Eq.(1). Assume there is a partition $S = S^+ \cup S^-$, $S^+ \cap S^- = \varnothing$, $\mp \inf\{V_n(x),\ x \in S^\pm\} > 0$, where $V_n = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$, and $\mathbf{n}$ stands for the unit of outward normal on S. Such partitions are quite natural for the boundaries of ring-like domains such as the planar rings or strips, or the gaps between the cylinders, spheres, tori, *etc.* Thus, the characteristics enter the domain through S^+. That is why we have to impose an additi-onal boundary condition there. We set boundary conditions as follows

$$\mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{S^+} = 0, \ \ \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0|_S\,. \tag{2}$$

Such the choice of bc matches well-known Kazhikhov's setting of the initial-boundary value problem for the Euler equations with throughflow.

Our communication sheds some light on the spectral properties of problem (1-2) which have been investigated not so deeply as the similar problems in the characteristic case when $V_n = 0$ on S. The results turn out to be rather peculiar and quite different from the characteristic case. For instance, let $\tilde{\mathrm{L}}_2(S^+)$ stand for the space of square-summable functions on S^+ vanishing on average; let $\mathcal{B}^+$ denote the space of bounded linear operators in $\tilde{\mathrm{L}}_2(S^+)$.

Theorem 1. *Let D be a ring-like domain, and let $\mathbf{V}$ be a harmonic field with no fixed points in $\bar{D}$. There exists entire function $\mathrm{K}_+ : \lambda \mapsto \mathrm{K}_+(\lambda) \in \mathcal{B}^+$, such that the set of poles of the resolvent of problem (1-2) coincides with $\{\lambda :\ \ker \mathrm{K}_+(\lambda) \neq \{0\}\}$. Moreover, one can write down K_+ explicitly modulo the recovering of a divergence-free field from its curl.*

L. A. Nhat, L. T. Hieu (Tuyen Quang, Vietnam)
leanhnhat@tuyenquang.edu.vn

CHEBYSHEV PSEUDOSPECTRAL METHODS SOLVE THE STURM-LIOUVILLE DIFFERENTIAL EQUATIONS

Calculation eigenvalues of the eigenvalue problems for the Sturm-Liouville differential equations were very necessary for physics problems.

It is assumed that the Sturm-Liouville differential equations with the homogeneous Dirichlet boundary condition as follows:

$$-\left(p(x)y'(x)\right)' + q(x)y(x) = \lambda\omega(x)y(x), \quad \forall x \in [a,b], y(a) = y(b) = 0,$$

where the functions $p(x)$, $q(x)$ and the boundary values a and b are given.

We present the pseudospectral method basing on the Chebyshev polynomial of the first kind (Chebyshev pseudospectral method) which use the Chebyshev-Gauss-Lobatto points to determine the eigenvalues of the Sturm-Liouville problems.

We applied the well-known equations in the Sturm-Liouville form as the Euler-Cauchy equation:

$$\left(x^3 y'(x)\right)' + x\lambda y(x) = 0, \quad y(1) = y(2) = 0,$$

and the Airy equation:

$$-y''(x) + xy(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = y(1) = 0.$$

The Chebyshev pseudospectral method determines eigenvalues approximate gradually to the exact eigenvalues of the problems.

E. Yu. Panov (Veliky Novgorod, Russia)
Eugeny.Panov@novsu.ru

ON DECAY OF ENTROPY SOLUTIONS TO MULTIDIMENSIONAL SCALAR CONSERVATION LAWS

In the half-space $\Pi = (0,+\infty)\times\mathbb{R}^n$ we consider the Cauchy problem for a first order conservation law

$$u_t + \mathrm{div}_x\varphi(u) = 0, \quad (t,x) \in \Pi, \tag{1}$$

with the initial condition

$$u(0,x) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{2}$$

We assume that the flux vector $\varphi(u) = (\varphi_1(u),\ldots,\varphi_n(u))$ is merely continuous, $\varphi(u) \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. We also suppose that for each $\lambda > 0$ the set

$$\{\ x \in \mathbb{R}^n :\ |u_0(x)| > \lambda\ \}$$

has finite Lebesgue measure.

Let $u = u(t, x)$ be an entropy solution of (1), (2) in Kruzhkov sense [1] (in the case of merely continuous flux vector it may be nonunique). We are interesting in the long time behavior of $u(t, x)$. The main our result is the following decay property.

Theorem 1. *Assume that for some $\delta > 0$ the flux vector $\varphi(u)$ is not affine on any interval (a, b) such that $-\delta < a < b < \delta$ (genuine nonlinearity). Then*

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to+\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{|x-y|<1} |u(t,x)|dx = 0.$$

For the proof of Theorem 1 we essentially use recent results [2] on decay of space-periodic entropy solutions.

The research was carried out under support of the Russian Foundation for Basic Research (grant no. 18-01-00258-a) and the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 1.445.2016/1.4).

REFERENCES

1. *Kruzhkov S. N.* First order quasilinear equations in several independent variables. Mat. Sb. (N.S.). 1970. Vol. 81, No. 2, pp. 228–255.

2. *Panov E. Yu.* On a condition of strong precompactness and the decay of periodic entropy solutions to scalar conservation laws. Netw. Heterog. Media. 2016. Vol. 11, No. 2, pp. 349–367.

B. A. Plamenevskii (Saint-Petersburg, Russia)
b.plamenevskii@spbu.ru

ON RADIATION AND SCATTERING IN ELECTROMAGNETIC WAVEGUIDES

A waveguide occupies a 3D domain G with several cylindrical outlets to infinity. In G the Maxwell system is considered. The dielectric permit-tivity and magnetic permeability are arbitrary positive definite 3×3 matrix valued functions that satisfy some stabilization conditions at infinity. We describe continuous spectrum eigenfunctions, formulate a well-posed statement of the problem with intrinsic radiation conditions at infinity, introduce a scattering matrix and propose a method for approximate computation of the scattering matrix.

The talk is based on the papers 1 and 2.

REFERENCES

1. *Plamenevskii B. A., Poretskii A. S.* The Maxwell system in waveguides with several cylindrical outlets to infinity and nonhomogeneous anisotropic filling. St. Petersburg Mathematical Journal. 2018. Vol. 29, No. 2, pp. 289–314.

2. *Plamenevskii, B. A., Poretskii, A. S., and Sarafanov, O. V.* On a Method of Approximate Computing of Scattering Matrices for Electromagnetic Wave-guides. Dokl. Phys. 2018. Vol. 63, p. 414.

M. V. Plekhanova, G. D. Baybulatova (Chelyabinsk, Russia)
mariner79@mail.ru, baybulatova_g_d@mail.ru

SOLVABILITY OF SEMILINEAR EQUATIONS WITH LOWER FRACTIONAL DERIVATIVES

Let $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ be Banach spaces, $L\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ (linear and continuous operator from $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$), $M\in\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ (linear closed operator with dense domain D_M in the space $\mathcal{X}$ and with image in $\mathcal{Y}$), $n\in\mathbb{N}$, $X\subset\mathbb{R}\times\mathcal{X}^n$, $N:X\to\mathcal{Y}$ is nonlinear operator. Consider the generalized Showalter — Sidorov problem

$$D_t^{\alpha}Lx(t)=Mx(t)+N(t,D_t^{\alpha_1}x(t),D_t^{\alpha_2}x(t),\dots D_t^{\alpha_n}x(t)),\tag{1}$$

$$(Px)^{(k)}(t_0)=x_k,\quad k=0,\dots,m-1\tag{2}$$

where $D_t^{\alpha},D_t^{\alpha_1},D_t^{\alpha_2},\dots,D_t^{\alpha_n}$ are the fractional Caputo derivatives, $m-1\le\alpha\le m\in\mathbb{N}$, $0\le\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n\le m-1$. The equation is supposed to be degenerate, i.e. $\ker L\ne\{0\}$. he projection P on the complement $\mathcal{X}^1$ of the degeneracy subspace will be defined further. Put $\mathcal{X}^0=\ker P$, $\mathcal{Y}^0=\ker Q$; $\mathcal{X}^1=\mathrm{im}P$, $\mathcal{Y}^1=\mathrm{im}Q$. Denote by L_k (M_k) the restriction of the operator L (M) on $\mathcal{X}^k$ ($D_{M_k}=D_M\cap\mathcal{X}^k$), $k=0,1$.

Denote $\tilde{x}=x_0+\frac{x_1}{1!}(t-t_0)+\frac{x_2}{2!}(t-t_0)^2+\dots+\frac{x_{m-1}}{(m-1)!}(t-t_0)^{m-1}$, for x_k, $k=0,1,\dots,m-1$, from conditions (2), $V=X\cap(\mathbb{R}\times(\mathcal{X}^1)^n)$. Now the condition $\mathrm{im}N\subset\mathcal{Y}^1$ will be substantially used.

Theorem 1. *Let $p\in\mathbb{N}_0$, an operator M be (L,p)-bounded, X be open set in the space $\mathbb{R}\times\mathcal{X}^n$, V be open in the space $\mathbb{R}\times(\mathcal{X}^1)^n$, the mapping $N\in C(X;\mathcal{Y})$ be locally Lipshitz continuous in x, $\mathrm{im}N\subset\mathcal{Y}^1$, $f\in C([t_0,T];\mathcal{Y})$ for some $T>t_0$, $(D_t^{\alpha}G)^kM_0^{-1}(I-Q)f\in C([t_0,T];\mathcal{X})$, $x_k\in\mathcal{X}^1$, $k=0,1,\dots,m-1$,*

$$(t_0,D_t^{\alpha_1}|_{t=t_0}\tilde{x},D_t^{\alpha_2}|_{t=t_0}\tilde{x},\dots,D_t^{\alpha_n}|_{t=t_0}\tilde{x})\in X,$$

$$(t_0,D_t^{\alpha_1}|_{t=t_0}(\tilde{x}+w),D_t^{\alpha_2}|_{t=t_0}(\tilde{x}+w),\dots,D_t^{\alpha_n}|_{t=t_0}(\tilde{x}+w))\in X,$$

where $w(t)=-\sum\limits_{k=0}^{p}(D_t^{\alpha}G)^kM_0^{-1}(I-Q)f(t)$. Then there exists $t_1\in(t_0,T]$, such that problem (1), (2) has a unique solution on the segment $[t_0,t_1]$.

A. S. Poretskii (Saint-Petersburg, Russia)
st036768@student.spbu.ru

ON ACCUMULATIONS OF POINT SPECTRUM OF WAVEGUIDES

A waveguide occupies a domain with several cylindrical outlets to infinity and is described by an elliptic boundary-value problem. At infini-ty in every cylindrical outlet, the coefficients of the problem tend to functions independent of the axial coordinate in the corresponding cylin-der. We prove that the eigenvalues can accumulate, if anywhere, only at the continuous spectrum "thresholds". If the coefficients stabilize at infinity with an exponential rate, then there are no accumulations of eigenvalues at finite distance. In the case of slow coefficients stabilization, accumulations at thresholds can occur. For the Maxwell system, similar results can be deduced from those for the elliptic problems.

The talk is based on joint results with B.A. Plamenevskii.

S. V. Revina (Rostov-on-Don, Russia)
svrevina@sfedu.ru

PROBLEM OF STABILITY OF TWO-DIMENSIONAL VISCOUS FLOWS

We consider the two-dimensional ($\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$) viscous incompressible flow driven by an external forces field $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$ that is periodic in x_1 and x_2 with periods ℓ_1 and ℓ_2, respectively. The flow is described by the Navier-Stokes equations

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}, \nabla)\boldsymbol{v} - \nu\Delta\boldsymbol{v} = -\nabla p + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t), \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0,$$

where $\nu = 1/Re$ is the kinematic viscosity and Re is the Reynolds number. The period $\ell_1 = 2\pi$, and the ratio of the periods is characterized by the wave number α: $\ell_2 = 2\pi/\alpha$, $\alpha \to 0$. Let $\langle f \rangle$ denote the average with respect to x_1, while $\langle\langle f \rangle\rangle$ denote the average over the period rectangle $\Omega = [0, \ell_1] \times [0, \ell_2]$:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\ell_1} \int\limits_0^{\ell_1} f(\boldsymbol{x}, t)\, dx_1, \quad \langle\langle f \rangle\rangle(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_\Omega f(\boldsymbol{x}, t)\, dx_1\, dx_2.$$

The spatial average velocity is assumed to be given: $\langle\langle \boldsymbol{v} \rangle\rangle = \boldsymbol{q}$. The velocity field is assumed to be periodic in x_1, x_2 with the same periods ℓ_1, ℓ_2 as the field of external forces.

A longwave asymptotics ($\alpha \to 0$) is constructed for the stability problem of the steady flow close to the shear, which will be called the basic flow:

$$\boldsymbol{V} = (\alpha V_1(x_2), V_2(x_1)), \quad \langle V_2 \rangle \neq 0.$$

The class of flows under consideration generalizes the Kolmogorov flow with a sinusoidal velocity profile

$$\boldsymbol{V} = (0, \gamma \sin(x_1)).$$

REFERENCES

1. *Revina S. V.* Stability of the Kolmogorov Flow and Its Modifications. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2017. Vol. 57, No. 6, pp. 1003–1022.

2. *Melekhov A. P. Revina S. V.* Onset of Self-Oscillations upon the Loss of Stability of Spatially Periodic Two-Dimensional Viscous Fluid Flows Related to Long-Wave Perturbations. Fluid Dynamics. 2008. Vol. 43, No. 2, pp. 203–216.

A. Sayfy (American University of Sharjah, UAE)
sayfy@aus.edu

A NOVEL SEMI-ANALYTICAL ITERATIVE APPROACH TO SOLVE BOUNDARY VALUE PROBLEMS

The aim of this talk is to introduce a recent semi-analytical iterative strategy based on Green's functions and fixed point iteration schemes for the approximate solutions of various types of boundary value problems. In particular, it is suitable for the ones that possess singularities or layers, and delay differential equations. The scheme is illustrated through a number of examples that confirm the high accuracy and efficiency of the strategy. The results of the test examples show uniformly distributed errors and excellent agreement with exact solutions and outperforms other existing numerical iterative schemes.

V. I. Semenov (Kaliningrad, Russia)
visemenov@rambler.ru

INVARIANTS APPLICATION TO THE NAVIER–STOKES EQUATIONS

For the studying of the Cauchy problem of these equations in space I introduce some classes and parameters which are invariant with respect to the scaling procedure. The first invariant is connected with the Cauchy problem provided an initial data belongs to a special class $C^{\infty}_{6/5,\,3/2}$ of solenoidal vector fields vanishing at infinity . Here outer forces are trivial. Then the class $C^{\infty}_{6/5,\,3/2}$ is invariant.

The second invariant is a special parameter λ which is connected with a velocity changing of E^2 where E is a kinetic energy of a fluid flow. If $\lambda \geq 1$ or kinetic energy at a special moment is not less any mean depending on λ for $\lambda < 1$ (i.e. changing of E^2 at moment $t = 0$ is negligible) then an ideal, global and smooth motion is determined. In other words a global regular solution exists. This is an essential and qualitative improvement of the classical result together with a new a priori estimate.

Finally, the other parameters $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$, and $\mu, 1 < \mu < \lambda^{-4}$, or $\mu = \infty$ may be also very useful . The first of them is a dissipation coefficient of kinetic energy . The last parameter holds time interval of a solution regularity. These three numerical characteristics $\lambda, \varepsilon, \mu$ are invariant with respect to the scaling procedure.

As illustration, we have no phenomena blow up on the time interval $[0, T)$ if kinetic energy satisfies inequality:

$$\|u(t,\cdot)\|_2^2 \geq \|\varphi\|_2^2 \Big(1 - \lambda^2 \sqrt{\frac{t}{T_0}}\Big)$$

with condition $\lambda < 1$ (by symbol $\|u(t,\cdot)\|_2$ it is denoted a norm in L_2, $[0,T_0)$ – is an universal time interval of an existence of the global regular solution, φ is an initial data).

E. L. Shishkina (Voronezh, Russia)
ilina_dico@mail.ru

MEIJER TRANSFORM OF THE FRACTIONAL BESSEL INTEGRAL AND DERIVATIVE ON SEMI-AXES

Let f is integrable by $(0,\infty)$ with the weight $\rho(x) = x^{4\alpha+\nu}$, $\alpha > 0$ $\nu > 0$. The integral

$$(B^{-\alpha}_{\nu,0+}f)(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \int\limits_0^x \left(\frac{y}{x}\right)^{\nu} \left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2\alpha-1} {}_2F_1\left(\alpha+\frac{\nu-1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1-\frac{y^2}{x^2}\right) f(y)dy$$

is called **left-sided fractional Bessel integral** on semi-axis $[0,\infty)$ of order α (see [1]). The **left-sided fractional Bessel derivative** on semi-axis $[0,\infty)$ of order α is

$$(B^{\alpha}_{\gamma,0+}f)(x) = (DB^{\alpha}_{\gamma,0+}f)(x) = B^n_{\gamma}(IB^{n-\alpha}_{\gamma,0+}f)(x), \qquad n = [\alpha]+1.$$

The $B^{\alpha}_{\gamma,0+}$ is the power α of the Bessel operator $B_\nu = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\nu}{x}\frac{d}{dx}$.

For functions f the integral transforms involving modified Bessel functions of the second kind $K_{\frac{\nu-1}{2}}$, $\nu \geq 1$ as kernel is the Meijer transform defined by

$$\mathcal{K}_\nu[f](\xi) = F(\xi) = \int\limits_0^\infty k_{\frac{\nu-1}{2}}(x\xi)\, f(x)x^\nu\, dx,$$

where $k_\alpha(t) = \frac{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{t^\alpha}K_\alpha(t)$.

Let $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}_+)$ and $f(t) = o\left(t^{\beta-\frac{\nu}{2}}\right)$ as $t \to +0$ where $\beta > \frac{\nu}{2} - 2$ if $\nu > 1$ and $\beta > -1$ if $\nu = 1$. Furthermore let $f(t) = 0(e^{at})$ as $t \to +\infty$. Then its Meijer exists a.e. for $\operatorname{Re}\xi > a$ (see [2], p. 94).

The Meijer transforms of $B^{\alpha}_{\nu,0+}$ for proper functions is

$$\mathcal{K}_\nu[(B^{\alpha}_{\nu,0+}\varphi)(x)](\xi) = \xi^{2\alpha}\mathcal{K}_\nu\varphi(\xi), \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

REFERENCES

1. *Shishkina E. L. and Sitnik S. M.* On fractional powers of Bessel operators. Journal of Inequalities and Special Functions. 2017. Vol. 8, No. 1, pp. 49–67.
2. *Glaeske H. J., Prudnikov A. P. and Skornik K. A.* Operational calculus and related topics. Chapman and Hall/CRC. 2006.

A. G. Tumanyan (Yerevan, Armenia)
ani.tumanyan92@gmail.com

ON THE FREDHOLM PROPERTY OF REGULAR HYPOELLIPTIC OPERATORS

We study the Fredholm property of regular hypoelliptic operators in weighted multi-anisotropic Sobolev spaces in $\mathbb{R}^n$. This work extends the previously obtained results for the Fredholm property of semielliptic operators, which are the special subclass of hypoelliptic operators (see [1,2]).

Let $\mathcal{R}$ be a completely regular polyhedron. Then denote by $\mathcal{R}_j^{n-1}$ $(j=1,\ldots,I_{n-1})$ $(n-1)$–dimensional non-coordinate faces of $\mathcal{R}$ with corresponding outer normal μ^j such that all multiindices $\alpha \in \mathcal{R}_j^{n-1}$ satisfy $(\alpha:\mu^j)=\frac{\alpha_1}{\mu_1^j}+\ldots+\frac{\alpha_n}{\mu_n^j}=1$. For $k\in\mathbb{R}_+$ denote $k\mathcal{R}=\{k\alpha=(k\alpha_1,k\alpha_2\ldots,k\alpha_n):\alpha\in\mathcal{R}\}$.

We consider the differential form

$$P\left(x,\mathbb{D}\right)=\sum_{\alpha\in\mathcal{R}}a_\alpha(x)D^\alpha,$$

where $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n},\ D_j=i^{-1}\frac{\partial}{\partial x_j}, x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n, a_\alpha(x)$ are smooth enough functions.

For $k\in\mathbb{Z}_+$, completely regular polyhedron $\mathcal{R}$ and positive-valued function $q\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, such that $\frac{1}{q(x)}\rightrightarrows 0$ when $|x|\to\infty$, denote by $H_q^{k,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n)$ the space of measurable functions $\{u\}$ equipped with a norm

$$\|u\|_{k,\mathcal{R},q}:=\sum_{\alpha\in k\mathcal{R}}\left\|D^\alpha u\cdot q^{k-\max\limits_{j=1,\ldots,I_{n-1}}\left(\alpha:\mu^j\right)}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

In the terms of the conditions on the symbol of operator the necessary conditions are obtained for fulfillment of a priori estimates of differential operators defined by $P(x,\mathbb{D})$. The necessary and sufficient conditions are obtained for the Fredholm property of the special classes of regular hypoelliptic operators with variable coefficients, acting in multianisotropic spaces $H_q^{k,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n)$.

REFERENCES

1. *Darbinyan A. A., Tumanyan A. G.* On A Priori Estimates and Fredholm Property of Differential Operators in Anisotropic Spaces. Journal of Contemporary Mathematical Analysis. Vol. 53, No. 2 (2018), pp. 61–70.

2. *Tumanyan A. G.* On the Invariance of Index of Semielliptical Operator on the Scale of Anisotropic Spaces. Journal of Contemporary Mathematical Analysis. Vol. 51, No. 4 (2016), pp. 167–178.

V. A. Vicente Benítez (Querétaro, México)
vavicente@math.cinvestav.mx

ANALYTICAL REPRESENTATIONS FOR THE DISPERSION EQUATION OF A PERIODIC QUANTUM GRAPH

We study the spectral relations of a periodic quantum graph $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, with a countable number of vertices and connected. We consider the case of a graph equipped with a Hamiltonian given by the Schrödinger operator $\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$, with a symmetric real-valued potential $q \in L^\infty(\Gamma)$, and whose domain consist of all functions $u \in H^2(\Gamma)$ satisfying the *Neumann-Kirchoff* conditions in each vertex. It is known that the spectrum is purely essential, and for the case of an equilateral graph these can be calculated by a dispersion equation of the form $\eta(\lambda) = f(\theta)$, were η is an entire function of the spectral parameter and f is a continuous function in the Brillouin zone $\mathbb{B}$ of the graph (see 1). Based in the results presented in 2, we develop a representation for the function η given as a Neumann series of Bessel functions. These representations provide a way to calculate the spectral bands of the Hamltonian $\mathcal{H}$ and, in the case of graph with cycles, we obtain a characteristic equation for the eigenvalues and show that these have infinite multiplicity.

REFERENCES

1. *Barrera-Figueroa V., Rabinovich V. S.* Effective numerical method of spectral analysis of quanthum graphs. J. Phys. A: Math. Theor. 2017. Vol. 50, No. 21, pp. 207–215.
2. *Kravchenko V. V., Navarro L. J., Torba S. M.* Representation of solutions to the one-dimensional Schrödinger equation in terms of Neumann series of Bessel functions. Appl. Math. Comput. 2017. Vol. 314, pp. 173–192.

K. S. Yeletskikh (Yelets, Russia)
kostan.yeletsky@gmail.com

ON BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE EULER—POISSON—DARBOUX EQUATIONS

In the domain $\Omega = \{0 < x < 1, t \in (0,T)\}$, there is a unique solution $u(x,t)$ of the following boundary value problem

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\beta}{t}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\beta}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) = 0,\ \beta \neq 0,\ \gamma > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ u_t(x,0) = 0, \quad u'(0,t) = u'(1,t) = 0.$$

Let $j_\nu(x) = 2^\nu\,\Gamma(1+\nu)\,\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}$, where J_ν is Bessel function of the first kind, $\nu = \frac{\gamma-1}{2}$. The B-cylindrical function

$$\mathbb{J}^*_\mu(t) = t^\mu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\mu+m+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+\mu} = t^\mu\ J_\mu(t)\,.$$

is used in the paper.

The spectral values of λ_n are solutions of the equation $j'(\lambda_n)$=0. A bounded solution to the considered boundary value problem is found in the form of a Fourier — Bessel series [1]

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)X_n(x),\quad X_n(x)=\frac{j_\nu(\lambda_n x)}{|j_\nu(\lambda_n)|}\,,$$
$$u_n(t)=\varphi_n\,\left\{\begin{array}{c}\mathbb{J}^*_{\frac{1-\beta}{2}}(\lambda_n t)\\ j_{\frac{\beta-1}{2}}(\lambda_n t)\end{array}\right\},\ \left\{\begin{array}{c}\beta<0\\ \beta>0\end{array}\right\},\varphi_n=\int\limits_0^1\varphi(x)\ X_n(x)\,x^\gamma dx\,.$$

The indicated solutions can be written with the corresponding Poisson formula. For example, if the Bessel operator acting on the t has a positive dimension parameter ($\beta>0$), then the corresponding Poisson formula for the solution has the form

$u(x,t)=\overset{\nu,\mu}{V_x^t}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n\ j_{\frac{\beta+\gamma-2}{2}}(\lambda_n x)$, where the $\overset{\nu,\mu}{V_x^t}$-shift:

$$\overset{\nu,\mu}{V_x^t}\,f(x)=\frac{2^{\nu+\mu}\,\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)}{\pi\ \Gamma(\nu+\mu)}\int\limits_{\pi/2}^{\pi/2}e^{i\theta(\mu-\nu)}\cos^{\nu+\mu}\theta\,f(r)\,d\theta\,,$$
$$r=\sqrt{2\cos\theta\,(x^2\,e^{i\theta}+t^2e^{-i\theta})}.$$

An unlimited solution is a fundamental solution of the EPD operator and is expressed in terms of the Neumann j -function, see [2].

REFERENCES

1. *Ляхов Л. Н., Елецких К. С., Санина Е. Л.* Формулы Пуассона для краевых задач уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу. ПМА. 2019. Том. 97, стр. 83–91.

2. *Ляхов Л. Н.* Фундаментальные решения дифференциальных уравнений с D_B-оператором Бесселя. Труды математического института им. В. А. Стеклова. 2012. Том. 278, стр. 148–160.

Н. Х. Альхалиль, Х. Алмохаммад, (Москва, Россия)
Nisreen.homadeh@gmail.com

УСЛОВИЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ОБОБЩЁННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ БЕССЕЛЯ

Пространство потенциалов $H_E^G\equiv H_E^G(\mathbb{R}^n)$ *определяем как множество свёрток ядер потенциалов с функциями из базового пространства*

$$H_E^G(\mathbb{R}^n)=\{u=G*f:\ f\in E(\mathbb{R}^n)\}\,,$$
$$\|u\|_{H_E^G}=\inf\{\|f\|_E:\ f\in E(\mathbb{R}^n),\ G*f=u\}\,.$$

где E *— перестановочно инвариантное пространство, а ядро* G *— специальъного вида,*

$$G(x)=G_R^0(x)+G_R^1(x);\quad G_R^0(x)=G_(x)\chi_{B_R}(x);\quad G_R^1(x)=G_(x)\chi^c_{B_R}(x),$$
$$c_1\Phi(r)\leqslant=G(x)\leqslant c_2\Phi(r)\quad r=|x|\in(0,R),$$

где $0<\theta\downarrow$ на $\mathbb{R}_+$; $\int\limits_0^R\Phi(\rho)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho<\infty$, $G_R^1\in L_1(\mathbb{R}^n)\cap E'(\mathbb{R}^n)$; $E'(\mathbb{R}^n)$ — ассоциированное пространство для $E(\mathbb{R}^n)$.

Получена точная по порядку оценка для модуля непрерывности потенциала $\omega_c^k(u;t^{1/n})\cong\omega_0(t)$ (см. [1]), по функции ω_0 определена функция γ, задающая

γ-средние спектрального разложения $\sigma_\mu^\gamma(u,x)$ потенциала по фундаментальным функциям оператора Лапласа в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (см. [2]). Для этих γ-средних справедлив следующий принцип локализации.

Пусть $D \subset \Omega$ и $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset C(\mathbb{R}^n)$ — функция, удовлетворяющая условию $u(x) \equiv 0$ для всех x в D. Тогда, для каждого компакта $K \subset D$ равномерно по $x \in K$ справедливо соотношение:

$$\lim_{\mu\to\infty} \sigma_\mu^\gamma(u,x) = 0.$$

Авторы выражают благодарность Гольдману М.Л. за ценные советы при работе над статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Альхалиль Н.Х., Алмохаммад Х.* Дифференциальные свойства обобщённых потенциалов типа Бесселя и типа Рисса. Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». 2018. Том. 26, № 1. С. 3–12.

2. *Goldman M.L., Tsegaye G.Ayele.* Spaces with generalized smoothness in summability problems for Φ-means of spectral decompositions // Eurasian Mathematical Journal, — 2014. — V. 5, No. 1. — P. 61–81.

И. А. Андреева, Т. О. Ефимова (Санкт-Петербург, Россия)
irandr@inbox.ru

ЗАМЕТКИ О ПОВЕДЕНИИ ТРАЕКТОРИЙ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В КРУГЕ ПУАНКАРЕ

Излагаются результаты изучения семейства динамических систем [2-4] со взаимно простыми полиномиальными правыми частями, кубической и квадратичной. Ставится и решается задача построения в круге Пуанкаре всех топологически различных фазовых портретов. Для ее решения использован метод последовательных отображений А.Пуанкаре [1]. Рассматриваются подсемейства нескольких иерархических уровней, чьи разложения правых частей на формы нижайших степеней включают: по 3 и 2 различных множителя; по 2 множителя; 3 различных множителя у формы третьего порядка и 1 – у формы второго; 2 множителя у формы третьего порядка и 1 у формы второго. Методика исследования каждого подсемейства содержит ряд этапов [3]. Исследование подсемейства включает изучение особых точек в круге Пуанкаре (конечная особая точка $O(0,\, 0)$ и бесконечно удаленные особые точки). Определяются тoподинамические типы особых точек и их сепаратрисы. Изучаются вопросы однозначности продолжения каждой сепаратрисы из малой окрестности особой точки на всю длину и взаимного расположения сепаратрис в круге Пуанкаре. Строятся фазовые портреты систем подсемейства в графической и табличной формах. Приводятся близкие к коэффициентным критерии каждого портрета. Детальное изложение процесса изучения и результаты даны в монографии [2] и работах [2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. М.:Наука.1966. 586 с.

2. *Андреева И.А., Андреев А.Ф.* Фазовые портреты одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. – Lambert Academic Publishing: Germany, 2017. – 70 с.

3. *Andreev A.F., Andreeva I.A.* Investigation of a Family of Cubic Dynamic Systems. //Vibroengineering Procedia. – 2017. –Vol. 15. – pp. 88–93.

4. *Andreev A.F., Andreeva I.A., Detchenya L.V., Makovetskaya T.V., Sadovskii A.P.* Nilpotent Centers of Cubic Systems. //Differential Equations. – 2017. – Vol. 53 № 8. – pp. 975 - 980.

В. А. Батищев (Ростов-на-Дону, Россия)
batishev-v@mail.ru

БИФУРКАЦИИ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ВБЛИЗИ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ

Исследуется физический эффект возникновения вращения жидкости в тонком слое неоднородной жидкости в результате локального неравномерного охлаждения свободной поверхности. Расчет термогравитационных течений жидкости проводится с учетом эффекта Марангони. Результаты работы могут объяснить одну из причин возникновения торнадо.

Рассматривается стационарное осесимметричное течений жидкости в горизонтальном слое конечной толщины, ограниченном сверху свободной границей, а снизу твердой стенкой Течение жидкости вызвано неравномерным распределением температуры свободной поверхности. Расчеты проводятся на основе приближения Обербека-Буссинеска неоднородной теплопроводной жидкости. В случае малых диффузионных коэффициентов вблизи свободной границы формируется тонкий пограничный слой. Приводится система уравнений движения жидкости в этом слое.

Режимы течений жидкости делятся на два типа - незакрученные и вращательные (вторичные). Вращательные режимы возникают в результате бифуркации незакрученных режимов в области пограничного слоя вблизи свободной границы при ее локальном охлаждении. При нагреве границы бифуркации отсутствуют. В окрестности точки ветвления построена асимптотика вращательных режимов путем введения двух малых параметров. Асимптотические разложения построены по степеням одного из этих параметров. Получено асимптотическое соотношение, устанавливающее связь между малыми параметрами. Показано, что в точке бифуркации возникают два вторичных режима, отличающиеся между собой только направлением вращения. Ответвление вращательных режимов происходит при скоростях внешнего потока, меньших бифуркационных значений.

Н. П. Бондаренко (Самара и Саратов, Россия)
bondarenkonp@info.sgu.ru

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПУЧКА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим краевую задачу L для интегро-дифференциального уравнения первого порядка

$$iy'(x) + \int_0^x M(x-t,\lambda)y(t)\,dt = \lambda y(x), \quad 0 < x < \pi, \quad y(0) = y(\pi),$$

где ядро свертки имеет линейную зависимость от спектрального параметра: $M(x,\lambda) = M_0(x) + \lambda M_1(x)$. Функции M_0 и M_1 — вещественные, $M_1 \in AC[0,\pi)$, $(\pi - x)M_0 \in L_2(0,\pi)$, $(\pi - x)M_1' \in L_2(0,\pi)$, $M_1(0) = 0$.

Доказаны Теоремы 1 и 2, дающие характеризацию спектра задачи L.

Теорема 1. *Спектр задачи L является счетным множеством комплексных собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, пронумерованных с учетом кратностей и имеющих асимптотику*

$$\lambda_n = 2n + \varkappa_n, \quad \{\varkappa_n\} \in l_2. \tag{1}$$

Теорема 2. *Для любой последовательности комплексных чисел $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ вида (1) существует единственная краевая задача L описанного выше вида, для которой последовательность $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является спектром.*

В основе докательства Теоремы 2 лежит конструктивный метод решения *обратной задачи*: по заданному спектру $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ построить M_0 и M_1. Метод представляет собой развитие идей работ [1], [2]. Обратная задача сводится к однозначно разрешимой системе нелинейных интегральных уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (проект 17-11-01193).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Buterin S. A.* On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator. Results in Mathematics. 2007. Vol. 50, no. 3–4, pp. 73–181.

2. *Bondarenko N. P., Buterin S. A.* An inverse spectral problem for integro-differential Dirac operators with general convolution kernels. Applicable Analysis. 2018. Published online. URL: https://doi.org/10.1080/00036811.2018.1508653 (дата обращения: 17.01.2019).

А. В. Васильев (Ростов-на-Дону, Россия)
avvasiliev1995@gmail.com

СТАЦИОНАРНЫЕ ПРИДОННЫЕ ВИХРИ И ПРОТИВОТЕЧЕНИЕ В РУСЛОВЫХ ПОТОКАХ

На основе асимптотической модели численно исследована задача о стационарных придонных вихревых образованиях и стационарных противотоках в русловых потоках рек. Модель сконструирована на основе уравнений Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости в случае турбулентной вязкости и представляет собой вариант гидростатического приближения при отсутствии инерциальных членов. Исследованы различные варианты достаточно гладких рельефов дна водоема. Показано, что при значительных расходах жидкости в окрестностях отклонений рельефа дна от плоского во «впадинах» рельефа имеются придонные вихри, компенсирующие избыточный заданный расход жидкости. Рассмотрены случаи различных краевых условий на дне водоема — условия прилипания, кинематические условия, соответствующие деформируемой непроницаемой поверхности, и условия скольжения Навье. Показано, что в случае плоского рельефа дна водоема при избыточном расходе жидкости имеется противоточное течение в окрестности дна.

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части государственного задания № 1.5169.2017/БЧ Министерства образования и науки РФ, ЮФУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.* Математическое моделирование процесса седиментации примеси в потоке жидкости. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. 208 с.

Л. Х. Гадзова (Нальчик, Россия)
macaneeva@mail.ru

МЕТОД ФУНКЦИИ ГРИНА РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

В интервале $0 < x < 1$ рассмотрим уравнение

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j \partial_{0x}^{\alpha_j} u(x) + \lambda u(x) = f(x),$$

где $\alpha_j \in]1,2[,\ \beta_1 > 0,\ \lambda,\ \beta_j \in \mathbb{R},\ \alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_m,\ \partial_{0x}^{\gamma} u(x)$ – производная Капуто [1, с. 11]:

$$\partial_{0x}^{\gamma} u(x) = D_{0x}^{\gamma-n} u^{(n)}(x), \quad n-1 < \gamma \leq n,$$

$D_{0x}^{\gamma}-$ оператор дробного интегро-дифференцирования порядка γ в смысле Римана-Лиувилля [1, с. 9] по переменной x.

Данная работа посвящена решению двухточечных краевых задач для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределенного дифференцирования. Развит метод функции Грина для решения исследуемых задач, построены фундаментальные решения и соответствующие функции Грина [2-4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.

2. *Гадзова Л. Х.* Задача Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка. Владикавк. мат. журн. 2016. Том. 18, вып. 3, стр. 22–30.
3. *Гадзова Л. Х.* Задача Дирихле и Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами. Дифференциальные уравнения. 2015. Том. 51, № 12, стр. 1580–1586.
4. *Гадзова Л. Х.* Краевая задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования. Дифференциальные уравнения. 2018. Том. 54, № 2, стр. 180–186.

И. Б. Гарипов, Р. М. Мавлявиев (Казань, Россия)
ilnur_garipov@mail.ru, mavly72@mail.ru

СООТНОШЕНИЕ ТИПА ГАУССА № 10 ДЛЯ ФУНКЦИИ ГОРНА H_3

В теории обобщенного волнового уравнения и осисеммитрического уравнения Гельмгольца важную роль играет конфлюэтная функция Горна [1]

$$H_3\left(\alpha,\beta;\delta;z,t\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m-n}(\beta)_m}{(\delta)_m}\frac{z^m}{m!}\frac{t^n}{n!},$$

для которой в [1] приведены два Гауссовых соотношения:

$$H_3\left(\alpha,\beta;\delta;z,t\right)-H_3\left(\alpha,\beta;\delta-1;z,t\right)=\frac{\alpha\beta}{\delta(1-\delta)}zH_3\left(\alpha+1,\beta+1;\delta+1;z,t\right),$$

$$H_3\left(\alpha,\beta+1;\delta;z,t\right)-H_3\left(\alpha,\beta;\delta;z,t\right)=\frac{\alpha}{\delta}zH_3\left(\alpha+1,\beta+1;\delta+1;z,t\right).$$

При $t=0$ данные соотношения как частный случай перейдут в известные соотношения для функции Гаусса [2]:

$$F\left(\alpha,\beta;\delta;z\right)-F\left(\alpha,\beta;\delta-1;z\right)=\frac{\alpha\beta}{\delta(1-\delta)}zF\left(\alpha+1,\beta+1;\delta+1;z\right),$$

$$F\left(\alpha,\beta+1;\delta;z\right)-F\left(\alpha,\beta;\delta;z\right)=\frac{\alpha}{\delta}zF\left(\alpha+1,\beta+1;\delta+1;z\right).$$

В этой работе доказана формула

$$\big(\delta-2\beta-(\alpha-\beta)z\big)H_3\left(\alpha,\beta;\delta;z,t\right)+\beta\left(1-z\right)H_3\left(\alpha,\beta+1;\delta;z,t\right)-$$

$$-\left(\delta-\beta\right)H_3\left(\alpha,\beta-1;\delta;z,t\right)=\frac{zt}{1-\alpha}H_3\left(\alpha-1,\beta;\delta;z,t\right),$$

из которой при $t=0$ как частный случай следует

$$\big(\delta-2\beta-(\alpha-\beta)z\big)F\left(\alpha,\beta;\delta;z\right)+\beta\left(1-z\right)F\left(\alpha,\beta+1;\delta;z\right)-$$

$$-\left(\delta-\beta\right)F\left(\alpha,\beta-1;\delta;z\right)=0.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Капилевич М. Б.* О конфлюэнтных функциях Горна // Дифференциальные уравнения, 1966. Т. 2, № 9. С. 1239–1254.
2. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений (4-е изд.). М.: Наука, 1963.

Т. Ф. Долгих (Ростов-на-Дону, Россия)
dolgikh@sfedu.ru

СТРУКТУРЫ ИЗОХРОН ДЛЯ ЗАДАЧИ О ПЕРЕНОСЕ МАССЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

Предложенный в [4, 5] метод годографа на основе законов сохранения позволяет решать широкий круг задач для неустойчивых сплошных сред, многие из которых описаны в [3], и в конечном итоге сводятся к уравнению Эйлера–Дарбу–Пуассона. Особый интерес представляют задачи для уравнений, решение которых в процессе эволюции меняет свой тип с гиперболического на эллиптический или наоборот. Интересны также задачи, для которых начальные данные таковы, что в части пространственной области тип уравнений гиперболический, а в другой части — эллиптический. Типичным примером такой задачи является задача о переносе массы электрическим полем [1, 2]: $u^i_t+(\mu^i u^i/s)_x=0$, $i=1,\,2$, $s=1+u^1+u^2$. Непосредственное использование метода годографа позволяет строить решение лишь в неявном виде, а для построения явного решения следует использовать лагранжевы переменные и дополнительно рассматривать некоторую системы ОДУ на линиях уровня (изохронах) решения. Важную информацию о поведении решения можно получить, изучая структуру изохрон на плоскости мнимой и вещественной части решения. Для задачи о переносе массы структура изохрон позволяет частично описать ситуацию смены типов уравнений. С физической точки зрения перенос массы, описываемый нелинейными волнами (гиперболичность) сменяется возникновением растущих со временем пространственных структур (эллиптичность).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Долгих Т. Ф.* Решение задачи о переносе массы под действием электрического поля в двухкомпонентной смеси. Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2017. № 3-1 (195-1). С. 28–35.

2. *Долгих Т. Ф.*, *Жуков М. Ю.*, *Ширяева Е. В.* Решение эллиптических уравнений с периодическими данными для задачи зонального электрофореза. Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2017. № 2. С. 85–96.

3. *Жданов Б. А.*, *Трубников С. К.* Квазиустойчивые газовые среды. М.: Наука, 1991.

4. *Жуков М. Ю.*, *Ширяева Е. В.*, *Долгих Т. Ф.* Метод годографа для решения гиперболических и эллиптических квазилинейных уравнений. Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2015.

5. *Senashov S. I.*, *Yakhno A.* Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity. SIGMA. 2012. Vol. 8, 071.

С. В. Доронкина, А. Э. Мясникова (Ростов-на-Дону, Россия)
doronkina1234@gmail.com

ИЗМЕНЕНИЕ В СПЕКТРЕ ДЕЛОКАЛИЗОВАННЫХ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В КУПРАТНЫХ СВЕРХПРОВОДНИКАХ ВСЛЕДСТВИЕ ИХ РАССЕЯНИЯ НА ЗАРЯДОВОМ УПОРЯДОЧЕНИИ

Рассматривается модель с сильным дальнодействующим электрон-фононным взаимодействием при высокой плотности носителей заряда в купратных сверхпроводниках. В рамках данной модели основное состояние системы представляет собой зарядовое упорядочение, образованное биполяронами с радиусом много больше постоянной решетки и, возможно (в зависимости от уровня допирования), сосуществующие с ним делокализованные носители заряда [1]. Под влиянием зарядового упорядочения, образованного биполяронами, в спектре делокализованных носителей заряда возникает щель. В настоящем докладе исследуется зависимость размера и положения щели от направления волнового вектора носителей.

Для расчета щели в спектре используется двумерная слоистая модель зарядового упорядочения, в котором носитель движется под углом к плоскости слоев. Периодический потенциал, создаваемый локализованными носителями, разбивается на полосы и усредняется в пределах каждой полосы. Решения уравнения Шредингера в соседних слоях сшиваются с помощью стандартных условий. Преобразование волновой функции делокализованных носителей при прохождении слоя описываются матрицей слоя, произведение всех матриц слоев позволяет найти коэффициент прохождения носителя через кристалл. Результаты, полученные в ходе исследования, хорошо согласуются с экспериментальными данными [2].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Myasnikova A. E., Nazdracheva T. F., Lutsenko A. V., Dmitriev A. V., Dzhantemirov A. H., Zhileeva E. A., Moseykin D. V.* Strong long-range electron-phonon interaction as possible driving force for charge ordering in cuprates. J. Phys.: Condens. Matter. 2019. https://doi.org/10.1088/1361-648X/ab0d6c

2. *Damascelli A., Hussain Z., Shen Z.* Angle-resolved photoemission studies of the cuprate superconductors. Reviews of Modern Physics. 2003. Vol. 75, pp.473-533.

М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева (Ростов-на-Дону, Россия)
myuzhukov@gmail.com, evshiryaeva@sfedu.ru

ДВИЖЕНИЕ ТОНКОГО СЛОЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ НА ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА

Для исследования течения тонкого слоя жидкости по поверхности (внутренней или внешней) цилиндра используется система квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка

$$Y_x = -\frac{1}{G}Y_t + \frac{Y}{G^2}G_t, \quad G_x = -\frac{1}{2}Y_t - \frac{1}{G}G_t,$$

где $Y(x,t)$ — толщина слоя ($|Y| \ll 1$), $G(x,t)$ — вихрь скорости течения, t — время, x — пространственная координата.

Уравнения являются некоторой модификацией уравнений, полученных на основе теории мелкой воды [1], имеют инварианты Римана, записываются в консервативной форме, а также обладают гамильтоновой структурой. Одной из особенностей системы является тот факт, что для течения по внутренней поверхности цилиндра тип уравнений гиперболический, а при течении по внешней поверхности — эллиптический. В гиперболическом случае возможны течения с образованием ударных волн, а в эллиптическом случае возникают пространственно-периодические структуры, типичные для неустойчивых сплошных сред. Для исследования поведения решения используются различные варианты метода годографа — классический, обобщенный и метод на основе законов сохранения. Построена функция Римана–Грина, позволяющая получить решение системы в аналитической форме в неявном виде. Для перехода к явной форме решения вводятся лагранжевы переменные. Удается преобразовать решение задачи Коши для исходных уравнений в частных производных к решению задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается численно. Кроме этого, найден оператор рекурренции, позволяющий построить для исходной системы бесконечный счетный набор гамильтонианов и LA –пару Ибрагимова–Шабата, что, в свою очередь, дает возможность исследовать имеющиеся симметрии Ли–Бэклунда.

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части государственного задания № 1.5169.2017/БЧ Министерства образования и науки РФ, ЮФУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Morad A. M., Zhukov M. Yu.* The motion of a thin liquid layer on the outer surface of a rotating cylinder. Eur. Phys. J. Plus. 2015. 130:8.

М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева (Ростов-на-Дону, Россия)
myuzhukov@gmail.com, evshiryaeva@sfedu.ru

СЕДИМЕНТАЦИЯ ПРИМЕСИ В СТАЦИОНАРНОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Построена и исследована асимптотическая модель пространственно одномерного стационарного турбулентного течения жидкости в области, бесконечной в горизонтальном направлении. Модель базируется на уравнениях Навье–Стокса для несжимаемой вязкой жидкости и в гидростатическом приближении имитирует русловые потоки рек. Турбулентная вязкость задается кусочно-гладкой, что позволяет считать течение двухслойным. В верхнем слое вязкость постоянная и профиль горизонтальной скорости течения степенной, а в нижнем слое вязкость зависит от координат и профиль горизонтальной скорости логарифмический. При этом на границе между слоями касательное напряжение непрерывно, но возникает разрыв компонент скорости. Особенностью модели является отказ от условий прилипания вязкой жидкости к нижней границе нижнего слоя, что дает возможность задавать границы верхнего, нижнего слоев и границу между слоями произвольными, а не подчиняющимися гипотезе о мгновенной адаптации. Предлагаемая модель позволяет, в частности, описывать возникновение противотока и придонные вихри при сложном рельефе нижней границы слоя (дна водоема) и значительном общем расходе жидкости. В рассматриваемом стационарном течении исследуется нестационарный процесс седиментации пассивной примеси. Профили течения жидкости определяются аналитически, а для численного решения задачи о седиментации примеси использован метод конечных элементов со специальной аппроксимацией конвективных членов, позволяющей существенно улучшить точность вычислений при решении задач с разрывными коэффициентами.

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части государственного задания № 1.5169.2017/БЧ Министерства образования и науки РФ, ЮФУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.* Математическое моделирование процесса седиментации примеси в потоке жидкости. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016.

Л. Л. Карашева (Нальчик, Россия)
k.liana86@mail.ru

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСОКОГО ЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}u(x,t) + (-1)^n \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}u(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ – дробная производная порядка α [1, с.9], $0 < \alpha \leq 2$.

Уравнение (1) при $n = 1$ совпадает с диффузионно-волновым уравнением, которое широко исследовано (см. [2] и библиографию там). В частности, в работе [3] исследована краевая задача в полубесконечной области для однородного уравнения (1) при $n = 1$ с дробной производной Римана-Лиувилля. В работе [4] для уравнения (1) построено фундаментальное решение и решена задача Коши.

В данной работе для уравнения (1) решены задачи в неограниченных областях, доказаны теоремы единственности в классе функций быстрого роста.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2003.
2. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.:Наука. 2005.
3. *Геккиева С. Х.* Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной в полубесконечной области. Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2002. №. 1(8), стр. 6–8.
4. *Карашева Л. Л.* Задача Коши для параболического уравнения высокого четного порядка с дробной производной по временной переменной. Сибирские электронные математические известия. 2018. Том. 15, стр. 696–706.

Коноплева И. В. (Ульяновск, Россия)
irinakonopleva2014@yandex.ru

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ О БИФУРКАЦИИ И ПРИЛОЖЕНИЯ К ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

Одним из методов исследования бифуркации является доказательство абстрактных теорем о существовании бифуркации (см., например, [1]-[3]) с дальнейшим их применением к динамическим системам.

В [4] рассматривается нелинейное уравнение

$$F(\varepsilon, x) = 0, \tag{1}$$

где X,Y банаховы пространства $F : \mathbb{R}^s \times X \to Y$ – фредгольмов оператор нулевого индекса, $F(\varepsilon, x_0) = 0, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^s$.

На основе теоремы о неявных операторах и предположении о необратимости $\frac{\partial F}{\partial x}(\varepsilon_0, x_0)$ теоремы о существовании точки бифуркации (ε_0, x_0) уравнения (1) доказаны методом Ляпунова-Шмидта [5]. Рассмотрены бифуркации от простого собственного значения $m = 1$ и резонантные бифуркации для $m = 4, 8$, где $m = \dim Ker \frac{\partial F}{\partial x}(\varepsilon_0, x_0)$.

В [4] даны приложения бифуркационной теоремы к системам ОДУ и абстрактных интегральных уравнений (АИУ) для $m = 4$. Аналогичными методами в настоящей работе исследована система ОДУ размерности $m = 8$

$$\frac{dx}{dt} = Mx + G(x),\ x = (x_1, ..., x_8),\ G : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8,$$

где M - матрица 8×8, зависящая от скалярных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Conley C. C.* Isolated Invariant Sets and the Morse index. CMBS Reg. Conf. Ser. Math. AMS, Providence. 1978. Vol. 38.
2. *Trenogin V. A., Sidorov N. A.* Potentiality Conditions of branching equation and bifurcation points of nonlinear equations. Uzbek Math. J. 1992. No. 2,pp. 40-49.
3. *Rybakowsky K. P.* The Homotopy index and partial differential equations. Springer Verlag. 1987.
4. *Jacimovic V.* Abstract Bifurcation Theorems and Applications to Dynamical Systems with Resonant Eigenvalues. Differential and Difference Equations with Applications. Springer. Proceedings in Mathematics and Statistics. 2013. PP. 439-447.
5. *Sidorov N. A., Loginov B. V., Sinitsyn A., Falaleev M. V.* Lyapunov-Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers. 2002.

М. В. Коровина (МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия), В. Ю. Смирнов (МАИ (НИУ), Россия)
betelgeuser@yandex.ru

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГОЛОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОКРЕСТНОСТИ ИРРЕГУЛЯРНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Проблема представления асимптотики решения уравнения с голоморфными коэффициентами в окрестности иррегулярной особой точки впервые была сформулирована А. Пуанкаре. В его работах рассматривались уравнения нефуксова типа и впервые было показано, что решение уравнения с голоморфными коэффициентами в окрестности иррегулярной особой точки в некоторых случаях может разлагаться в асимптотический ряд. Проблема Пуанкаре состоит в том, чтобы найти вид асимптотических разложений для произвольных линейных уравнений с голоморфными коэффициентами.

Рассмотрим обыкновенные дифференциальные уравнения

$$b_n(r)\left(\frac{d}{dr}\right)^n u(r) + ... + b_i(r)\left(\frac{d}{dr}\right)^i u(r) + ... + b_0(r)\,u(r) = 0, \tag{1}$$

где $b_i(r)$ являются голоморфными функциями. Пусть ноль является регулярной или иррегулярной особой точкой уравнения (1). Уравнение (1) может быть сведено к уравнению вида $\hat{H}u = H\left(r, -r^k\frac{d}{dr}\right)u = 0$, где $\hat{H}$ – дифференциальный оператор с голоморфными коэффициентами. Очевидно, что значение k определяется неоднозначно. Можно найти минимальное натуральное значения k. Если $k = 1$ уравнение является уравнением фуксова типа, если $k > 1$, то уравнение является уравнением нефуксова типа. Примером асимптотик нефуксова типа являются асимптотики вида

$$\sum_j \exp\left(\frac{p_j}{r^k} + \sum_{i=1}^{km-v}\frac{\alpha_i^j}{r^{\frac{i}{m}}}\right) r^{\sigma_j}\sum_{l=0}^{\infty} b_l^j r^l \tag{2}$$

Здесь через $\sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i$ обозначен асимптотический ряд, $p_j, j = 1, ..., n$ – корни многочлена, α_{k-i}^j, σ_j – некоторые числа.

ГИПОТЕЗА. Все асимптотики решения уравнения (1) представимы в виде суммы нефуксовой асимптотики (2) и конормальной асимптотики.

А. В. Курдоглян (Ростов-на-Дону, Россия)
aik_kurdoglyan@mail.ru

ПОЛУИНВАРИАНТНАЯ ФОРМА КРИТЕРИЕВ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ ИЛИ ДВУМЯ КОСИММЕТРИЯМИ

Рассматривается система, обладающая одной (двумя) косимметриями [1]. В таких системах обычным объектом являются одномерные (двумерные) непрерывные семейства равновесий. Спектр устойчивости меняется вдоль такого семейства, хотя всегда содержит точку ноль. Поэтому в условиях общего положения само семейство разбивается на устойчивые и неустойчивые по линейному приближению области, разделенные граничными равновесиями. Устойчивость граничных равновесий зависит от нелинейных слагаемых системы.

В работе [2] изучен вопрос устойчивости в случае систем с одной косимметрией. В работе [3] исследован случай систем с двумя косимметриями. Применение критериев устойчивости, полученных в них, сводится в основном к вычислению коэффициентов модельной системы. Это связано с техническими трудностями, которые многократно возрастают, когда размерность исходной динамической системы велика, хотя число критических переменных может быть и мало.

В данной работе расчетные формулы условий устойчивости и неустойчивости для ряда критических случаев представлены в удобной для вычисления форме, предложенной в работе [4]. Даны явные выражения для коэффициентов модельных систем в „полуинвариантной“ форме – через нейтральные корневые векторы линеаризованной системы и ее сопряженной.

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Министерства образования и науки РФ (№1.5169.2017/8.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Юдович В. И.* Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции. Матем. заметки. 1991. Том. 49, №. 5, стр. 142–148.
2. *Куракин Л. Г.* Критические случаи устойчивости. Обращение теоремы о неявной функции для динамических систем с косимметрией. Матем. заметки. 1998. Том. 63, №. 4, стр. 572–578.
3. *Куракин Л. Г., Курдоглян А. В.* Критические случаи устойчивости равновесий в дифференциальных уравнениях с двумя косимметриями. Изв. СКНЦ. 2018. №. 1, стр. 26–32.
4. *Куракин Л. Г., Юдович В. И.* Полуинвариантная форма критериев устойчивости равновесия в критических случаях. ПММ. 1986. Том. 50, №. 5, стр. 707–711.

В. Б. Левенштам, П. В. Бабич (Ростов-на-Дону, Россия)
vleven@math.rsu.ru

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ И АСИМПТОТИКИ

В докладе рассматривается начально-краевая задача для многомерного гиперболического уравнения второго порядка с неизвестным быстро осциллирующим по времени сомножителем в свободном члене:

$$\begin{aligned}&\tfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x,t)r(t,\omega t), (x,t) \in Q_T,\\ &u\big|_{t=0} = 0,\ \tfrac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = 0,\\ &u\big|_{x\in S} = 0.\end{aligned} \tag{1}$$

Изучается вопрос о восстановлении этого свободного члена по определенным сведениям (дополнительным условиям) о частичной асимптотике решения. Ранее подобные исследования были проведены нами для одномерного уравнения теплопроводности [1,2].

Отметим, что для различных высокочастотных задач дополнительные условия классического типа ставить не естественно, так как их трудно реализовать на практике. Такие условия естественно ставить не на все решение, а лишь на несколько первых коэффициентов его асимптотики. Сколько этих коэффициентов должно быть задействовано для решения обратной задачи следует определять при решении прямой задачи, которая заключается в построении асимптотического разложения решения.

В данном докладе рассмотрена задача о восстановлении свободного члена вида $f(x,t)r(t,\omega t)$, $\omega \gg 1$, задачи (1) с неизвестным сомножителем $r(t,\tau)$. Доказано, что по коэффициентам трехчленной асимптотики решения, вычисленной в фиксированной точке пространства, сомножитель $r(t,\tau)$ однозначно определен.

В заключение отметим, что в настоящее время результаты работ [1,2] перенесены на случай многомерных параболических уравнений. Результаты данного доклада опубликованы в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Babich P. V., Levenshtam V. B.* Direct and inverse asymptotic problems high-frequency terms. Asymptotic Analysis. 2016. в. 97. стр. 329–336.

2. *Бабич П. В., Левенштам В. Б., Прика С. П.* Восстановление быстро осциллирующего источника в уравнении теплопроводности по асимптотике решения. ЖВМ и МФ. 2017. Т. 57, № 12. стр. 1955–1965.

3. *Бабич П. В., Левенштам В. Б.*, Восстановление быстро осциллирующего свободного члена в многомерном гиперболическом уравнении, Матем. заметки, в. 104, № 4. 2018, стр. 505–515.

В. А. Лукьяненко (Симферополь, РФ)
art-inf@yandex.ru

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ПЛАВНОГО ПЕРЕХОДА

Уравнения плавного перехода впервые сконструировал и исследовал Ю. И. Черский [1]. Это уравнение можно представить в форме уравнения с почти разностными ядрами (Л. С. Раковщик)

$$\varphi(t)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}n_1(t-s)\varphi(s)ds+$$
$$+th\frac{t}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}n_2(t-s)\varphi(s)ds=f(t),t\in\mathbb{R}.$$

Разрешимость таких уравнений исследовалась в работах Р. В. Дудучавы, Н. К. Карапетянца, С. Г. Самко, П. В. Керекеши, Г. С. Литвинчука, А. И. Песчанского, В. А. Шевчика и др. В общем случае не существует конструктивных методов решения таких уравнений. Частные случаи решения в квадратурах связаны с методами сведения к краевым задачам теории аналитических функций, с применением аналогов формул Ю. В. Сохоцкого для класса функций $\Phi(z)$ аналитических в полосе. Расширен класс уравнений типа плавного перехода и эквивалентных им многоэлементным и матричным задачам типа Карлемана и экстремальным задачам, решаемых в квадратурах. Частично результаты исследований отражены в работах [3-5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. – М.: Наука. – 1978. – 296 с.

2. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – 448 с.

3. *Лукьяненко В. А.* Интегральные уравнения и краевые задачи для функций от двух переменных // Динамические системы. – 2014. – № 1-2. – С. 143-152.

4. *Лукьяненко В. А.* Обобщенная краевая задача Карлемана // Динамические системы. – 2005. – № 19. – С. 129-144.

5. *Лукьяненко В. А.* Аналоги формул Сохоцкого и их приложения // Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование: сборник научных трудов научно-практической конференции МИК-МО-2017 и Таврической научной конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике / Под ред. В. А. Лукьяненко. – Симферополь: ИП Корниенко А. А., 2017. – С. 75-80.

И. А. Лысенко (Ростов-на-Дону, Россия)
irlys@sfedu.ru

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ИНВАРИАНТНОГО МНОЖЕСТВА В ЗАДАЧЕ ТОМСОНОВСКОГО ВИХРЕВОГО N-УГОЛЬНИКА В АЛЬФВЕНОВСКОЙ МОДЕЛИ ДВУХЖИДКОСТНОЙ ПЛАЗМЫ

Рассматривается движение системы N вихрей одинаковой интенсивности Γ в альфвеновской модели двухжидкостной плазмы, заданное гамильтонианом [1]

$$\mathcal{H} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \sum_{1 \le j < k \le N} W(|z_j - z_k|), \quad W(\xi) = \ln \xi + cK_0(\xi).$$

Здесь $z_k = q_k + ip_k$, (q_k, p_k) – декартовы координаты k-го вихря, K_0 – модифицированная функция Бесселя, параметр $c > 0$.

В работе [2] для этой модели при $N = 2, ..., 5$ исследовалась орбитальная устойчивость стационарного вращения системы N завихренностей, расположенных равномерно на окружности с радиусом R. Под неустойчивостью понималась неустойчивость равновесия редуцированной системы. Был проведён аналитический анализ собственных значений матрицы линеаризации и квадратичной части гамильтониана. В результате пространство параметров задачи (N, R, c) разделилось на три области: область устойчивости в точной нелинейной постановке, область экспоненциальной неустойчивости и область линейной устойчивости, в которой требовался нелинейный анализ.

В данной работе используются результаты статей [2,3] и исследуется устойчивость трёхмерного инвариантного множества, образованного орбитами непрерывного семейства стационарных вращений. Применяется теория устойчивости инвариантных многообразий в системах с несколькими интегралами. В итоге для $N = 2, ..., 5$ получены новые утверждения об устойчивости в областях, где при исследовании орбитальной устойчивости требовался нелинейный анализ.

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Министерства образования и науки РФ (№ 1.5169.2017/8.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bergmans J., Kuvshinov B. N. et al.* Spectral stability of Alfven filament configurations. Physics of plasmas. 2000. Vol. 7, №. 6, pp. 2388-2403.

2. *Лысенко И. А.* Об устойчивости вихревого треугольника, квадрата и пентагона в двухжидкостной плазме. Изв. СКНЦ. 2019. № 1. стр. 17-23.

3. *Kurakin L. G., Lysenko I. A., Ostrovskaya I. V., Sokolovskiy M. A.* On stability of the Thomson's vortex N-gon in the geostrophic model of the point vortices in two-layer fluid. JNLS. 2018. URL: https://doi.org/10.1007/s00332-018-9526-2.

О. Х. Масаева (Нальчик, Россия)
olesya.masaeva@yandex.ru

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим в области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < r,\ -a < y < b\}$ уравнение

$$u_{xx}(x, y) + \operatorname{sign} y \cdot D^{\alpha}_{0y} u(x, y) = 0,\ 1 < \alpha < 2, \tag{1}$$

где $D^{\alpha}_{0y} u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} D^{\alpha-2}_{0y} u(x, y)$ – дробная производная в смысле Римана-Лиувилля порядка α, $D^{\nu}_{0y} u(x, y) = \frac{\operatorname{sign} y}{\Gamma(-\nu)} \int\limits_0^y \frac{u(x,t)dt}{|y-t|^{\nu+1}}$, $\nu < 0$.

Пусть $\Omega^- = \Omega \cap \{y < 0\}$, $\Omega^+ = \Omega \cap \{y > 0\}$.

В работе [1] была рассмотрена задача Дирихле в области $\Omega^- \cup \Omega^+$ для уравнения второго порядка с оператором дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля

$$u_{xx}(x, y) - \operatorname{sign} y \cdot D^{\alpha}_{0y} u_y(x, y) = 0,\ 0 < \alpha < 1.$$

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u(x, y)$ такую, что $y^{2-\alpha} u \in C(\bar{\Omega})$, $u, D^{\alpha-2}_{0y} u \in C^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, $D^{\alpha-1}_{0y} u \in C(\bar{\Omega}^-) \cap C(\bar{\Omega}^+)$ и удовлетворяющую уравнению (1) в области $\Omega^- \cup \Omega^+$.

В данной работе исследуется задача Дирихле в следующей постановке: *Найти в области Ω регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u\left(0, y\right) = u\left(r, y\right) = 0, \quad -a \le y \le b, \tag{2}$$

$$\lim_{y \to -a} D^{\alpha-2}_{0y} u = \theta\left(x\right), \quad 0 \le x \le r, \tag{3}$$

$$\lim_{y \to b} D^{\alpha-2}_{0y} u = \varphi\left(x\right), \quad 0 \le x \le r, \tag{4}$$

$$\lim_{y \to 0+} D^{\alpha-1}_{0y} u = \lim_{y \to 0-} D^{\alpha-1}_{0y} u,\ \theta\left(0\right) = \theta\left(r\right) = 0, \varphi\left(0\right) = \varphi\left(r\right) = 0,$$

где $\theta\left(x\right), \varphi\left(x\right)$ – заданные непрерывные функции на отрезке $[0, r]$. Доказаны существование и единственность решения задачи (1)–(4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Masaeva O. Kh.* Uniqueness of solutions to Dirichlet problems for generalized Lavrent'ev-Bitsadze equations with a fractional derivative, Electron. J. Differential Eq., (2017), Vol. 2017, No. 74, 1-8.

И. В. Моршнева (Ростов-на-Дону, Россия)
ivmorshneva@sfedu.ru

РЕЗОНАНСЫ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С КРУГОВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Рассматриваются динамические системы, инвариантные относительно линейного ортогонального действия группы O(2). Примеры систем с такого рода круговой симметрией дают задачи о возникновении конвективных течений вязкой несжимаемой жидкости и жидкости с примесью, расположенной в бесконечном горизонтальном или вертикальном слое. Изучаются бифукации коразмерности 2 в окрестности параметров, при которых нейтральный спектр линейного оператора состоит из двух пар чисто мнимых собственных значений.

Точке бифуркации коразмерности 2 в системах с круговой симметрией отвечает несколько независимых нейтральных мод. Когда параметры системы изменяются в малой окрестности такой точки, становится возможным сильное взаимодействие всех этих (точнее, слегка измененных) мод, которое описывается нелинейной системой амплитудных уравнений на центральном многообразии.

Впервые системы амплитудных уравнений для задачи Куэтта-Тейлора с цилиндрической симметрией были построены в работах В. И. Юдовича (1986), G. Iooss, P. Chossat (1987) с помощью осреднения по быстрому времени и метода сведения на центральное многообразие. Вид амплитудных систем зависит от соотношений между волновыми числами, а также между частотами. Если не выполняется ни одно из резонансных соотношений, то система сильно упрощается, в ней остаются только обязательные резонансные слагаемые, которые присутствуют во всех резонансных системах. Впервые все возможные резонансные системы были получены для задач с цилиндрической симметрией В. И. Юдовичем и С. Н. Овчинниковой (2001). В данной работе построены возможные резонансные амплитудные системы для задач с круговой симметрией. Изучены решения этих систем на инвариантных подпространствах.

П. В. Москалев (Воронеж, Россия)
moskaleff@mail.ru

АСИМПТОТИКА ФУНКЦИЙ ПЕРКОЛЯЦИОННОЙ ВЕРОЯТНОСТИ НА КВАДРАТНОЙ И КУБИЧЕСКОЙ РЕШЁТКАХ С (1,0)-ОКРЕСТНОСТЬЮ

Классическое определение порога в задачах решёточной перколяции $p_c = \inf\{p : \theta(p) > 0\}$ базируется на существенно различном поведении функции вероятности возникновения перколяционного кластера $\theta(p)$ до достижения критического значения $p < p_c$ и при его превышении $p > p_c$. Из определения $\theta(p)$ следует, что при $p \to 1-$ имеет место сходимость $\theta(p) \to 1-$, но её поведение при $p > p_c$ для различных перколяционных моделей изучено недостаточно.

При моделировании перколяции узлов на решётках глобальные свойства таких моделей определяются [1]: а) вероятностью оккупации единичного узла решётки $0 \leqslant p \leqslant 1$; б) свойствами окрестности этого узла; в) законом распределения случайной величины S, взвешивающей узлы перколяционной решётки.

Ограничимся квадратной и кубической решётками с $(1,0)$-окрестностью, взвешенных бета-распределенными случайными величинами: $S_1 \sim B(1,2)$, $S_2 \sim B(1,1)$, $S_3 \sim B(2,1)$. Статистическое моделирование было проведено для случайных выборок объёмом $n = 1000$ независимых реализаций кластеров на решётках с линейной размерностью $x = 65$ узлов при вероятностях оккупации $p = 0, 0.02, \ldots, 1$, по результатам которого можно сформулировать следующие эмпирические гипотезы.

Гипотеза 1. *Функция перколяционной вероятности $\theta(p)$ на неограниченных квадратной и кубической решётках с $(1,0)$-окрестностями, взвешенных непрерывной случайной величиной S, имеет вид: $\theta(p) = 0$ при $p < p_c$ и $\theta(p) = F_S(p)$ при $p \geqslant p_c$, где $F_S(p)$ — интегральная функция распределения случайной величины S.*

Гипотеза 2. *Порог перколяции на неограниченных квадратной и кубической решётках с $(1,0)$-окрестностями, взвешенной непрерывной случайной величиной S, априорно определяется с помощью p_0-квантиля: $p_c = F_S^{-1}(p_0)$, где уровень $p_0 = 0.592746\ldots$ для квадратной и $p_0 = 0.311608\ldots$ для кубической решёток.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Москалев П. В.* Перколяционное моделирование пористых структур. М.: URSS. 2018.

А. Б. Муравник (Воронеж, Россия)
amuravnik@yandex.ru

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙРОСЕТЕВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ: АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Рассматриваются дифференциально-сверточные уравнения вида

$$\Delta u + \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x-y)u(y)dy = f(x), \tag{1}$$

являющиеся (стационарной) редукцией уравнений, возникающих при моделировании нейронных сетей, процессов реакции–диффузии и нелокальных фазовых переходов (см., напр., [1]).

На основе классических результатов работы [2], устанавливающих специфические свойства преобразования Фурье мер, доказывается следующее утверждение:

Теорема 1. *Если* $\dfrac{\hat{f}(\xi)}{\widehat{K}(\xi)-|\xi|^2} \geq 0$, *то при любом* α *из* $\Big[0, \dfrac{n-1}{2}\Big)$ *любое глобальное решение (хотя бы в смысле обобщенных функций) уравнения* (1) *удовлетворяет оценке*

$$\|r^\alpha \sigma(r)\|_\infty \leq C\|r^{\alpha-1}\sigma(r)\|_1, \qquad (2)$$

где $\sigma(r)$ *— среднее от квадрата решения по сфере радиуса* r *с центром в начале координат, а постоянная* C *зависит только от* n.

Неравенство (2) понимается в следующем смысле: если его правая часть определена, то определена и его левая часть и неравенство справедливо.

Данное исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по Программе повышения конкурентоспособности РУДН «5-100» среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2016–2020 гг, а также при поддержке гранта Президента Российской Федерации НШ-4479.2014.1 и гранта РФФИ 17-01-00401.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chen F.* Almost periodic traveling waves of nonlocal evolution equations. Nonlinear Analysis. 2002. Vol. 50, pp. 807–838.
2. *Mattila P.* Spherical averages of Fourier transforms of measures with finite energy; dimensions of intersections and distance sets. Mathematika. 1987. Vol. 34, pp. 207–228.

В. Г. Николаев (Великий Новгород, Россия)
vg14@inbox.ru

О ЗАДАЧЕ ШВАРЦА В СЛУЧАЕ МАТРИЦ J С БЛОЧНО-ДИАГОНАЛЬНОЙ ЖОРДАНОВОЙ ФОРМОЙ

Пусть все собственные числа матрицы $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\det J \neq 0$ имеют ненулевые комплексные части. Вектор-функцию $\phi = \phi(z) \in C^1(D)$, определенную в области $D \subset \mathbb{R}^2$, назовем J-аналитической с матрицей J в D [1], если выполнено равенство $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} - J \cdot \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 0$, $z \in D$.

Обозначим через Γ границу односвязной области D. Рассмотрим следующую *задачу Шварца* [1].

Пусть $\psi(t) \in C(\Gamma)$, $t \in \Gamma$ — вещественная n-вектор-функция. Нужно найти J-аналитическую с матрицей J в области D функцию $\phi(z)$, для которой выполнено граничное условие $\operatorname{Re}\phi(z)\big|_\Gamma = \psi(t)$.

Пусть числа $\lambda, \mu_k \in \mathbb{C}$, где $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, $\operatorname{Im}\mu_k \neq 0$. Обозначим через J_λ двумерную жорданову клетку и определим следующую блочно-диагональную матрицу $J_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

$$J_1 = \operatorname{diag}\big(\underbrace{J_\lambda, \ldots, J_\lambda}_{m}, \underbrace{\lambda, \ldots, \lambda}_{r}, \mu_1, \ldots, \mu_s\big), \quad 2m + r + s = n. \qquad (1)$$

Пусть векторы $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k, \mathbf{v}_k \in \mathbb{C}^n$. Определим матрицу $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, столбцами которой являются эти векторы:

$$Q = \big(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s\big), \quad \det Q \neq 0. \tag{2}$$

По матрице Q (2) составим две прямоугольные подматрицы:

$$Q' = \big(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_r\big), \quad Q'' = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s). \tag{3}$$

Обозначим: $J = QJ_1Q^{-1}$, тогда матрица J будет иметь жорданову форму J_1 (1) и жорданов базис Q (2). Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть плоская область D ограничена контуром Ляпунова Γ, и пусть граничная функция $\psi(t) \in H^{1,\sigma}(\Gamma)$, $\sigma \in (0,1)$. Пусть все столбцы матрицы Q'' в (3) кратны вещественным векторам. При этом матрица Q' произвольна. Тогда решение задачи Шварца в классе функций $\phi(z) \in H^{\sigma}(\overline{D})$ существует и единственно с точностью до вектор-постоянной.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Николаев В. Г., Солдатов А. П.* О решении задачи Шварца для J-аналитических функций в областях, ограниченных контуром Ляпунова. Дифференциальные уравнения. 2015. Том. 51, №. 7, стр. 965–969.

М. В. Норкин (Ростов-на-Дону, Россия)
norkinmi@mail.ru

КАВИТАЦИОННОЕ ТОРМОЖЕНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА В ЖИДКОСТИ ПОСЛЕ УДАРА

Рассматриваются процессы образования и схлопывания присоединенных каверн при быстром торможении кругового цилиндра в возмущенной жидкости. Предполагается, что начальное возмущение жидкости вызывается вертикальным и безотрывным ударом цилиндра, полупогруженного в жидкость. Начальный этап возникновения кавитации и формирования присоединенных каверн описан в статье [1]. В настоящей работе, на основе линеаризованной модели, изучается процесс схлопывания каверн, который начинается сразу после остановки кругового цилиндра в жидкости. В математическом плане дело сводится к решению смешанной краевой задачи теории потенциала с односторонними ограничениями на поверхности тела:

$$\Delta\Phi = 0, \quad R \in \Omega, \qquad \Phi = \Phi_*, \quad y = -h(t_*)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \quad 0.5\chi\tau - \Phi + \Phi_* - Fr^{-2}\tau\,(y + h(t_*)) \geqslant 0, \quad R \in S_{11}(t)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \geqslant 0, \quad 0.5\chi\tau - \Phi + \Phi_* - Fr^{-2}\tau\,(y + h(t_*)) = 0, \quad R \in S_{12}(t)$$

Здесь Ω – область, занятая жидкостью в момент остановки цилиндра $t = t_*$ (малые возмущения свободных границ не учитываются); $S_{11}(t) \cup S_{12}(t)$ – разбиение границы тела на области контакта и отрыва; $-h(t_*)$ – перемещение цилиндра за промежуток времени $0 \leqslant t \leqslant t_*$; Φ_* – потенциал скоростей в момент остановки; χ – число кавитации (безразмерная разность давлений на внешней свободной поверхности и в каверне); Fr – число Фруда; $\tau = t - t_*$.

По своей структуре данная модель совпадает с классической задачей об ударе с отрывом. Отсюда следует регулярность ее решения в точках отрыва в каждый момент времени t (выполнение условия Кутта–Жуковского) и возможность применения для ее решения известных численных методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Норкин М. В.* Кавитационное торможение кругового цилиндра в жидкости после удара. ПМТФ. 2017. Том. 58, №. 1(341), стр. 102–107.

И. В. Островская (Ростов-на-Дону, Россия)
ivostrovskaya@sfedu.ru

РЕЗОНАНСЫ В ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТОМСОНОВСКОГО ВИХРЕВОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

Дается обзор приложений теории критических случаев устойчивости равновесий гамильтоновых систем к задаче томсоновского вихревого N-угольника. Движение системы N-точечных вихрей описывается $2N$-мерной гамильтоновой системой. Рассматривается случай, когда все собственные значения $\sigma_k^{\pm} = \pm i\omega_k$, $\omega_k \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, N$ матрицы линеаризации лежат на мнимой оси. Известно [1], что неустойчивость в этой ситуации возможна, только когда $\sigma_k^{\pm}$ удовлетворяют резонансным соотношениям

$$m_1\omega_1 + \ldots + m_N\omega_N = 0, \qquad m_k \in \mathbb{Z}.$$

Согласно теории критических случаев первоочередную роль играют резонансы до четвертого порядка включительно: $0 < \sum\limits_{k=1}^{N} |m_k| \leqslant 4$. Основные из них: двукратный ноль и резонансы $1:1$, $1:2$, $1:3$. Различаются также случаи диагонализируемой и недиоганализируемой жордановых форм матрицы линеаризации.

Применение общей теории к исследованию устойчивости стационарных режимов в конкретных физических моделях требует приведения исходной гамильтоновой системы к нормальной форме до определенного порядка. Это продемонстрировано на примере задачи устойчивости томсононовского вихревого N-угольника внутри и вне круга (см., например, [2,3]).

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Министерства образования и науки РФ (№ 1.5169.2017/8.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куницын А. Н., Маркеев А. П.* Устойчивость в резонансных случаях. Итоги науки и техники. Серия «Общая механика». Т. 4. М.: ВИНИТИ, 1979. С. 58–139.

2. *Kurakin L. G.* On the stability of Thomson's vortex pentagon inside a circular domain. Regul. Chaotic Dyn. 2012. Vol. 17 (2). P. 150-169

3. *Kurakin L. G., Ostrovskaya I. V.* Nonlinear stability analysis of a regular vortex pentagon outside a circle. Regul. Chaotic Dyn. 2012. Vol. 17 (5). P. 385–396.

С. П. Плышевская (Симферополь, Россия)
splyshevskaya@mail.ru

МЕТАУСТОЙЧИВЫЕ СТРУКТУРЫ С ТРЕМЯ ТОЧКАМИ ПЕРЕХОДА УРАВНЕНИЯ КАНА-ХИЛЛАРДА

Рассматривается уравнение Кана-Хилларда

$$\begin{aligned} &u_t = (-\varepsilon^2 u_{xx} - u + u^3)_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ &u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0, \quad u_{xxx}(0,t) = 0, \quad u_{xxx}(\pi,t) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\varepsilon^2 > 0$ - постоянная.

Уравнению Кана-Хилларда посвящено значительное число работ. В частности, согласно [1] уравнение (1) при малых ε^2 имеет медленно меняющиеся со временем решения – метаустойчивые структуры.

Построим и проведем анализ иерархии упрощенных моделей уравнения (1) — галеркинских аппроксимаций (1).

Рассмотрим галеркинскую аппроксимацию уравнения (1) в виде

$$u = z_0 + \sum_{k=1}^{N} z_k \cos kx. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1) и приравнивая затем коэффициенты при $\cos kx$, $k = 0, ..., N$, приходим к градиентной системе уравнений:

$$\dot{z}_0 = 0, \quad \dot{z}_k = -\frac{\partial G_N(z,\varepsilon)}{\partial z_k}, \quad k = 1, \dots, N, \tag{3}$$

где $z = (z_0, ..., z_N)$, а $G_N(z,\varepsilon)$ – потенциальная функция, представление которой опустим.

В градиентных системах (3) размерности N согласно проведенному бифуркационному анализу для значений N от 30 до 40 реализуется широкий спектр седлоузловых бифуркаций при малых значениях параметра ε^2. Некоторые из седлоузловых бифуркаций порождают непрерывные по ε^2 ветви приближенных решений краевой задачи типа внутреннего переходного слоя с тремя точками перехода. В свою очередь, эти приближенные решения приводят к метаустойчивым структурам. Сценарий эволюции метаустойчивых структур с тремя точками перехода характеризуется переходом метаустойчивой структуры после сравнительно малого по сравнению с этапом медленного изменения переходного процесса в класс метаустойчивых структур с одной точкой перехода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Alikakos N., Bates P., Fusco G.* Slow motion for the Cahn-Hilliard equation in one space dimension. Journal of Differential Equations. 1991. V. 90, p. 81–135.

Н. М. Полякова (Ростов-на-Дону, Россия)
zhuk_nata@mail.ru

СТАЦИОНАРНОЕ ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ КРОВИ

Рассматривается стационарное турбулентное течение крови в бесконечном цилиндрическом сосуде с неравномерным профилем стенок сосуда. Моделирование осуществляется при помощи асимптотических уравнений, полученных на основе уравнений Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Кинематическая турбулентная вязкость жидкости μ задается в виде $\mu(x,r) \sim \eta^2(x) - r^2$, где x — координата вдоль оси цилиндра, r — радиальная координата, $\eta(x)$ — функция, задающая профиль стенки цилиндра $r = \eta(x)$. При таком выборе вязкости при задании для скорости условий прилипания на боковых границах цилиндрической области возникают сингулярности горизонтальной скорости течения жидкости, для ликвидации которых границы заменяются фиктивными границами $r = \eta(x) + \delta(x)$, $|\delta(x)| \ll |\eta(x)|$, а условия прилипания жидкости заменяются кинематическими условиями, соответствующими в стационарном случае отсутствию нормальных компонент скорости на границе. Указанные краевые условия подобны условиям скольжения Навье, а величина функции $\delta(x)$ играет роль глубины слоя «проникновения». Заметим, что аналогичным образом в теории турбулентности описываются течения в трубах с шероховатостями. Построено аналитическое решение асимптотической модели. Показано, что при больших величинах средней осевой скорости при достаточно гладких неровных стенках в стационарном течении имеются пристеночные вихри. Кроме этого, численно при помощи метода конечных элементов исследовано нестационарное движение пассивной примеси (тромбов) в заданном стационарном турбулентном течении. Рассмотрены варианты движения как пассивной примеси, так и активной примеси, взаимодействующей со стенками сосуда.

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части государственного задания № 1.5169.2017/БЧ Министерства образования и науки РФ, ЮФУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.* Математическое моделирование процесса седиментации примеси в потоке жидкости. Ростов-на-Дону. Изд-во ЮФУ, 2016. 208 с.

И. Л. Сербина (Ставрополь, Россия)
Lserbina@email.ru

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

В современной теории дифференциальных уравнений с частными производными одним из важных разделов, изучению которого посвящено немало публикаций, является раздел нелокальных краевых задач. Повышенный интерес к этому типу неклассических задач объясняется как теоретической значимостью получаемых результатов, так и их многочисленными практическими приложениями в математическом моделировании нелинейных явлений сложных динамических процессов и систем. Результаты исследований нелокальных краевых задач показали, что присутствие нелокальных условий вызывает ряд специфических трудностей, которые не позволяют непосредственно использовать для обоснования их разрешимости стандартные методы. Как правило, преодоление математических трудностей, обусловленных наличием нелокальных условий, в каждом конкретном случае сводится к поиску частных подходов и методов, существенно зависящих от вида нелокальных условий. В докладе, будут изложены результаты исследования на корректность начально-краевой задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с нелокальным условием типа условия Самарского. Обращено внимание на прикладную важность данного типа нелокальных интегральных условий, которые связывая значение искомой функции внутри области со значениями, принимаемыми на части границы рассматриваемой области и описывая поведение решения во внутренних точках границы области в виде некоторого среднего, естественно возникают при решении задач оптимального управления режимом грунтовых вод.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сербина Л. И.* Об одной проблеме для линеаризованного уравнения Буссинеска с нелокальным условием Самарского // Дифференциальные уравнения. -2002.Т.38,№8.-С.1113-1119.
2. *Serbina L. I.* The solution of initial-boundary value problem of the filtration theory with nonlocal boundary condition // Lithuanian Mathematical Journal ,2014, Vol.19, №3, P. 488 – 502.

М. М. Сиражудинов (Махачкала, Россия)
sirazhmagomed@yandex.ru

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ УСРЕДНЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ

Рассмотрим периодическую задачу:

$$\begin{cases} A_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \partial_{\bar z} u_\varepsilon + \mu^\varepsilon\, \partial_z u_\varepsilon + \nu^\varepsilon\, \partial_{\bar z} \overline{u_\varepsilon} = f - \mathrm{Re}\, \left\langle f\, \overline{p_1^\varepsilon} \right\rangle - i\, \mathrm{Re}\, \left\langle f\, \overline{p_2^\varepsilon} \right\rangle, \\ u_\varepsilon \in W_2^1(\square), \qquad \langle u_\varepsilon \rangle = 0, \quad f \in L_2(\square), \qquad (1) \end{cases}$$

где $\mu^\varepsilon = \mu(\varepsilon^{-1}x)$, $\nu^\varepsilon = \nu(\varepsilon^{-1}x)$, $\mu(x) = \mu(x_1,x_2)$, $\nu(x) = \nu(x_1,x_2)$ — измеримые ограниченные комплекснозначные периодические (периода 1 по каждой переменной) функции, удовлетворяющие условию эллиптичности $\operatorname{vrai\,sup}_{x\in\mathbb{R}^2}\left(|\mu(x)|+|\nu(x)|\right) \leqslant k_0 < 1$, $k_0>0$ — постоянная, $\square$ — ячейка периодов, $\langle g\rangle$ — среднее значение периодической функции g, $p_1^\varepsilon = p_1(\varepsilon^{-1}x)$, $p_2^\varepsilon = p_2(\varepsilon^{-1}x)$. Функции $p_1 = p_1(x)$, $p_2 = p_2(x)$, $\langle p_1\rangle = 1$ $\langle p_2\rangle = i$ — базисные векторы ядра оператора $A^*: L_2(\square)\to W_2^{-1}(\square)$, $-A^*p \equiv \partial_z p + \partial_{\bar z}(\overline{\mu}\,p + \nu\,\overline{p})$, $p\in L_2(\square)$, $\varepsilon = 1/n$, $n\in\mathbb{N}$, — малый параметр.

Периодическая задача (1) однозначно разрешима для любой правой части $f\in L_2(\square)$ (см. [1, 2]). Пусть u_ε — решение периодической задачи (1). В качестве первого приближения к решению u_ε возьмем функцию $u_1^\varepsilon(x) = u^0(x) + \varepsilon((N_1(y)-iN_2(y))\,\partial_z u^0(x) + (N_1(y)+iN_2(y))\,\partial_{\bar z}\overline{u^0(x)})$, где $y = \varepsilon^{-1}x$; $N_1(x)$ и $N_2(x)$ — периодические решения задачи на ячейке: $AN_j \equiv \partial_{\bar z}N_j + \mu\,\partial_z N_j + \nu\,\partial_{\bar z}\overline{N}_j = \chi_j$, $N_j\in W_2^1(\square)$, $\langle N_j\rangle = 0$, где $\chi_1 = 2^{-1}\left(\mu^0+\nu^0-\mu(x)-\nu(x)\right)$, $\chi_2 = i2^{-1}\left(\mu^0-\nu^0-\mu(x)+\nu(x)\right)$.

Здесь μ^0, ν^0 — коэффициенты усредненного уравнения (см. [1, 2]). Функция u^0 — решение усредненной задачи: $A_0u^0 = f-\langle f\rangle$, $u^0\in W_2^1(\square)$, $A_0u^0 = \partial_{\bar z}u^0 + \mu^0\,\partial_z u^0 + \nu^0\,\partial_{\bar z}\overline{u^0}$. Имеет место

Теорема. *Пусть функция f из правой части задачи* (1) *принадлежит пространству $W_2^1(\square)$, тогда имеют место оценки*

$$\|u_\varepsilon - u_1^\varepsilon\|_{W_2^1(\square)} \leqslant c\,\varepsilon\,\|f\|_{W_2^1(\square)}, \quad \|u_\varepsilon - u^0\|_{L_2(\square)} \leqslant c\,\varepsilon\,\|f\|_{W_2^1(\square)},$$

где $c>0$ — постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сиражудинов М. М.* Асимптотический метод усреднения обобщенных операторов Бельтрами// Матем. сбор. 2017. 208:4. С.87-110.

2. *Сиражудинов М. М.* О G-сходимости и усреднении обобщенных операторов Бельтрами// Матем. сбор. 2008. 199:5. С.124-155.

С. М. Ситник (Белгород, Россия)
sitnik@bsu.edu.ru

КОМПОЗИЦИОННЫЙ МЕТОД В ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В докладе будет рассказано основное содержание монографии [1], подготовленной к печати. Эта монография составлена из докторской диссертации Валерия Вячеславовича Катрахова (1949–2010) и части докторской диссертации С.М.Ситника, защищённой в 2016 г. Следует отметить, что оба автора, учитель и его ученик, принадлежат школе известного Воронежского математика Ивана Александровича Киприянова, получившего фундаментальные результаты для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя по одной или части переменных.

Работа посвящена приложениям метода операторов преобразования к исследованию дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах. Особое внимание уделяется дифференциальным уравнениям в частных производных с операторами Бесселя.

Приведём содержание книги по главам.

Глава 1. Введение (исторические сведения, функциональные пространства, специальные функции, интегральные преобразования).

Глава 2. Операторы преобразования Сонина—Пуассона—Дельсарта и их модификации.

Глава 3. Теория операторов преобразования Бушмана–Эрдейи.

Глава 4. Общие весовые краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений.

Глава 5. Новые краевые задачи для уравнения Пуассона с особенностями в изолированных точках.

Глава 6. Композиционный метод построения сплетающих соотношений между решениями дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах.

Глава 7. Приложения метода операторов преобразования к оценкам решений для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и задаче Е.М.Ландиса.

Список литературы (более 650 ссылок).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Катрахов В. В., Ситник С. М.* Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений. Современная математика. Фундаментальные направления. 2018. Том. 64, №. 2, стр. 211–426.

Ф. Г. Хуштова (Нальчик, Россия)
khushtova@yandex.ru

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ И ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ

В области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < r,\ 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$B_x u(x, y) - D^{\alpha}_{0y} u(x, y) = 0, \tag{1}$$

где $B_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{b}{x}\frac{\partial}{\partial x}$ – оператор Бесселя [1], $|b| < 1$; D^{α}_{0y} – оператор дробного дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля порядка $0 < \alpha \leqslant 1$ [2, с. 11]. *Регулярным решением* уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и такую, что $y^{1-\alpha}u \in C(\bar{\Omega})$, $B_x u$, $D^{\alpha}_{0y} u \in C(\Omega)$, $\bar{\Omega}$ – замыкание области Ω.

Задача 1. *Найти регулярное в области* Ω *решение уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям* $\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}\, u(x,y) = \varphi(x)$, $0 < x < r$; $u(0,y) = u(r,y) = 0$, $0 < y < T$; $\varphi(x)$ *– заданная функция.*

Далее $J_\nu(z)$ *– цилиндрическая функция Бесселя первого рода порядка* ν [3, с. 132]; $E_{\frac{1}{\rho}}(z;\mu)$ *– функция типа Миттаг-Леффлера* [4, с. 117]. Обозначим через $\beta = (1-b)/2$, $G^{\alpha,\beta}(x,\xi,y-\eta) =$

$$= \frac{2}{r^2}\,\frac{x^\beta \xi^\beta}{(y-\eta)^{1-\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_\beta(\lambda_m x)\, J_\beta(\lambda_m \xi)}{J^2_{1+\beta}(\lambda_m r)}\, E_{\frac{1}{\alpha}}\big(-\lambda_m^2\,(y-\eta)^\alpha;\alpha\big),$$

где λ_m – положительные корни уравнения $J_\beta(\lambda_m r) = 0$, $m = 1, 2, \ldots$, занумерованные в порядке их возрастания.

Теорема. *Пусть* $\varphi(x) \in C[0,r]$, $\varphi(0) = \varphi(r) = 0$. *Тогда существует единственное решение задачи* 1, *представимое в виде*
$u(x,y) = \int\limits_0^r \xi^{1-2\beta}\, G^{\alpha,\beta}(x,\xi,y)\,\varphi(\xi)\,d\xi.$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука. Физматлит, 1997.
2. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
3. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М.: Физматлит, 1963.
4. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.

А. О. Ватульян, В. О. Юров (Ростов-на-Дону, Россия)
vatulyan@math.rsu.ru, vitja.jurov@yandex.ru

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕОДНОРОДНЫХ СВОЙСТВ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

Решена обратная задача об идентификации переменного модуля упругости цилиндрического волновода с кольцевым поперечным сечением в осесимметричной постановке. К краевой задаче применено интегральное преобразование Фурье вдоль продольной координаты. В рамках осесимметричной постановки получена краевая задача для трансформант компонент векторов перемещений и напряжений, которая описывается векторным дифференциальным уравнением первого порядка. Матрица коэффициентов представима в виде квадратичного пучка матриц относительно двух спектральных параметров. Коэффициенты матриц являются переменными и выражаются через разыскиваемый модуль упругости $g(x)$. Для решения прямой задачи в трансформантах при известном законе изменения модуля упругости использован метод пристрелки. Обратная задача состоит в определении $g(x)$ при заданном коэффициенте Пуассона по информации о поле перемещений в ограниченной кольцевой области на внешней границе волновода. В пространстве трансформант к задаче применен метод линеаризации $g(x) = g_0(x) + \epsilon g_1(x) + \ldots$, позволяющий сформировать операторные соотношения при одинаковых степенях ϵ. Первая из возникающих задач решена методом пристрелки для начального приближения $g_0(x)$, которое выбирается на компактном множестве в классе линейных функций. Вторая задача порождена тем же самым оператором, но имеет правую часть, пропорциональную поправке $g_1(x)$. Условие разрешимости позволяет сформулировать относительно нее интегральное равенство в пространстве трансформант. Осуществляя обратное преобразование Фурье, получим уравнение Фредгольма 1 рода с гладким ядром. Для вычисления ядра применена теорема о вычетах для функции, имеющей полюса второго порядка, причем вычеты находятся из анализа вспомогательных задач Коши. Решение интегрального уравнения Фредгольма 1 рода построено с помощью метода регуляризации Тихонова. Вычислительные эксперименты показывают, что погрешность реконструкции $g(x)$ максимальна на концах отрезка интегрирования и не превосходит 10 %.

Работа выполнена при поддержке РНФ (код проекта 18-11-00069).

В. О. Юров, Р. Д. Недин (Ростов-на-Дону, Россия)
vitja.jurov@yandex.ru, rdn90@bk.ru

УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ СТЕСНЕННОГО В ПРОДОЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ ПРЕДНАПРЯЖЁННОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

В настоящее время тема определения резонансных частот неоднородных тел обширно освещена в литературе. В основном подобные задачи решаются с помощью современных численных методов, среди которых наиболее распространен метод конечных элементов; удобство этого подхода состоит в возможности изучения деформирования неоднородных тел произвольной формы. Однако исследование задач о колебаниях неоднородных предварительно напряженных тел представляет собой более специфическую проблему. Так, для выявления закономерностей влияния неоднородного поля предварительных напряжений (ПН) предпочтителен анализ упрощенной модельной задачи.

Исследована задача о колебаниях изотропного неоднородного предварительно напряженного полого цилиндра под действием осесимметричной периодической нагрузки. Составлен алгоритм нахождения резонансных частот цилиндра с произвольным законом радиальной неоднородности материальных свойств, при наличии полей ПН. Выполнен анализ влияния неоднородных ПН трех разных типов на амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) цилиндра. Выявлено, что наличие рассмотренных полей ПН оказывает сравнительно малое влияние на АЧХ, однако установлено, что в малой окрестности резонансных частот влияние ПН может достигать сотен процентов. Построены АЧХ в малых окрестностях первых шести резонансных частот. Приведены графики, отражающие изменение АЧХ под влиянием ПН рассмотренных типов. Приведены таблицы значений первых шести резонансов и их изменений, вызванных наличием ПН.

На основе метода возмущений, путем применения условия разрешимости, выведена асимптотическая формула, позволяющая найти изменение резонансных частот, вызванное наличием ПН в цилиндре по информации об «эталонной» задаче без учета ПН. Проведено сравнение значений изменения резонансных частот, полученных путем применения предложенного численного алгоритма и найденных через асимптотическую формулу; проведена оценка её точности.

Настоящее исследование было поддержано Российским Научным Фондом (проект № 18-71-10045).

Session IV

Hausdorff Operators and Related Topics

R. A. Bandaliyev (Baku, Azerbaijan)
bandaliyevr@gmail.com

ON THE BOUNDEDNESS AND COMPACTNESS OF MULTIDIMENSIONAL HAUSDORFF OPERATOR IN WEIGHTED LEBESGUE SPACES

In this abstract we reduce the boundedness of multidimensional Hausdorff operator in Lebesgue spaces with general weight functions. For one-dimensional Hausdorff operator we investigate the boundedness of Hausdorff operator in Lebesgue spaces with monotone weight functions. Also, we study a compactness of one-dimensional Hausdorff operator in weighted Lebesgue spaces.

This is jointly work with Przemysław Górka.

REFERENCES

1. *Liflyand E.* Hausdorff operators on Hardy spaces. Eurasian Math.J. 2013. Vol. 4, No. 4, pp. 101–141.
2. *Liflyand E., Miyachi A.* Boundedness of multidimensional Hausdorff operators in H^p spaces, $0 < p < 1$. Trans. Amer. Math. Soc. 2018. doi.org/10.1090/ tran/7572.
3. *Bandaliyev R. A., Górka P.* Hausdorff operator in Lebesgue spaces. Math. Ineq. Appl. 2019. Vol. 22, No. 2, pp. 186–205.

R. Daher, T. Kawazoe and F. Saadi (University of Hassan II, Morocco)
rjdaher024@gmail.com

HAUSDORFF OPERATOR FOR JACOBI HYPERGROUP

We define the Hausdorff operator $\mathcal{H}_\psi$ on Jacobi hypergroup $(\mathbb{R}_+, \Delta, *)$ by using the dilation $\psi_t = \frac{1}{t\Delta(x)}\Delta(\frac{x}{t})\psi(\frac{x}{t})$. We show that, if $\psi \in L^1(\Delta)$, then $\mathcal{H}_\psi$ is bounded from $L^1(\Delta)$ to itself. Moreover, it is bounded from $\mathbb{H}^1(\Delta)$ to itself provided that ψ is supported on $[0,1]$. Here $\mathbb{H}^1(\Delta)$ is the real Hardy space for the Jacobi hypergroup introduced by the second author, which id defined by using the radial maximal operator $M_\phi f(x) = \sup_{t>0} |f * \phi_t(x)|$, where the dilation ϕ_t is given as above.

E. Liflyand (Ramat-Gan, Israel)
liflyand@gmail.com

A TALE OF TWO HARDY SPACES

New relations between the Fourier transform of a function of bounded variation and the Hilbert transform of its derivative are revealed. If we do not distinguish between the cosine and sine transforms and consider the general Fourier transform of f, direct calculations give the belonging of f' to the real Hardy space as a sufficient condition for the integrability of the Fourier transform. Our analysis is more delicate. The main result is an asymptotic formula for the **cosine** Fourier transform. Such relations have previously been known only for the sine Fourier transform. Interrelations of various function spaces are studied in this context, first of all of two types of Hardy spaces.

The obtained results are used for proving completely new results on the integrability of trigonometric series.

REFERENCES

1. *Liflyand E.* The Fourier transform of a function of bounded variation: symmetry and asymmetry. J. Fourier Anal. Appl. 2018. Vol. 24, pp. 525–544.

A. R. Mirotin (Gomel, Belarus)
amirotin@yandex.ru

ON HAUSDORFF OPERATORS ON GROUPS

In the following Ω stands for a quasi-metric space with positive Radon measure μ and G for a locally compact group which is a space of homogeneous type.

Definition [1]. Let Φ be a locally integrable function on Ω and $(A(u))_{u\in\Omega}$ a measurable family of automorphisms of G. We define the *Hausdorff operator* with the kernel Φ by $(x \in G)$

$$(\mathcal{H}_{\Phi,A}f)(x) = \int_\Omega \Phi(u)f(A(u)(x))d\mu(u).$$

Consider the following condition: for every automorphism $A(u)$, for every $x \in G$, and for every $r > 0$ there exist a positive number $k(u)$ which depends on u only and a point $x' = x'(x, u, r) \in G$ such that

$$A(u)^{-1}(B(x, r)) \subseteq B(x', k(u)r) \qquad (*)$$

$(B(x, r)$ stands for a ball in G centered at $x)$.

Theorem 1 [1]. *Let the condition* $(*)$ *holds and* s *be the homogeneous dimension of* G*. For* $\Phi \in L^1(\Omega, k^s d\mu)$ *the Hausdorff operator* $\mathcal{H}_{\Phi,A}$ *is bounded on the real Hardy space* $H^1(G)$.

Special cases of compact groups, the Heisenberg group and finite-dimensional spaces over division rings are also considered.

The next theorem gives a description for normal Hausdorff operators.

Theorem 2 [2, 3]. *Let* $G = \mathbb{R}^n$*,* $A(u)$ *be a commuting family of non-singular self-adjoint* $n \times n$*-matrices, and* $|\det A(u)|^{-1/2}\Phi(u) \in L^1(\Omega)$*. Then the Hausdorff operator in* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *is normal and unitary equivalent to the operator of multiplication by some matrix-valued function* $\phi \in Mat_{2^n}(C_b(\mathbb{R}^n))$ *(the matrix symbol of* $\mathcal{H}_{\Phi,A}$*) in the space* $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^{2^n})$ *of* $\mathbb{C}^{2^n}$*-valued functions.*

REFERENCES

1. *Mirotin A. R.* Boundedness of Hausdorff operators on Hardy spaces H^1 over locally compact groups. J. Math. Anal. Appl. 2019. Vol. 473, pp. 519 – 53. arXiv:1808.08257v2.
2. *Mirotin A. R.* On the description of normal Hausdorff operators on Lebesgue spaces. Preprint. arXiv:1902.07671v1.
3. *Mirotin A. R.* The structure of normal Hausdorff operators on Lebesgue spaces. Preprint. arXiv:1812.02680v2.

Session V

Probability-Analytical Models and Methods

Yu. E. Gliklikh (Voronezh, Russia), G. A. Vlaskov (Rostov-on-Don, Russia)
yeg@math.vsu.ru, vls1958@mail.ru

NEW STOCHASTIC MODELS OF POLAR IONOSPHERE[1]

Traditional models of distribution of electron concentration N_e in the F-region of polar ionosphere are based on two determining factors: ionization q and the large-scale electrical field of magnetospheric convection generating the transfer $\bar{v}$ of ionospheric plasma [1]. Note that q takes two values: at day time it is a positive constant (without loss of generality we can set it equal to 1) and at night time it is equal to zero. The vector $\bar{v}$ is equal to $\frac{E\times B}{B^2}$ where E and B are electric and magnetic strengths, respectively. Everything is considered over some neighborhood of the North Pole.

In [2] the continuity equation $\frac{\partial N_e}{\partial t} + \bar{v}\cdot\nabla N_e = q - \beta N_e$ is considered with the assumption that $\bar{v}$ is the sum of the deterministic summand (for which we keep the notation $\bar{v}$) and the stochastic summand that is supposed in [2] to be the Wiener process $w(t)$ (the Brownian motion) with a real coefficient $\sigma(t,x)$, β is the recombination coefficient, and q is the ionization (see above). Thus the equation describing this model takes the form $\frac{\partial N_e}{\partial t} + (\bar{v}+\sigma w(t))\cdot\nabla N_e = q - \beta N_e$ or in coordinate form

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + (\bar{v}^1+\sigma w^1(t))\frac{\partial N_e}{\partial x^1} + (\bar{v}^2+\sigma w^2(t))\frac{\partial N_e}{\partial x^2} = q - \beta N_e.$$

The main aim of this talk is to pass from the above mentioned ordinary differential equations with random coefficients to stochastic differential equations in the Ito form and to stochastic differential equations with current velocities (Nelson's symmetric mean derivatives). In the framework of stochastic analysis such equations are considered as more adequately describing the behavior of physical processes. Note that the current velocities are natural analogues of ordinary physical velocity of deterministic processes. We construct such equations and prove the existence of solution theorems for them.

REFERENCES

1. *Deminov M. G.* Earth ionosphere: Laws and mechanisms. Electromagnetic and Plasma Processes from Sun Interior to Earth Interior.- Moscow: IZMIRAN, 2015.- P. 295-346.
2. *Vlaskov G. A., Mozhaev A.M.* On modeling of stochastically convecting polar ionosphere. Studies of High-Altitude Ionosphere.- Apatity: KNTs AN SSSR, 1986.- P. 42-45.

O. E. Kudryavtsev (Rostov-on-Don, Russia)
koe@donrta.ru

NUMERICAL METHODS FOR PRICING DOUBLE BARRIER OPTIONS UNDER LÉVY PROCESSES[2]

The most popular exotic options are barrier options which include double barrier options. Recall that a double barrier option is a contract which pays the specified

[1] The research is supported in part by RFBR Grant 18-01-00048.
[2] The reported study was funded by RFBR according to the project No. 18-01-00910 A.

amount $G(S_T)$ at the terminal date T, provided during the life-time of the contract, the price of the stock does not cross specified constant barriers D from above and U from below. When at least one of the barriers is crossed, the option expires worthless.

Let T, K, D, U be the maturity, strike, the lower barrier and the upper barrier, and the stock price $S_t = e^{X_t}$ is an exponential Lévy process under chosen equivalent martingale measure. Then the the no-arbitrage price of the double barrier option at time $t < T$ and $X_t = x$ with $x \in (D, U)$ given by

$$V(t,x) = V(T; D; U; G; t, x) = E^{t,x}\left[e^{-r(T-t)}\mathbf{1}_{\underline{X}_T > D}\mathbf{1}_{\bar{X}_T < U} G(e^{X_T})\right],$$

where $\underline{X}_t = \inf_{0\le s\le t} X_t$ and $\bar{X}_t = \inf_{0\le s\le t} X_t$ are the infimum and the supremum processes, respectively.

In the present talk, we introduce a new Wiener-Hopf factorization approach to pricing double barrier options under pure non-Gaussian Lévy processes of finite variation. For general Lévy models one should factorize a 2×2 matrix of functions, which can be achieved iteratively (see e.g. [1,2]). The key idea behind our method is to represent the process under consideration as a difference between subordinators which have explicit factorizations. After Carr's randomization is applied, we solve the problem explicitly at each time step.

REFERENCES

1. *Boyarchenko M., Levendorskiĭ S.* Valuation of continuously monitored double barrier options and related securities. Mathematical Finance. 2012. Vol. 22, No. 3, pp. 419–444.

2.*Phelan E., Marazzina D., Fusai G., Germano G* Fluctuation identities with continuous monitoring and their application to price barrier options. European Journal of Operational Research. 2018. Vol. 271, No. 1, pp. 210-–223.

A. V. Makarova, V. A. Gorlov (Voronezh, Russian Federation)
allagm@mail.ru

STOCHASTIC DIFFERENTIAL INCLUSIONS WITH MEAN DERIVATIVES RELATIVE TO THE PAST HAVING DECOMPOSABLE RIGHT-HAND SIDES [1]

We investigate a new sort of stochastic differential inclusions given in terms of mean derivatives defined with respect to conditional expectation relative to the "past" sigma-algebra of a process.

We prove a theorem on the existence of solutions for stochastic differential inclusions given in terms of the forward mean derivatives on the right (introduced By E. Nelson ([1],[2],[3]) for the needs of so-called stochastic mechanics (a variant of quantum mechanics)), giving information on the drift, and (introduced by Yu.e. Gliklich and S. V. Azarina ([4])) quadratic mean derivatives, which, in turn, giving information on the diffusion coefficient with respect to conditional expectation relative to the "past" sigma-algebra of a process. It is assumed that the right part with forward mean derivatives on

[1]The research is supported in part by RFBR Grant 18-01-00048.

the right is set-valued and lower semi-continuous, but not necessarily convex. Similarly, it is assumed that the right part with quadratic derivatives is also set-valued, lower semi-continuous from below and not necessarily convex. Together with this we assume that the right part with quadratic derivatives as well as the right part with derivatives on the middle right are decomposable.

REFERENCES

1. *Nelson E.* Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics /E. Nelson // Phys. Rev. 1966. Vol. 150. P. 1079-1085.
2. *Nelson E.* Dynamical theory of Brownian motion / E. Nelson. Princeton NJ: Princeton University Press. 1967. 115 p.
3. *Nelson E.* Quantum fluctuations / E. Nelson. Perinceton NJ: Princeton University Press. 1985. 146 p.
4. *Azarina S. V., Gliklikh Yu. E.* Differential inclusions with mean derivatives, Dyn. Syl. Appl., 16 (2007), pp. 49-71.

N. M. Mezhennaya (Moscow, Russia)
natalia.mezhennaya@gmail.com

LIMIT THEOREMS FOR THE NUMBER OF EVENTS APPEARANCES IN A FINITE MARKOV CHAIN

Let $\{X_j, j = 1, \ldots, n\}$ be ergodic stationary Markov chain with the states set $\mathcal{A}_N = \{1, \ldots, N\}$, $N \geq 2$, transition probabilities matrix $P = ||p_{a,b}||_{a,b\in\mathcal{A}_N}$ and probability distribution $\{\pi_a, a \in \mathcal{A}_N\}$. Then there exist the constants $C, \gamma > 0$, such that $|p^{(n)}_{a,b} - \pi_b| \leq C\pi_b e^{-\gamma n}$, $n \geq 1$, where $p^{(n)}_{a,b}$ denotes the elements of the matrix P^n.

We suppose that the random event A_j depend on the random variables $X_j, \ldots, X_{j+s}$, $s \geq 1$, the set of events $\{A_j, j = 1, \ldots, n - s\}$ is homogeneous and has the property that $\mathbb{P}\{A_i A_j\} = 0$ for $|i - j| \leq s$.

Let $\Gamma = \{1, \ldots, n - s\}$, $\{\alpha_j = I_{A_j}, j \in \Gamma\}$ be the set of random indicators, corresponding to the events $\{A_j, j \in \Gamma\}$, $Q_s = \mathbb{P}\{A_j\}$ be probability of any event from the set $\{A_j, j \in \Gamma\}$.

We define the random variable $\xi = \sum_{j=1}^{n-s} \alpha_j$, which is equal to the number of events A_j in $\{X_j, j = 1, \ldots, n\}$, and its expectation $\lambda_s = \mathbb{E}\xi = (n - s)Q_s$.

The following notation will be used: $\mathcal{L}(\xi)$ for the distribution of random variable ξ, $\mathrm{Pois}(\lambda)$ for Poisson distribution with parameter λ, $\mathcal{N}(0, 1)$ for standard normal distribution, ρ_{TV} for total variation distance.

Theorem 1. *Let $s \geq 2$ and $\lambda_s \geq 1$. Then there exist the constants C_1 and C_2, such that*

$$\rho_{TV}\big(\mathcal{L}(\xi), \mathrm{Pois}(\lambda_s)\big) \leq C_1 \frac{s}{n}\lambda_s + C_2 e^{-\gamma s}\sqrt{\lambda_s}.$$

Corollary 1. *Let $s, n \to \infty$, such that $s/n \to 0$, $Q_s \to 0$, $\lambda_s \to \lambda \in (0, \infty)$. Then $\mathcal{L}(\xi) \to \mathrm{Pois}(\lambda)$.*

Corollary 2. *Let $s, n \to \infty$, such that $\lambda_s \to \infty$, $s\lambda_s/n \to 0$, $\lambda_s = o(e^{\gamma s})$. Then $\mathcal{L}\big((\xi - \lambda_s)/\sqrt{\lambda_s}\big) \to \mathcal{N}(0, 1)$.*

Remark. We used the Chen–Stein method [1] and the proof scheme proposed in [2,3] to establish the theorem 1.

REFERENCES

1. *Barbour A. D., Holst L., Janson S.* Poisson Approximation. Oxford: Oxford Univ. Press, 1992. 277 p.
2. *Mikhailov V. G., Shoitov A. M.* On repetitions of long tuples in a Markov chain. Discrete Math. Appl. 2015. V. 25, № 5. P. 295–303.
3. *Minakov A. A.* Poisson approximation for the number of non-decreasing runs in Markov chains. Mat. Vopr. Cryptogr. 2018. V. 9, № 2. P. 103–116.

N. M. Mezhennaya, V. G.Mikhailov (Moscow, Russia)
natalia.mezhennaya@gmail.com, mikh_vg@mail.ru

ON THE NUMBER OF ONES IN THE MULTICYCLIC SEQUENCE

Let $(x_0^{(j)},\dots,x_{m_j-1}^{(j)})$, $j=1,\dots,r$, be independent binary random vectors with lengths $m_1,\dots,m_r\ge 2$, $f(y_1,\dots,y_r)$ be a Boolean function, essentially dependent on all its arguments, $t(m)=t \bmod m$.

Consider a multicyclic sequence $z_t = f\big(x_{t(m_1)}^{(1)},\dots,x_{t(m_r)}^{(r)}\big)$, $t\ge 0$. Let ξ be the number of ones in $(z_0,\dots,z_{m_1\dots m_r-1})$, s_j be the number of ones in $(x_0^{(j)},\dots,x_{m_j-1}^{(j)})$, $j=1,\dots,r$.

Denote by $\xrightarrow{d}$ convergence in distribution.

Condition 1. Let $m_j\to\infty$ and there exist the numbers a_j и $b_j>0$: $\tilde{s}_j = b_j^{-1}(a_j-2s_j)\xrightarrow{d}\eta_j$, where η_j are proper random variables, $(m_j-a_j)/m_j=\alpha_j\in[-1;1]$, $b_j/m_j\to 0$, $\frac{m_1 b_j}{m_j b_1}\to\rho_j\in(0;1]$, $j=1,\dots,r$.

Let
$$B_k^2=\sum_{1\le j_1<\ldots<j_k\le r}\beta^2_{j_1,\dots,j_k},\quad \beta_{j_1,\dots,j_k}=-\frac{1}{2}\frac{\rho_{j_1}\dots\rho_{j_k}}{\rho_1\dots\rho_k}\Bigg(W_f(\mathbf{1}_{(j_1,\dots,j_k)})+$$
$$+\sum_{u=1}^{r-k}\sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_u\le r,\\ |\{j_1,\dots,j_k,i_1,\dots,i_u\}|=k+u}} W_f(\mathbf{1}_{(j_1,\dots,j_k,i_1,\dots,i_u)})\prod_{l=1}^{u}\alpha_{i_l}\Bigg),$$
$$A=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}\sum_{1\le j_1<\ldots<j_k\le r}W_f(\mathbf{1}_{(j_1,\dots,j_k)})\prod_{l=1}^{k}\left(\frac{m_{j_l}-a_{j_l}}{m_{j_l}}\right)-\mathrm{wt}(f),$$

where $\mathrm{wt}(f)$ and $W_f(z)$ are weight and Walsh–Hardamard coefficient of the function f [1], $\mathbf{1}_{(j_1,\dots,j_k)}\in\{0,1\}^r$ is a binary vector with set of ones $\{j_1,\dots,j_k\}$, $|A|$ is a cardinality of set A.

Condition 2. There exists a number q : $1\le q\le r$, such that $B_k^2=0$ as $k=1,\dots,q-1$, and $B_q^2>0$.

Theorem 1. *Under conditions* 1 *and* 2
$$\frac{m_1\dots m_q}{b_1\dots b_q}\left(\frac{2^r\xi}{m_1\dots m_r}+A\right)\xrightarrow{d}V_q=\sum_{1\le j_1<\ldots<j_q\le r}\beta_{j_1,\dots,j_q}\eta_{j_1}\dots\eta_{j_q}.$$

.

REFERENCES

1. *Logachev O. A., Sal'nikov S. V., Smyshlyaev A. A., Yashchenko V. V.* Boolean functions in coding theory and cryptology. MCCME. 2012.

O. E. Kudryavtsev, V. V. Rodochenko (Rostov-on-Don, Russia)
koe@donrta.ru, vrodochenko@gmail.com

ON RISK EVALUATION FOR CRYPTOCURRENCY MARKETS USING AN LSTM ARTIFICIAL NEURAL NETWORK [1]

Due to the nature of cryptocurrencies and their dynamics, which can be characterized with both high liquidity and high volatility, options on cryptocurrencies are rarely used on exchanges. Perhaps the main reasons for that is a shortage of models, which are capable of evaluating risks with a satisfactory level of accuracy and speed. One of the most important of them is the risk of crossing a certain level by an asset price.

This risk can be interpreted as a price of a first touch digital option (see e.g. [3]). To calculate it we acquire the Poloniex exchange data for the BTC/USDT pair and construct an artificial LSTM (long-short term memory, proposed in [1]) neural network analogous to ones in [2, 4].

We choose a number of strikes and calculate normalized histograms of historical frequencies of crossing each of them for a fixed time window. Then we use this data to predict the price of a first touch digital option for a given strike. We also calibrate a CGMY model using an algorithm based on the fast Wiener-Hopf factorization method in a way proposed in [3]. Finally, we compare the prices obtained by the CGMY model and the ones predicted by the LSTM network, with historical data.

REFERENCES

1. *Hochreiter S. and Schmidhuber J.* Long short-term memory, Neural Computation. 1997. Vol. 9, No. 8, pp. 1735–1780, DOI:10.1162/neco.1997.9.8.1735.

2. *Kim T. and Kim HY.* Forecasting stock prices with a feature fusion LSTM-CNN model using different representations of the same data. PLoS ONE. 2019. Vol. 14, No. 2, DOI: https://doi.org/10.1371/journal.pone.0212320

3. *Kudryavtsev, O. and Grechko, S.* Statistical methods for calibrating models of cryptocurrencies prices. Accounting and Statistics. 2018. Vol. 4, No. 52, pp. 67–76. ISSN 194-0874.

4. *Nelson D. M.Q., Pereira A. C.M.* Stock market's price movement prediction with LSTM neural networks. International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN). 2017. DOI: 10.1109/IJCNN. 2017.7966019

Rokhlin D. B. (Southern Federal University, Russia)
dbrohlin@sfedu.ru

A PRICING SCHEME FOR RESOURCE MANAGEMENT IN A NETWORK WITH LARGE NUMBER OF SOURCES [2]

We consider a communication network with small numbers of links, shared by large number of sources. According to the network utility maximization (NUM) paradigm

[1]The reported study was funded by RFBR according to the research projects No 18-01-00910.
[2]The research was supported by the Russian Science Foundation, project 17-19-01038.

of [1] we assign a utility function to each source and consider a pricing mechanism for transmission rates over each link to effectively manage the available resources.

In contrast to the usual hypothesis, we do not assume that the aggregate traffic, generated by the sources over each link, is known. Instead we consider an online pricing scheme, based on the knowledge of link capacities b, the total number N of sources and the reactions of randomly selected sources to the current price vector λ . This problem statement makes sense, since the packets from sources do not come simultaneously.

The proposed online pricing scheme is based on the dual projected stochastic gradient descent method. For a special class of utility functions we show that the upper bounds for the amount of constraint violation and the inaccuracy in the aggregate utility approximation are bounded by $O(T^{-1/4})$ uniformly in N, where T is the number of source reaction measurements. The fast gradient descent method of [3], applied to the NUM problem in [2], bounds the same quantities by $O(T^{-1})$. However, each iteration of the latter method requires N rate measurements (under the assumption that such information is available). So, for large values of N our algorithm may require smaller number of measurements to achieve the desired accuracy. The performance of the proposed algorithm is illustrated by computer experiments with quadratic utility functions.

REFERENCES

1. *Kelly F. P., Maulloo A., Tan D.* Rate control for communication networks: Shadow prices proportional fairness and stability. J. Oper. Res. Soc. 1998. Vol. 49, No. 3, pp. 237–252.
2. *Beck A., Nedic A., Ozdaglar A., Teboulle M.* An $O(1/k)$ gradient method for network resource allocation problems. Trans. Control Netw. Syst. 2014. Vol. 1, No. 1, pp. 64–73.
3. *Nesterov E.* A method for solving the convex programming problem with convergence rate $O(1/k^2)$. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1983. Vol. 269, No. 3, pp. 543–547.

Е. В. Алымова (Ростов-на-Дону, Россия)
langnbsp@gmail.com

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ФИНАНСОВЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ НА ОСНОВЕ МОДУЛЯ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ В RAPIDMINER

Задача предсказания финансовых временных рядов актуальна в любом виде инвестиционной деятельности. Цель предсказания – определение тенденций временного ряда с тем, чтобы наиболее эффективно принимать решение о купле-продаже ценных бумаг. Часто эта задача решается применением методик технического анализа – набора эмпирических правил, основанных на индикаторах поведения рынка.

С ростом популярности и доступности инструментов машинного обучения предсказание финансовых временных рядов многими исследователями начинает сводиться к задаче классификации и соответственно решаться с помощью нейронных сетей [1, 2].

Целью настоящей работы является изучение поведения временного ряда валютной пары BTC/USD в период с января 2017 года по март 2018 года в режиме реального времени с интервалом в одну минуту. Для каждой единицы времени известны: стоимость биткоина на начало и конец периода, наиболее высокая и наиболее низкая предлагаемая цена, количество проданных биткоинов в текущем периоде. В рамках данной работы строится нейронная сеть, решающая задачу классификации и предсказывающая рост или падение цены биткоина в следующих периодах.

В качестве инструмента реализации нейронной сети выбрана платформа для анализа больших данных Rapidminer [3], в которой требуемые модели описываются в виде исполняемых процессов. Построенный в данной работе процесс основывается на модуле нейронной сети прямого распространения. В работе подобраны оптимальные параметры сети и изучено её поведение на реальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Видмант О. С.* Прогнозирование финансовых временных рядов с использованием рекуррентных нейронных сетей LSTM. // Общество: политика, экономика, право. 2018. №. 5

2. *Кондратьева Т. Н.* Прогнозирование тенденции финансовых временных рядов с помощью нейронной сети LSTM // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ». 2017. Том. 9, №. 4

2. *Arunadevi J., Ramya S., Raja M. R.* A study of classification algorithms using Rapidminer //International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2018. Том. 119. №. 12. С. 15977-15988.

Т. А. Волосатова, И. В. Павлов, С. И. Углич (Ростов-на-Дону, Россия)
pavloviv2005@mail.ru

ПРОБЛЕМА МИНИМАКСА В КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ [1]

Настоящий доклад является изложением результатов статьи [1], которая, в свою очередь, основывается на работах [2,3]. Во всех этих статьях речь идет об оптимизации взаимодействия в рамках единой системы ряда учреждений и «оптимизатора», заинтересованного в успешном функционировании системы и действующего на основе экспертных оценок, реализуемых в задании независимых случайных приоритетов $\alpha_j = \alpha_j(\omega), j = 1, 2, ...k$. Исследование подробно описанных в [2] систем квазилинейного типа, могущих иметь точки локального максимума, сводится к исследованию некоей гладкой целевой функции $F(u_1, \ldots, u_{k-1})$, зависящей от строго положительных параметров $c_1, \ldots, c_{k-1}$. Пусть $c_k = \sum_{j=1}^{k-1} c_j b_j + b_k$, где b_j, $1 \leq j \leq k$ — свободные члены входящих в изначальное описание рассматриваемой задачи линейных функций от n переменных. В [2,3] доказано: если $c_k > 0$ и $P(0 < \alpha_j < 1) > 0$, $j = 1, \ldots, k$, то функция $F(u_1, \ldots, u_{k-1})$ имеет в своей области определения единственную точку $(u_1^\star, \ldots, u_{k-1}^\star)$ локального максимума (являющуюся также точкой глобального максимума). Обозначим $F_{max}(c_1, \ldots, c_{k-1}) = F(u_1^\star, \ldots, u_{k-1}^\star)$.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 19-01-00451).

Теорема (см. [1]). *Пусть* $P(0 < \alpha_j < 1) > 0$, $j = 1, \ldots, k$ *и* $b_j > 0, j = 1, 2, ..., k$ *(то есть функция* F_{max} *определена при всех* $c_j > 0, j = 1, 2, ..., k-1$*). Если существует стационарная точка функции* F_{max}*, то эта точка единственна и является точкой минимума.*

Численные эксперименты дают основание полагать, что стационарная точка функции F_{max} существует.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Волосатова Т. А., Павлов И. В., Углич С. И.* Задача минимакса для квазилинейных сложных систем с независимыми приоритетами. Вестник РГУПС. 2019. № 2 (в печати).

2. *Павлов И. В. Углич С. И.* Оптимизация сложных систем квазилинейного типа с несколькими независимыми приоритетами. Вестник РГУПС. 2017. № 3, стр. 140–145.

3. *Красий Н. П.* Существование и единственность точки максимума в задаче оптимизации квазилинейных моделей с независимыми приоритетами // Вестник РГУПС. 2018. № 4, стр. 144-151.

А. С. Гречко, О. Е. Кудрявцев (Ростов-на-Дону, Россия)
alex@itparadigma.ru, koe@donrta.ru

КАЛИБРОВКА ИНДЕКСА АКТИВНОСТИ СКАЧКОВ МОДЕЛЕЙ ЛЕВИ ПО ДАННЫМ КРИПТОВАЛЮТ BITCOIN И ETHEREUM [1]

В последние годы бурно развивается рынок криптовалют, который показал в 2017 году существенный рост, а в 2018 году демонстрировал спад. В настоящее время рынок стабилизировался и начинает снова расти. Наиболее популярными криптовалютами являются bitcoin и ethereum. Как показывают исследования в [1], наиболее адекватными моделями для криптовалют являются чисто негауссовы модели Леви.

В данной работе было проведено исследование логарифмов доходности курсов криптовалют bitcoin и ethereum по отношению к доллару США на основе данных котировок с криптобиржи GDAX с шагом в 1 минуту за 2017 и 2018 годы. В таблице 1 приведены среднее значение точечной оценки индекса активности и доверительные интервалы для среднего. Результаты подтвердили предположение о

Таблица 1: Оценки индекса активности скачков курсов bitcoin и ethereum

криптовалюта	год	среднее	интервал
BTC	2017	0.90905206497	(0.870051,0.948053)
BTC	2018	0.746032620422	(0.716193, 0.775872)
ETH	2017	0.957929316457	(0.907175,1.00868)
ETH	2018	0.970967822512	(0.939202,1.00273)

наличии скачков в динамике актива и показали отсутствие диффузионной составляющей и сноса, как в 2017 так и 2018 году. Таким образом, для моделирования цен криптовалют bitcoin и ethereum при расчете безарбитражных цен опционов вместо диффузионных моделей следует использовать чисто негауссовые модели Леви с ограниченной вариацией.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-01-00910 А.

Л И Т Е Р А Т У Р А
1. *Кудрявцев О. Е., Гречко А. С.* Статистические методы калибровки моделей цен криптовалют. Учет и статистика. 2018. Том. 52, №. 4, стр. 67–76.

А. Г. Данекянц, Н. В. Неумержицкая (Ростов-на-Дону, Россия)
dangegik@mail.ru.ru, neunata@yandex.ru

О СЛАБО ИНТЕРПОЛИРУЕМЫХ РЫНКАХ[1]

Интерполирование (в слабом смысле [1]) финансовых (B,S)-рынков до полных основывается на вычислении мартингальных мер, удовлетворяющих ослабленному условию несовпадения барицентров (слабо интерполяционные мартингальные меры). В настоящей работе усиливается результат в указанном направлении, полученный в [2].

Рассмотрим одношаговую фильтрацию $(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$,
где $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(B_1, B_2, \dots)$, $\{B_1, B_2, \dots\}$ — непересекающиеся подмножества Ω, $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$. Для процесса $Z = (Z_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^1$ введем обозначения: $a := Z_0$, $b_i := Z_1|_{B_i}$, $i = 1, 2, \dots$. Пусть $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_k)_{k=0}^1$ и $\mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$ — множество вероятностных мер P на $(\Omega, \mathcal{F})$, для которых $P(B_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots$, и процесс $Z = (Z_k, \mathcal{F}_k, P)_{k=0}^1$ является мартингалом. Мы предполагаем, что $\mathcal{P}(Z, \mathbf{F}) \neq \varnothing$.

Обозначим множество слабо интерполяционных мартингальных мер через ОУНБ(Z).

Теорема. *Пусть число a иррационально. Пусть последовательность $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ содержит счетное число различных рациональных чисел. Если в $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ не содержится конечного набора $\{b_{i_j}\}_{j=1}^{k}$ такого, что при некоторых рациональных $d_0, d_1, \dots, d_k$ выполняется равенство $a = d_0 + d_1 b_{i_1} + \dots + d_k b_{i_k}$, то ОУНБ$(Z) \neq \varnothing$.*

Замечание. Отличие сформулированного результат от соответствующей теоремы в [2] состоит в следующем. В [2] требовалось, чтобы в последовательности $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ содержалось лишь конечное число иррациональных чисел, а в сформулированной здесь теоремы этого не требуется.

Л И Т Е Р А Т У Р А
1. *Pavlov I. V.* New family of one-step processes admitting special interpolating martingale measures. Global and Stochastic Analysis. 2018. Vol. 5, № 2, pp. 111–119.
2. *Данекянц А. Г., Неумержицкая Н. В.* Обобщение одного результата о уществовании слабо интерполяционных мартингальных мер. Теория вероятностей и ее применения. 2019. Том 64, вып. 1, стр. 163–164.

Н. П. Красий, И. В. Павлов (Ростов-на-Дону, Россия)
krasnad@yandex.ru, pavloviv2005@mail.ru

ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ С ПРИОРИТЕТАМИ[2]

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство. В настоящей работе рассматривается функция вида:

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 19-01-00451).
[2]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 19-01-00451).

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = E^P \left(\prod_{j=1}^{k} f_j(u_j, \cdot) \right), \tag{1}$$

где каждая функция $f_j(u_j, \omega)$, $j = 1, \ldots, k$, удовлетворяет следующим условиям:

1) $f_j(u_j, \omega)$ определена и измерима на $[0, \infty) \times \Omega$, при P-почти всех $\omega \in \Omega$ непрерывна на $[0, \infty)$ и удовлетворяет равенству $f_j(0, \omega) = 0$;

2) $f_j(u_j, \omega)$ дважды непрерывно дифференцируема на $(0, \infty)$ при P-почти всех $\omega \in \Omega$, причем первая и вторая производные ограничены на множествах вида $K \times \Omega$, где K — компакт на $(0, \infty)$;

3) при P-почти всех $\omega \in \Omega$ и $\forall u_j \in (0, \infty)$ $f_j(u_j, \omega) > 0$, ее первая производная строго больше нуля и ее вторая производная строго меньше нуля.

Если положить $f_j(u_j, \omega) = u_j^{\alpha_j(\omega)}$, где $\alpha_j(\omega)$ — случайная величина (приоритет), $P(\alpha_j = 0) = 0$ и $P(0 < \alpha_j < 1) > 0$, то (1) совпадает с функцией, получаемой в задаче оптимизации квазилинейной модели с независимыми приоритетами α_j (см. [1]). Ключевую роль в этой задаче оптимизации играла лемма 2 в [1]. Следующее предложение обобщает указанную лемму.

Предложение. *Пусть $\phi_j(s)$, $j = 1, \ldots, k$ — произвольные дважды дифференцируемые на некотором интервале (s_1, s_2) функции, принимающие на этом интервале значения в множестве $(0, \infty)$ и удовлетворяющие на нем либо неравенству $\phi_j''(s) < 0$, либо неравенствам $\phi_j'(s) \neq 0$ и $\phi_j''(s) \leq 0$. Если функция $F(s) := F(\phi_1(s), \ldots, \phi_k(s))$ имеет стационарную точку $s^\star \in (0, \infty)$, то эта точка является точкой локального максимума.*

В докладе это предложение будет использовано для оптимизации квазилинейной модели с зависимыми приоритетами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Павлов И. В. Углич С. И.* Оптимизация сложных систем квазилинейного типа с несколькими независимыми приоритетами. Вестник РГУПС. 2017. № 3, стр. 140–145.

О. И. Летуновский , В. С. Пилиди (Ростов-на-Дону, Россия)
letunovskij.oleg@gmail.com, pilidi@sfedu.ru

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМОВ ПОИСКА ФРАГМЕНТОВ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПО ШАБЛОНУ

Среди представленных в литературе подходов для поиска объектов на изображении по шаблону, отметим подходы, основанные на попарном сравнении блоков [1, 2] и вычислении спектральных признаков [3, 4]. Нами проведен сравнительный анализ алгоритмов поиска фрагментов изображения по шаблону с использованием нормализованной взаимной корреляционной меры. В качестве тестовых изображений были взяты снимки авиатехники, шаблонами выступают изображения воздушных объектов. Для сравнения алгоритмов поиска было разработано программное обеспечение на языке C# с использованием библиотек Emgu CV и FFTW. В данной работе вместо сохранения промежуточных значений при расчете взаимной корреляции между изображениями были применен метод интегральных таблиц. Проведено сравнение с ранее полученными результатами. Программа может быть использована при разработке универсальной платформы поиска объектов искусственного происхождения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bayram S., Sencar H. T., Memon N.* A Survey of Copy-Move Forgery Detection Techniques. IEEE Western New York Image Processing Workshop. 2008. P. 1–4.

2. *Popescu A. C., Farid H.* Exposing digital forgeries by detecting duplicated image regions. Technical Report, TR2004-515. Dartmouth College, Department of Computer Science. Hanover, USA. 2004. P. 1–11.

3. *Sheng Y., Arsenault H. H.* Experiments on pattern recognition using invariant Fourier-Mellin descriptors. J. Opt. Soc. Am. A. 1986. V. 3. P. 771–775.

4. *Lin C. Y., Wu M., Bloom J. A. et al.* Rotation, scale, and translation resilient watermarking for images. IEEE Transactions on Image Processing. 2001. V. 10 (5). P. 767–782.

Н. А. Сайфутдинова, Д. А. Бутко, С. С. Сайфутдинова
(Ростов-на-Дону, Россия)
saifut@mail.ru

НЕКОТОРАЯ СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЁТА ГОРОДСКОЙ ВОДОПРОВОДНОЙ СЕТИ С УЧЁТОМ ИЗНОСА ОБОРУДОВАНИЯ

При проектировании городской водопроводной сети основными уравнениями для внутренней увязки являются хорошо известные уравнения баланса в узлах и уравнения баланса потерь напора в элементарных кольцах сети. Данная работа посвящена изучению надёжности таких сетей. Различные подходы к учёту влияния случайных факторов на эксплуатационные свойства водопроводных сетей представлены в работах авторов [1], [2], [3].

В работе рассматриваются несколько модельных примеров элементарных колец сети. В качестве основной характеристики надёжности выступает вероятность подачи воды в некоторую конечную точку. Эта вероятность выражается через вероятности безотказной работы отдельных элементов трубопровода. При этом вероятность отказа некоторого элемента зависит от коэффициента эквивалентной шероховатости этого элемента, который отражает изменение эксплуатационных свойств арматуры и труб, связанных с длительностью их использования, химическим составом воды и пр.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеев М.И., Ермолин Ю.А.* // Вероятностные характеристики времени наработки между отказами восстанавливаемых объектов водопроводно-канализационного хозяйства. Водоснабжение и санитарная техника [Эл. ресурс]: Электронный журнал.-2009, № 5, с.26-28.

2. *Бутко Д.А., Данекянц А.Г., Мельников И.С.* // Выбор оптимальной схемы системы водоснабжения для высотного здания. Водоснабжение и санитарная техника [Эл. ресурс]: Электронный журнал.-2018, № , с.32-37.

3. *Гальперин Е.М.* // О процедуре определения надёжности функционирования объектов систем водоснабжения и водоотведения. Вестник СГАСУ. Градостроительство и архитектура.-2014, № 1(14), с.52-56.

А. В. Скориков (Gubkin University, Москва, Россия)
skorikov.a@gubkin.ru

ПОТЕНЦИАЛЫ БЕССЕЛЯ В ПРОСТРАНСТВАХ $L_{\boldsymbol{p}}$ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ЦИЛИНДРЕ

Определим $L_{\boldsymbol{p}}$ пространства со смешанной нормой для функций на цилиндрических множествах, являющихся декартовым поизведением бесконечномерного тора T^∞ и евклидова пространства R^m, причем для T^∞ используем определение $L_{\bar{p}}$ пространств из работы [1], которое в конечномерном случае отличается от определения Benedek A., Panzone R. порядком взятия норм. Отождествим функции $f(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{x})$ с периодическими функциями по координатам вектора $\boldsymbol{\theta}$ с бесконечным числом координат $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, ...)$ и $\boldsymbol{x} \in R^m$. Используя плотность нормального распределения $w_t(x)$ с параметрами (0, 2t) и периодизацию этой плотности $w_t(\theta)$, определим меру $d\mu_{w_{t\sigma_k^2}}(\theta)dQ_k$ на торе и меру μ_t Гаусса-Вейерштрасса на цилиндре $T^\infty \times R^m$ так, что ограничение этой меры на конечномерные цилиндры имеет плотность $w_t(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{x}) = \prod_{k=1}^n w_{t\sigma_k^2}(\theta_k) \prod_{i=1}^k w_t(x_k)$, а также ядро потенциала Бесселя

$$G_\alpha(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{x}) = 1/\Gamma(\alpha/2) \int_0^\infty t^{\alpha/2-1} e^{-t} w_t(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{x}) dt.$$

Потенциал Бесселя $G_c^\alpha \varphi$ определяется как свертка функции φ с ядром G_α. Следующая теорема оценивает меру μ_t в $L_{\boldsymbol{p}}$ на T^∞, уточняет теорему 10, [2] и позволяет доказать теорему Соболева для смешанных норм на бесконечномерном цилиндре:

Теорема 1. Пусть $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, ...)$, $\boldsymbol{1} \le \boldsymbol{p} < \infty$, $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{p}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{1}$ и выполняются условия $a)\delta = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{q_k} < \infty,\ b) \sum_{k=1}^\infty \sigma_k < \infty,\ c)\ \prod_{k=1}^\infty \sigma_k^{\frac{1}{q_k}} > 0$, тогда $\|\mu_t\| \le c(1 + t^{-\delta/2})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Павлов И. В., Скориков А. В.* Пространства $L_{\boldsymbol{p}}$ со смешанной нормой на бесконечномерном торе. Известия ВУЗОВ.Математика 1986. №. 2, стр. 69–72

2. *Бендиков А. Д.,Павлов И. В.* Пространства $L_{\boldsymbol{p}}$ со смешанной нормой на бесконечномерном декартовом произведении вероятностных пространств. Analysis Mathematica 1987, 13 №. 3, стр. 231–250

И. В. Цветкова, И. В. Павлов (Ростов-на-Дону, Россия)
pilipenkoIV@mail.ru, pavloviv2005@mail.ru

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ДЕФЛЯТОРЫ[1]

Интерполяционные мартингальные меры являются основой методики, позволяющей на конечных и счетных вероятностных пространствах интерполировать неполные безарбитражные рынки до полных и тем самым строить на получаемых расширенных рынках совершенные хеджи. Хорошо известно, что каждая

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 19-01-00451).

мартингальная мера, эквивалентная исходной "физической"вероятности P, каноническим образом порождает мартингальный дефлятор, то есть положительный мартингал относительно P, который при умножении на дисконтированную цену акции на исходном рынке дает мартингал относительно P. В настоящее время теория дефляторов достаточно хорошо развита (в основном, иностранными специалистами). В представленном докладе для статических моделей будут обсуждены элементы новой концепции интерполяционных дефляторов.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, а $(\mathcal{F}_k)_{k=0}^1$ — фильтрация на Ω: $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(B_1, B_2, \dots)$, где $\{B_1, B_2, \dots\} \subset \mathcal{F}$ есть разбиение Ω на атомы, имеющие положительную P-вероятность. Пусть $Z = (Z_k, \mathcal{F}_k, P)_{k=0}^1$ — адаптированный одношаговый процесс (например, дисконтированная цена акции), а $H = (H_k, \mathcal{F}_k, P)_{k=0}^1$ — строго положительный процесс с $H_0 = 1$. Зафиксируем некоторое семейство интерполирующих фильтраций $\mathbf{F} = \{\mathbf{F}^\alpha\}$, где $\mathbf{F}^\alpha = (\mathcal{F}_n^\alpha)_{n=0}^\infty$ и для каждого индекса α выполняются равенства: $\mathcal{F}_0^\alpha = \mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_\infty^\alpha = \mathcal{F}_1$. Каким-то образом полученные $\mathbf{F}^\alpha$-интерполирующие процессы для процессов Z и H будем обозначать $Z^\alpha = (Z_k^\alpha, \mathcal{F}_k, P)_{k=0}^\infty$, где $Z_0^\alpha = Z_0$, $Z_\infty^\alpha = Z_1$, и $H^\alpha = (H_k^\alpha, \mathcal{F}_k, P)_{k=0}^\infty$, где $H_0^\alpha = H_0$, $H_\infty^\alpha = H_1$. Процесс H (соотв., H^α) будем называть дефлятором процесса Z (соотв., Z^α), если он удовлетворяет некоему свойству $\mathbf{M}$ (например, H и HZ — мартингалы, или H^α и $H^\alpha Z^\alpha$ — мартингалы). Пусть для дефляторов H и H^α определено свойство $\mathbf{U}$ (например, свойство единственности дефлятора). Обычно мы имеем, что для дефляторов H свойство $\mathbf{U}$ не выполняется (дефлятор H не единственен). Дефлятор H процесса Z будем называть $\mathbf{F}$-интерполяционным дефлятором, если для любого α процесс H^α является дефлятором процесса Z^α (т.е. удовлетворяет свойству $\mathbf{M}$), а также удовлетворяет свойству $\mathbf{U}$.

В докладе будут приведены конкретные реализации данного общего определения, а также рассмотрен случай конечного Ω.

Е. Г. Чуб (Ростов-на-Дону, Россия)
elenachub111@gmail.com

СУБОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЕКТОРОМ СОСТОЯНИЯ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА[1]

Разработана модель управляемой телекоммуникационной системы подвижного объекта на основе использования информационных критериев. Управление синтезировано на примере критерия Шеннона. Отличительная особенность предложенного метода решения поставленной задачи — сведение решения дифференциального уравнения в частных производных к интегрированию системы обыкновенных

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 19-01-00451).

дифференциальных уравнений. Предложенные подходы позволяют значительно сократить вычислительные затраты, что обеспечивает их эффективное использование в современных вычислителях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соколов С. В.* О решении проблемы синтеза стохастического оптимального управления на основе нелинейных вероятностных критериев. ПММ. 1996. Том 60, вып. 4.

2. */Хуторцев В. В., Соколов С. В., Шевчук П. С.* Современные принципы управления и фильтрации в стохастических системах. М.: Радио и связь. 2001.

3. *Тертычный-Даури В. Ю.* Стохастическая механика. М.: Факториал Пресс. 2001.

В. В. Шамраева (Москва, Россия)
shamraeva@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДМНОЖЕСТВА МАРТИНГАЛЬНЫХ МЕР В СЛУЧАЕ ОДНОШАГОВОЙ МОДЕЛИ ФИНАНСОВОГО РЫНКА С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим безарбитражный и неполный (B, S)-рынок, заданный на $\{\Omega, \mathbf{F}\}$, где $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$, $Z = (Z_i, \mathcal{F}_i)_{i=0}^{1}$ — $\mathbf{F}$-адаптированный случайный процесс. $P(Z, \mathbf{F})$ множество невырожденных мартингальных мер этого рынка. Пусть $Z_0 = a, Z_1(\omega_i) = b_i, b_i > 0, i = 1, 2, \ldots$ и $P \in P(Z, \mathbf{F})$. Будем говорить, P что удовлетворяет **ослабленному условию несовпадения барицентров (ОУНБ)**, если $\forall i = 1, 2, ...$ и для любого набора индексов $J \subset \{1, 2, ...\} \setminus \{i\}$ такого, что дополнение $\overline{J}$ конечно, выполняется неравенство $b_i \neq \frac{\sum\limits_{j \in J} b_j p_j}{\sum\limits_{j \in J} p_j}$. Неравенства $b_i > \frac{b_{i-1} \min\limits_{2 \leqslant j \leqslant i-1} p_j + \sum\limits_{j=i+1}^{\infty} b_j p_j}{\min\limits_{2 \leqslant j \leqslant i-1} p_j + \sum\limits_{j=i+1}^{\infty} p_j}$, $\forall i \in I$, где $I \subset \{2, 3, ...\}$ — некоторый набор индексов, будем называть **неравенствами, частично поглощающими барицентр (НЧПБ)**.

Лемма. *Пусть $P \in P(Z, \boldsymbol{F})$. Если выполняются*

$$\max(a - b_2, (b_2 - b_1)p_1) < (b_3 - b_2)p_3 \tag{1}$$

и НЧПБ, $\forall i \geqslant 3$, то мера P удовлетворяет ОУНБ.

Заметим, что при выполнении условий леммы выполнено неравенство $b_1 < b_2 < a < b_3 < \ldots$.

Теорема. *Пусть $b_1 < b_2 < a < b_3 < \ldots$. Тогда ОУНБ непусто в $P(Z, \boldsymbol{F})$.*

Для того,чтобы $b_1 < ... < b_{k-1} < a < b_k < ...$ достаточно выполнения НЧПБ, $\forall i \geqslant k$, $k = 2, 3, ...$ и получить обобщение условия (1). Используя технику доказательств из [1], сформулированные выше лемму и теорему можно доказать и для мер, удовлетворяющих условию несовпадения барицентров (УНБ) [2].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Shamraeva V.* // Some class of the interpolating martingale measures on a countable probality space. Global and Stochastic Analysis, Vol. 5, №2, December (2018), 119-124

2. *Шамраева В.В.* Моделирование финансовых рынков со счетным числом состояний. Образовательные ресурсы и технологии. 2018. № 1 (22). С. 65-69.

Session VI

Bioinformatics and Mathematical Modelling

G. I. Belyavsky, M. A. Girchenko, N. V. Danilova (SFU, Rostov-on-Don, Russia)
beliavsky@hotmail.com

THE CALCULATION OF THE PROBABILITY EXIT OF THE AREA OF THE RANDOM PROCESS, THE COMBINED MONTE – CARLO METHOD APPROACH

We consider a numerical method for calculating the probability of an exit from the region by the solution of the stochastic differential equation: $dX_t = f(X_t)dt + \varphi(X_t)dW_t$. Sufficient conditions of the existence and uniqueness of the strong solution with a given initial condition are assu-med to be satisfied. The solution is considered on a finite interval $[0, T]$. The probability of an exit is $P_{out} = 1 - EI_{\{(\underline{X}_T > a) \wedge \overline{X}_T\}}$. There are $\underline{X}_T = \inf\limits_{S \le t} X_s$, $\overline{X}_t = \sup\limits_{S \le t} X_s$. First of all, we note that the calculation of the probability of going beyond is directly related to the solution of the heat equation with variable coefficients:

$$f(x)\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\varphi^2(x)}{2}\frac{\partial^2 V(x)}{\partial^2 x} = 0$$

in the area of $D = \{(x,t) : a < x < b, t < T\}$ and conditions at the border: $V(x,T) = 1$, $V(a,T) = V(b,T) = 0$. The probability is $P_{out} = 1 - V(X_0, 0)$. When applying numerical methods for solving this heat equation, the following serious problems arise: a discontinuous boundary condition and a possible negativity of the coefficient $f(x)$. It requires additional analysis. The proposed numerical method is free from these problems. The method is based on piecewise approximation of the solution of the equation by the process

$$H_t = H_{i-1} + \mu_{i-1}(t - \tau_{i-1}) + \sigma_{i-1}W_{t-\tau_{i-1}}, t \in [\tau_{i-1}, \tau_i),$$
$$H_i = H_{i-1} + \mu_{i-1}(\tau_i - \tau_{i-1}) + \sigma_{i-1}W_{\tau_i - \tau_{i-1}},$$

wherein $\mu_i = f(H_i)$, $\sigma_i = \varphi(H_i)$, $H_0 = X_0$. In these formulas $\{\tau_i\}$ is the partition of the interval $[0, T]$. With the frozen sequence $H = \{H_i\}$ conditional expectation $E(I_{\{(\underline{X}_T > a) \wedge \overline{X}_T\}}/H)$ is calculated analytically. This fact allows us to approximately calculate the desired expected value using the Monte Carlo method:

$$EI_{\{(\underline{X}_T > a) \wedge \overline{X}_T\}} \approx \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} E(I_{\{(\underline{X}_T > a) \wedge \overline{X}_T\}}/H^j),$$

H^j is the implementation H with number j. Note that the partition of the interval may be random. The results of computational experiments are compared, and the conclusion about the possible universality of the numerical method is made.

The research is supported by the Russian Science Foundation, project 17-19-01038.

I. V. Bogachev, V. V. Dudarev, R. D. Nedin (Rostov-on-Don, Russia)
bogachev89@yandex.ru

ON THE FEATURES OF MODELING INHOMOGENEOUS VISCOELASTIC MATERIALS TAKING INTO ACCOUNT RESIDUAL STRESSES AND STRAINS

An important task of modern mathematical modeling is the creation of adequate models of functionally gradient materials (FGM), taking into account the presence in them of fields of residual stress and strain (RSS). Their main feature is the continuous dependence of the properties on the spatial coordinates, and the properties can vary significantly in the volume of the samples according to different laws. At present, the field of modeling FGM with RSS, taking into account the rheological properties of materials described by models of viscoelasticity, is poorly studied. The properties of the viscoelastic materials are functions not only of the spatial coordinates, but also of time, or the frequency of oscillations in the steady-state case. An important task in the simulation of FGM is to determine the functions characterizing the properties of the material, wich allowing to assess the compliance of the characteristics obtained in the preparation of the sample with the calculated ones.

This research is devoted to the construction of a general model of a functional-gradient material, taking into account the presence of non-uniform fields of residual stress and strain and viscoelastic properties. Viscoelastic properties are modeled using the theory of complex modules and the correspondence principle. In this report, a general formulation of the problem of steady-state vibrations of a viscoelastic FGM body with RSS is obtained. On its basis, to study the influence of factors of residual stress and strain (deformations) on the amplitude-frequency characteristics (AFC) of bodies, problems on the oscillations of a non-uniform rod and tube were considered. The purpose of the analysis was to assess the possibility of identifying the functions characterizing the RSS according to the data on the values of the frequency response at certain points of the objects. In both model cases, two sets of experiments were carried out to study the effect of residual stress factors and residual deformations on AFC and the maximums of AFC, which corresponding to the resonant frequencies in the elastic case. Both for the rod and for the pipe, results were obtained indicating that the residual deformations have a significantly greater effect on the AFC than the residual stress.

This work was supported by the Russian Science Foundation (project code 18-71-10045).

I. M. Erusalimskiy (Rostov-on-Don, Russia)
ymerusalimskiy@sfedu.ru

«N»-«1»-REACHABILITY ON A GRAPH-LATTICE: WAYS, RANDOM WALKS, SOME IDENTITIES

The subject under consideration is a graph-lattice with «n»-«1» constraints on reachability. Graph-lattice has vertices at points with non-negative integer coordinates. Each vertex has two outgoing edges: horizontal edge and vertical edge to the neighboring vertices — right and top.

Admissible ways in the case of «n»-«1» reachability are paths which satisfy the additional condition. This condition consists of divisibility by n of the quantity of edges in way segments, consisting only of horizontal edges, which are the maximum with respect to the embedding. This restriction does not apply to final segment of the ways consist of horizontal edges. We obtained formula for the number of «n»-«1» ways, leading from the vertex to the vertex. This allowed us to obtain a new identity for the binomial coefficients.

The process of a random walk via «n»-«1» ways on a graph-lattice is considered. It is shown that it is locally reduced to the Markov process on the subgraph determined by the starting vertex. We obtained the formula for probability of transition from the vertex to the vertex via «n»-«1» ways.

Obtained results continue the research presented in papers [1–3].

REFERENCES

1. *Erusalimskiy I. M.* Graph-lattice: random walk and combinatorial identities. Bol. Soc. Mat. Mex. 2016. (3) 22 (2), pp. 329–225.
2. *Erusalimskiy I. M.* A random walk on a graph-lattice and combinatorial identities. Inzh. Vestn. Dona. 2015. Vol. 2, No. 2. http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/2964
3. *Erusalimskii Ya. M.* 2–3 Paths in a Lattice Graph: Random Walks. Mathematical Notes. 2018. Vol. 104, Issue 3–4, pp. 395–403.

A. B. Ghazaryan (Yerevan, Armenia)
ghazaryan.aghasi@gmail.com

ON THE PALETTE INDEX OF A GRAPH: THE CASE OF GENERALIZED THETA GRAPHS

Given a proper edge coloring ϕ of a graph G, we define the palette $S_G(v, \phi)$ of a vertex $v \in V(G)$ as the set of all colors appearing on edges incident with v. The palette index $\check{s}(G)$ of G is the minimum number of distinct palettes occurring in a proper edge coloring of G.

The palette index was introduced by Hornak et al. [1] and has so far primarily been studied for the case of regular graphs. Very little is known about the palette index of non-regular graphs. Hornak et al. in [1] completely determined the palette index of the complete bipartite graphs $K_{a,b}$ with $a < 5$.

The generalized theta graph $\theta_{n_1,\dots,n_k}$ consists of a pair of endvertices joined by k internally disjoint paths of lengths $n_1,\dots,n_k \geq 1$.

In this work we completely determine the palette index of generalized theta graphs.

Theorem *the numbers $n_1, n_2, \dots, n_k$, and $k > 2$ are natural numbers, the number of odd numbers from $n_1, \dots, n_k$ is a, and the number of even numbers from $n_1, \dots, n_k$ is b. Then for the graph $G = \theta_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ the fallowing equalities are true:*

$$1.\ \check{s}(G) = \begin{cases} l+1 & a = 0(\mathrm{mod}\ 2), b = 0(\mathrm{mod}\ 2) \\ l+2 & a = 1\mathrm{mod}2, b = 1\mathrm{mod}2, \exists i \in \overline{1,a}\ n_i = 1 \\ l+3 & a = 1\mathrm{mod}2, b = 1\mathrm{mod}2, \forall i \in \overline{1,a}\ n_i > 1 \end{cases}$$

$$2.\ \check{s}(G) = \begin{cases} l & a = 1\mathrm{mod}2, b = 0\mathrm{mod}2, \exists i \in \overline{1,a}\ n_i = 1 \\ l+1 & a = 1\mathrm{mod}2, b = 0\mathrm{mod}2, \forall i \in \overline{1,a}\ n_i > 1, \\ l+2 & a = 0\mathrm{mod}2, b = 1\mathrm{mod}2 \end{cases}$$

where the first equality is for $k = 2l$, and the second equality is for $k = 2l + 1$.

REFERENCES

1. *M. Hornak, R. Kalinowski, M. Meszka, M. Wozniak* Minimum number of palettes in edge colorings. Graphs and Combinatorics, 2014. Vol. 30, pp. 619–626.

V. A. Skorokhodov (Rostov-on-Don, Russia)
pdvaskor@yandex.ru

ON LIMIT STATES OF REGULAR DYNAMIC RESOURCES NETWORKS

Let $G(X, U, f, D)$ be a periodic dynamic resource network [1,2]. Every arc $u = (i, j)$ of such network has an throughput capacity r_{ij}, wich is periodic depended on discrete time with period D. Every node of the network stores some amount of «resource». This resource reallocates through networks according to the specified rules.

Vector $\mathbf{Q}(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$ are called network G state in the moment t and each of these values $q_i(t)$ is called the quantity of resource in vertex i in the moment t.

We define rules of functioning of the dynamic resourse network: for each $i \in [1; n]_Z$

$$q_i(t+1) = q_i(t) - \sum_{v \in [x_i]^+(t)} F(v,t) + \sum_{v \in [x_i]^-(t)} F(v,t),$$

where $F(v, t)$ is a the resource flow value, which passes through the arc v in the moment t.

For modeling of process of reallocation of resource in dynamic graph G we concider the same processes on the auxiliary graph G', similar to nonstandard reachability, and on the set of auxiliary regular graphs $\{G_i\}_{i=0}^{D-1}$.

Lemma 1. *Let* $\mathbf{Q}_i^*$ *be an limit state of regular resource network* G_i *in case* $W = 1$*; then*

$$\mathbf{Q}_{i+1(\bmod D)}^* = \mathbf{Q}_i^* \cdot \mathbf{P}(i),$$

where $\mathbf{P}(i)$ *is a stochastic matrix of dynamic network* G *in moment* t.

Theorem 1. *Let* G *be a regular dynamic resource network; then vector* $\mathbf{Q}'_{*1} = \left(\mathbf{Q}_0^*, \ldots, \mathbf{Q}_{D-1}^*\right)$ *is a limit state of auxiliary resource network* G' *in case* $W = 1$.

Theorem 2. *Let* G *be a regular dynamic resource network; then the limit state of auxiliary resource network* G' *exists and is unique for any value of* W.

REFERENCES

1. *Kuznetsov O. P., Zhilyakova L. Yu.* Nonsymmetric resource networks. The study of limit states. Management and Production Engineering Review. 2011. Vol. 2, No. 3. pp. 33–39
2. *Skorokhodov V. A., Chebotareva A. S.* The Maximum Flow Problem in a Network with Special Conditions of Flow Distribution. Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2015. Vol. 9, No. 3. pp. 435–446.

Белозуб В. А., Козлова М. Г. (Симферополь, РФ)
art-inf@mail.ru

НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ТИПА УРЫСОНА

Рассматриваются нелинейные интегральные (или дискретные) уравнения типа Урысона [1] относительно неизвестной функции $z(s)$

$$Az \equiv \int_a^b \psi(s)n(t - z(s))ds = u(t), c \leq t \leq d.$$

В прикладных задачах достаточно восстановления характерных точек поверхности $h(x)$ по результатам дистанционного зондирования

$$\int_a^b \varphi(x, h(x), h'(x)) exp\left(-\lambda \left(t - \frac{2}{c} R_k\left(h\right)\right)^2\right) dx = g_k(t), k = 1, 2,$$

$$R_k(h) = \sqrt{(M - h(x))^2 + (x - a_k)^2},$$

$\varphi_k > 0$ – достаточное число раз непрерывно дифференцируемая, λ – фиксированный параметр, $\lambda \gg 1$, c, M, a_1, a_2 – фиксированные числа. При этом $H \gg 1$, $R_k(h) \neq 0$. Предполагается существование решения $h(x)$ системы при заданных $g_k(t)$, $k = 1, 2$. Для решения данной задачи используется метод Лапласа [2].

Заметим, что при сформулированных условиях относительно H, стационарные точки $h(x)$ близки к стационарным точкам функции $R_k(h)$. Пусть $h_1, h_2, \ldots, h_m$ упорядоченное по убыванию множество значений функции h в ее стандартных точках $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Предположим, что расстояние a_1, a_2 от $[a, b]$ имеет порядок $\ll H$, тогда последовательность $R_k(h_i) = \dfrac{2}{c}\sqrt{(M - h_i(x))^2 + (x_i - a_k)^2}$ является упорядоченной по возрастанию. Характерными точками решения будем считать стационарные точки. Предлагается алгоритм нахождения таких точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н.* Нелинейные некорректные задачи / А. Н. Тихонов, А. С. Леонтьев, А. Г. Ягола. – М.: Наука, 1995. – 312 с.
2. *Федорюк М. В.* Метод перевала. – М.: Наука, 1974. – 350 с.

Н. В. Боев (Ростов-на-Дону, Россия)
boyev@math.rsu.ru

ДИФРАКЦИЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН НА СКОПЛЕНИЯХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЕПЯТСТВИЙ В УПРУГОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ ЛЮБЫХ ЗАКОНОВ ИХ ОТРАЖЕНИЙ И ТРАНСФОРМАЦИЙ

Теоретическая значимость проведенного фундаментального исследования состоит в получении явного выражения перемещений в переотраженных конечное число раз высокочастотных упругих волнах от скоплений препятствий произвольной формы при любых законах их отражений и трансформаций. Практическое значение состоит в применении полученных выражений к расчету волновых полей в пространственных задачах ультразвукового неразрушающего контроля упругих материалов. Другое применение может быть связано с изучением свойств метаматериалов, полученных включением системы твердых тел различной формы в упругую матрицу метаматериала в режиме динамического воздействия на него.

Рассмотрена задача прохождения ультразвуковых волн через скопления пространственных препятствий (в том числе и троякопериодической структуры), находящихся в бесконечной трехмерной упругой среде.

Динамическое воздействие выбрано следующее: в скопление препятствий вводится импульс с тональным заполнением несколькими периодами плоской высокочастотной, монохроматической продольной или поперечной упругой волны, а в некоторой выбранной области упругой среды принимаются прошедшие волны. При этом каждая из распространяющихся волн может претерпевать любые возможные отражения (продольной волны в продольную, поперечной волны в поперечную) и трансформации (продольной волны в поперечную, поперечной волны в продольную).

Ультразвуковой режим колебаний позволяет построить решение трехмерной задачи на основе геометрической теории дифракции. Задача исследуется в локальной постановке. На первом этапе определяются траектории лучей распространения упругих волн с учетом их отражений и трансформаций в точках зеркального отражения на граничных поверхностях препятствий. Траектории лучей представляют собой пространственные ломаные линии. При прохождении каждого луча из источника волны через скопление препятствий образуется, в общем случае, конечное число лучей с различнными типами отражений и трансформаций упругих волн. В область приема могут попасть как все образовавшиеся лучи, так и часть их.

На втором этапе интегральные представления перемещений в переотраженных волнах выписаны на основе физической теории дифракции Кирхгофа. Асимптотической оценкой кратных дифракционных интегралов методом многомерной стационарной фазы выписан явный вид геометрооптического приближения перемещений в многократно отраженных волнах. На основе полученного решения в области приема импульса анализируются фазы и величины перемещений в прошедших продольных и поперечных ультразвуковых волнах.

Исследования проведены при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, грант № 15-19-10008-П.

Германчук М. С., Козлова М. Г. (Симферополь, РФ)
m.german4uk@yandex.ru, art-inf@mail.ru

АЛГОРИТМЫ РЕОПТИМИЗАЦИИ В МНОГОАГЕНТНЫХ ЗАДАЧАХ МАРШРУТИЗАЦИИ

Задачи комбинаторной оптимизации (ЗКО) встречаются практически во всех областях. Такие задачи возникают при планировании производства, оптимизации коммуникационной инфраструктуры или работы исполнителей, агентов, коммивояжеров. Использование найденного оптимального решения при построении оптимального решения для задачи с новыми исходными данными (возмущенными начальными данными) связано с понятием реоптимизации (reoptimization) и устойчивости. Особенный интерес реоптимизация представляет в NP-трудных задачах, например, в задаче для нескольких коммивояжеров с дополнительными условиями (информация, знания, прецеденты). В задаче о поиске максимально простой цепи между двумя вершинами (т. е. с максимальным количеством вершин) каждой вершине приписывается некоторый предикат, задающий информацию о вершине (включение вершины в цепь или исключение и т. п.). Для нескольких коммивояжеров с общей целью задача сводится к случаю одного коммивояжера, конкуренция (захват сети с учетом ресурсов) – приводит к играм на графах. В решении многоагентной задачи коммивояжера применяется кластеризация исходного графа на несколько подграфов. Кластеризация также необходима для декомпозиции задачи при ее большой размерности (используется алгоритм максимального разреза). В работе приведены результаты построения оптимальных решений в ЗКО, обладающей определенной структурой, для случаев добавления, удаления или замены элементов множества исходных данных; реализованы приближенные эвристические алгоритмы решения прикладных задач; проведен вычислительный эксперимент и сравнительный анализ реализованных алгоритмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Германчук М. С., Козлова М. Г.* Задача реоптимизации сети / Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование: сборник научных трудов научно-практической конференции МИКМО-2017 и Таврической научной конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике / Под ред. В. А. Лукьяненко. – Симферополь: ИП Корниенко А. А., 2017. – С. – 109-113.

Л. В. Карташева (Ростов – на – Дону, Россия)
ludmila.kartasheva@mail.ru

СЕТЕВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ ПРЕДПРИЯТИЯ

Одним из методов экономико – математического моделирования является сетевое планирование. Сетевые методы и модели широко применяются для решения задач коммерции. На их основе создаются системы сетевого планирования и управления (СПУ). Сетевой моделью называется экономико-математическая модель, отражающая комплекс работ и событий в графической форме. Графическая часть состоит из линий (работ) и узлов (событий), т.е. математический аппарат сетевых моделей базируется на теории графов. В сетевых моделях кроме основных показателей (критический путь, резервы времени событий, работ и путей) имеются и другие, которые являются исходными для определения не менее важных характеристик для анализа и оптимизации сетевого графика комплекса работ. К ним относятся: ранний срок совершения события, поздний срок совершения события, резерв времени события. Для всех работ на основе ранних и поздних сроков свершения всех событий строится таблица, позволяющая найти полный резерв времени пути, который показывает, насколько может быть увеличена сумма продолжительности всех работ на пути относительно критического пути. В данной работе рассматривается задача минимизации времени, отведенного для выполнения комплекса работ по организации выставки-продажи товаров. Дана упорядоченная структурно-временная таблица перечня работ для данного комплекса работ. Требуется построить сетевой график, определить критический путь, критические работы, резервы времени, провести графический анализ комплекса работ и оптимизацию сетевой модели по критерию минимума времени при заданных ресурсах. Кроме того, определяется экономия ресурсов и материальных вложений и строится оптимальный сетевой план работ. Чтобы провести анализ сетевой модели, а затем ее оптимизацию, определены основные характеристики сетевого моделирования. Эти характеристики определены двумя способами аналитически (с помощью формул) и графически – построением сетевого моделирования. Значения свободного резерва времени работы вычисляется как разность значений определенных графов. Величины графов указывают на резервы работ, необходимые для оптимизации модели. Найдены значения коэффициента напряженности, вычисленные по определенной формуле.

Д. В. Козлов, Б. Я. Штейнберг (Ростов-на-Дону, Россия)
dvkozlov@sfedu.ru borsteinb@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРАВОВОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В данной статье рассматривается модель правового пространства, ориентированная на анализ правового регулирования. Дополнение этой модели статистической информацией может позволить оценивать математическое ожидание расходов, связанных с вмешательством правоохранительных органов в случае событий с неблагоприятными последствиями и делать прогнозы таких событий.

Актуальность данной модели вызвана тем, что объем нормативных документов, регулирующих взаимодействие субъектов правового пространства, начинает превышать границы возможностей человека изучать и использовать эти документы [1].

Разумным в этой ситуации видится создание компьютерных инструментов, в том числе, использующих машинное обучение, помогающим ориентироваться в пространстве правовых документов. Предлагаемая модель – ориентированный граф. Вершины графа – это отдельные параграфы или группы параграфов правовых документов, к которым относятся международные соглашения, национальные конституции, кодексы, законы, подзаконные акты и иные нормативные документы. Дуга соединяет две вершины, если параграф документа, соответствующий конечной вершине дуги, использует параграф документа, соответствующий начальной вершине. Этот граф должен быть бесконтурным.

Построенная модель может использоваться: для поиска списка документов, близких к проектируемому; для построения связи документа с его последующими обновлениями, для поиска пары документов, дублирующих друг друга в некоторых пунктах; для поиска пары документов, противоречащих друг другу в некоторых пунктах; для поиска не используемых ссылок одних документов на другие.

При накоплении больших данных о событиях с неблагоприятными последствиями взаимной деятельности субъектов правового пространства, прогноз таких событий может выполняться более точно с помощью нейронных сверточных сетей.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. http://sk.ru/news/b/articles/archive/2017/12/01/law_2600_code-o-problemah-avtomatizacii-prava.aspx (дата обращения 01.04.19)

А. Ю. Переварюха (Санкт-Петербург, СПИИРАН, Россия)
temp_@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕРИИ ПИКОВ АКТИВНОСТИ НАСЕКОМЫХ-ВРЕДИТЕЛЕЙ РАЗРУШАЮЩИХ БИОТИЧЕСКУЮ СРЕДУ

Моделирование вспышек насекомых важная проблема лесного хозяйства. Экстремальные явления взрывообразного размножения происходят и в вечнозеленых лесах и в бореальной тайге. Фазы вспышек различным образом протекают с точки зрения теории бифуркаций у одного вида в разном биотическом окружении [1]. Отличаются последствия вспышек, вплоть до полного уничтожения отдельных видов растительности активным вселенцем.

Выделяются различиями ситуации вспышек у автохтонных насекомых и инвазивных, недавно попавших в экосистему [2]. Насекомые используются для биологического подавления сорняков. Интродукции вредителей бывают успешными, но часто заканчиваются без успехов. Инвазионная вспышка может проходить в форме единичного пика численности, после вид становится малочисленным, либо в форме серии пиков, после вид оказывает воздействие на экосистему.

Рассмотрим два вычислительных сценария инвазий в уравнениях с $N(t-\tau)$, модифицируя уравнения Николсона и Хатчинсона. Модель единичной вспышки при сопротивлении биотического окружения в форме уравнения с запаздыванием τ и $K-$ёмкостью:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(\frac{K-N(t-\tau)}{(K+cN(t-\tau))}\right) - \gamma N^2(t). \tag{1}$$

(1) опишет сценарий прохождения после активной инвазивной вспышки «бутылочного горлышка», предельной минимальной численности вида. Для серии осцилляций предложим уравнение:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\mu\nu N(t-\tau)}{\nu e^{\nu 2\tau} + \kappa(e^{\nu\tau}-1)N(t-2\tau)} - \nu N(t) - \kappa N^2(t). \tag{2}$$

(2) покажет сценарий затухающих осцилляций, резких пиков инвазионной вспышки, что оказывает разрушающее воздействие на среду.

Работа поддержана **РФФИ** № 17-07-00125 (СПИИРАН).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Liebhold A.* What causes outbreaks of the gypsy moth in North America?. Popul Ecol. 2000. Vol. 42, pp. 257–266.
2. *Perevaryukha A. Yu.* A model of development of a spontaneous outbreak of an insect with aperiodic dynamics. Entomological Review. 2015. Vol. 95, pp. 397–405.

Д. С. Рошаль, О. В. Коневцова, С. Б. Рошаль (Ростов-на-Дону, Россия), A. Lošdorfer Božič, R. Podgornik (Любляна, Словения)
rochal.d@yandex.ru

ПОИСК СКРЫТОЙ СИММЕТРИИ В РЕШЕНИЯХ ПРОБЛЕМЫ ТОМСОНА, ОБОБЩЕННОЙ НА СЛУЧАЙ ДВУХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

Проблема Томсона [1] - это задача о том, какую структуру образуют N удерживаемых на сфере частиц, взаимодействующих по закону Кулона. Её решения широко распространены в живой природе, в частности, расположение белков в вирусных оболочках (капсидах) [2] иногда является решением проблемы Томсона.

В данной работе проводится обобщение проблемы Томсона на случай размещения частиц на двух концентрических сферах с близкими радиусами. После случайного выброса (или икосаэдрически симметричного в случае моделирования вирусных капсидов) частиц на поверхность сфер минимизируется энергия системы по координатам частиц. Рассмотрена возможность получения высокосимметричных структур, соответствующих упаковкам белков в многослойных вирусных оболочках. Обнаружена соразмерность [3] оболочек в капсидах вирусного семейства Reoviridae. Проведено моделирование двухслойных назкосимметричных Томсоновских упаковок с большим числом частиц, где были найдены следы соразмерности гексагонального порядка, выражающиеся во взаимном притяжении топологических дефектов различных оболочек.

Также на примере многослойного капсида вируса Bluetongue было рассмотрено влияние pH окружающей среды на заряды белков и целостность внешней оболочки. В частности, в рамках данной модели было объяснено отделение протеинов от данного капсида при понижении кислотности окружающего раствора.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 18-02-00549 А).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Roshal D. S., Myasnikova A. E., Rochal S. B.* Slightly broken icosahedral symmetry advances Thomson problem. Phys. Lett. A. 2015. Vol. 379, p. 372.

2. *Roshal D. S., Konevtsova O. V., Lošdorfer Božič A., Podgornik R., Roshal S. B.* pH-induced morphological changes of proteinaceous viral shells. Scientific Reports. 2019. Vol. 9, Article number: 5341.

3. *Rochal S. B., Roshal D. S., Myasnikova A. E., Lorman V. L.* Commensurability between protein nanotubes in contractile ejection nanomachines. Nanoscale. 2018. Vol. 10(2), pp. 758–764.

М. А. Степович, Е. В. Серегина (Калуга, Россия), Д. В. Туртин (Иваново, Россия)
m.stepovich@rambler.ru, evfs@yandex.ru, turtin@mail.ru

О КАЧЕСТВЕННОМ АНАЛИЗЕ ТРЁХМЕРНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИФФУЗИИ, ВОЗБУЖДАЕМОЙ ЭЛЕКТРОННЫМ ЗОНДОМ В ОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОВОДНИКОВОМ МАТЕРИАЛЕ

В работе на случай пространства обобщаются идеи и методы, разработанные для проведения качественного исследования двумерной математической модели диффузии и катодолюминесценции экситонов, возбуждаемых пульсирующим низкоэнергетическим электронным зондом в однородном полупроводниковом материале [1, 2]. Для изучаемой трёхмерной модели доказана непрерывная зависимость решений (выходных данных) от входных данных. Доказываемые утверждения оформлены в виде теорем. В результате установлено, что рассмотренная модель может быть применена для оценки коэффициента диффузии и подвижности экситонов по результатам экспериментальных измерений спада катодолюминесценции. При моделировании использовались параметры, характерные для нитрида галлия.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Polyakov A. N., Smirnova A. N., Stepovich M. A., Turtin D. V.* Qualitative properties of a mathematical model of the diffusion of excitons generated by electron probe in a homogeneous semiconductor material. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, no. 2, pp. 259–262.

2. *Туртин Д. В., Степович М. А., Серегина Е. В.* О качественных характеристиках двумерной математической модели катодолюминесценции, генерированной низкоэнергетическим электронным зондом в однородном полупроводниковом материале // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа"(28 января–2 февраля 2019 г., г. Воронеж, Воронежский государственный университет). — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2019. — С. 266–267.